

Chapter Ten

اندازه حرکت زاویه ای

Angular Momentum

هدف ما در این فصل یافتن ویژه مقادیر و ویژه توابع عملگرهای L^2 و L_z است.

چون اندازه حرکت زاویه ای دارای ابعاد $\hbar$ است، می توانیم معادلات ویژه مقدار را به صورت زیر بنویسیم.

$$L_z Y_{lm} = m \hbar Y_{lm}$$

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1) \hbar^2 Y_{lm}$$

که در آنها m و $l(l+1)$ اعداد حقیقی هستند.

بعداً خواهیم دید که چرا ویژه مقادیر را به صورت فوق نوشته ایم.

قبل از هر کاری ابتدا L_x و L_y ، L_z را در دستگاه مختصات کروی به دست می آوریم:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = r\hat{\mathbf{r}} \times (-i\hbar\nabla)$$

$$= -i\hbar r\hat{\mathbf{r}} \times \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$= -i\hbar r \left(0 + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$= -i\hbar \left(\hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{j}} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\mathbf{k}} \cos \theta$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{i}} \cos \theta \cos \varphi + \hat{\mathbf{j}} \cos \theta \sin \varphi - \hat{\mathbf{k}} \sin \theta$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} = -\hat{\mathbf{i}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{j}} \cos \varphi$$

تمرین: با قراردادن روابط فوق در معادله اندازه حرکت زاویه ای زیر مولفه های اندازه حرکت زاویه ای را در دستگاه مختصات کروی به دست آورید:

$$\mathbf{L} = -i\hbar \left(\hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_x = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_y = i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

تمرین: عبارت $L^2/(h^2 r^2)$ را حساب کنید و آن را با عبارت زیر مقایسه کنید:

$$\nabla_{\theta, \varphi}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y$$

تمرین: با تعریف دو عملگر مفید به صورت رو به رو در چارچوب مختصات کارتری نشان دهید که می توان آنها را در چارچوب کروی به صورت زیر نوشت:

$$L_{\pm} = \hbar e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

حال می توانیم عملگر L^2 را به صورت زیر بر حسب آنها تشکیل دهیم:

$$L_+ L_- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y)$$

$$= L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$$

$$= L_x^2 + L_y^2 + iL_y L_x - iL_x L_y$$

$$L^2 = L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z$$

$$= L_x^2 + L_y^2 - i[L_x, L_y]$$

$$= L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 - L_z^2 + \hbar L_z$$

پس به این ترتیب اکنون L^2 را نیز همانند L_z در دستگاه مختصات کروی در دست داریم.

اکنون باید به سراغ معادلات ویژه مقدار L_z و L^2 برویم و تلاش کنیم که آنها را حل کنیم.

معادله L_z ساده است ولی معادله ویژه مقدار L^2 یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است که در کتابهای مختلف از جمله کتاب الکترودینامیک جکسن به روشهای مختلفی مورد بحث قرار می گیرد.

$$L_z Y_{lm} = m\hbar Y_{lm}$$

$$\cancel{-i\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm} = \cancel{m\hbar} Y_{lm}$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\cancel{-i\hbar} \Theta(\theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(\varphi) = \cancel{m\hbar} \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$$

$$\frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi} = im\Phi(\varphi)$$

$$\Phi(\varphi) = C \exp(im\varphi)$$

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 d\varphi = 1$$

$$C = 1 / \sqrt{2\pi}$$

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi)$$

گاهی چنین استدلال می شود که چون یک دوران 360 درجه، یعنی تبدیل $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ ، دستگاه را به حالت اول خود برمی گرداند، لازم است که:

$$\exp(2\pi im) = 1$$



m باید صحیح باشد.

این استدلال گاهی کاملاً صحیح نیست، زیرا در عمل با مشاهده پذیرهای فیزیکی به صورت زیر:

$$\int_0^{2\pi} \psi^*(\varphi) A \psi(\varphi) d\varphi$$

$$\psi(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \frac{\exp(im\varphi)}{\sqrt{2\pi}}$$

که در آن

روبه رو هستیم و اگر علاقه مند به ناوردایی تحت زاویه 2π هستیم باید $\psi(\varphi)$ فوق را چک کنیم نه یک $\exp(im\varphi)$ تنها را.

$\psi(\varphi)$ فوق جمع $\exp(im\varphi)$ ها با ضرایب متفاوت است، مثلاً در حالت:

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(C_{m_1} \exp(im_1\varphi) + C_{m_2} \exp(im_2\varphi) \right)$$

حال اگر می خواهیم $\psi(\varphi)$ تحت دوران 2π ناورد باشد، یعنی $\psi(\varphi+2\pi)=\psi(\varphi)$ باشد، آنگاه دیگر دلیلی نداریم که حتماً m ها عدد صحیح باشد.

تمرین: در این حالت نشان دهید که m می تواند به صورت $m=c+\text{integer}$ انتخاب شود، که در آن c یک عدد گویاست.

نشان خواهیم داد که مقادیر ویژه m باید حول صفر به طور متقارن توزیع شوند، به طوری که $c=0$ یا $c=1/2$ باشد:

$$m = -l, -l+1, -l+2, \dots, l-2, l-1, l \quad \text{or} \quad -l \leq m \leq l$$

که در آن l می تواند عدد صحیح یا نیم صحیح باشد، مثلاً:

$$-1 \leq m \leq 1 \Rightarrow m = -1, 0, 1 \quad -1/2 \leq m \leq 1/2 \Rightarrow m = -1/2, 0, 1/2$$

اما در این فصل ما توجه خود را به $-m$ های صحیح یعنی به $c=0$ معطوف خواهیم کرد و بحث $c=1/2$ را به زمانی که می خواهیم بحث اسپین را هم در نظر بگیریم موکول می کنیم.

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}$$

حال نوبت به حل معادله ویژه مقدار روبه رو رسیده است:

ویژه حالات یک عملگر هرمیتی باید بر هم متعامد باشند.

تمرین: نشان دهید که عملگرهای L_z و L^2 هرمیتی هستند.

پس:

$$\langle Y_{l'm'} | Y_{lm} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

از طرف دیگر $l(l+1)$ باید مثبت باشد، یعنی $l(l+1) \geq 0$ زیرا طول بردار باید مثبت باشد:

$$\langle Y_{lm} | L^2 | Y_{lm} \rangle = \langle Y_{lm} | LL | Y_{lm} \rangle = \langle Y_{lm} | L^\dagger L | Y_{lm} \rangle$$

$$\langle Y_{lm} | L^2 | Y_{lm} \rangle = \langle Y_{lm} | LL | Y_{lm} \rangle = \langle Y_{lm} | L^\dagger L | Y_{lm} \rangle$$

$$= \langle LY_{lm} | LY_{lm} \rangle \geq 0$$

$$L^2 | Y_{lm} \rangle = l(l+1)\hbar^2 | Y_{lm} \rangle$$

$$\langle Y_{lm} | L^2 | Y_{lm} \rangle = l(l+1)\hbar^2 \langle Y_{lm} | Y_{lm} \rangle$$

$$\langle Y_{lm} | L^2 | Y_{lm} \rangle = l(l+1)\hbar^2$$

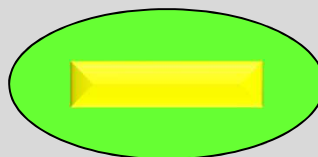
$$l(l+1) \geq 0$$

چند رابطه مفید و بحثی که به تعیین c در $m=c+\text{integer}$ منجر می شود، یعنی بحثی که m و l را به هم مربوط می کند.

$$L^2 = L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z$$

قبلا نشان داده بودیم
که:

$$L^2 = L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z$$



به طور مشابه می توان نشان
داد که:

$$0 = L_+ L_- - L_- L_+ + 0 - 2\hbar L_z$$



$$[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$$

$$[L_+, L_z] = [L_x + iL_y, L_z] = -i\hbar L_y - \hbar L_x = -\hbar L_+$$

$$[L_-, L_z] = [L_x - iL_y, L_z] = -i\hbar L_y + \hbar L_x = \hbar L_-$$

از این واقعیت که $[L^2, L] = 0$ است، نتیجه می شود که:

$$[L^2, L_{\pm}] = 0$$



$$L^2 L_{\pm} Y_{lm} = L_{\pm} L^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) L_{\pm} Y_{lm}$$

بنابراین $L_{\pm} Y_{lm}$ نیز ویژه توابع L^2 هستند با ویژه مقدار $\hbar^2 l(l+1)$ یعنی همان ویژه مقدار L^2 .

از سوی دیگر:

$$[L_+, L_z] = -\hbar L_+$$



$$L_z L_+ Y_{lm} = (L_+ L_z + \hbar L_+) Y_{lm}$$

$$= m\hbar L_+ Y_{lm} + \hbar L_+ Y_{lm} = (m+1)\hbar L_+ Y_{lm}$$

پس $L_+ Y_{lm}$ ویژه توابع L_z هستند با ویژه مقدار $(m+1)\hbar$ یعنی ویژه مقدار L_z که به آن به اندازه یک واحد اضافه شده است.

به
طور
مشابه:

$$[L_-, L_z] = \hbar L_-$$



$$L_z L_- Y_{lm} = (L_- L_z - \hbar L_-) Y_{lm}$$

$$= m\hbar L_- Y_{lm} - \hbar L_- Y_{lm} = (m-1)\hbar L_- Y_{lm}$$

پس $L_- Y_{lm}$ ویژه توابع L_z هستند با ویژه مقدار $(m-1)\hbar$ یعنی ویژه مقدار L_z که از آن به اندازه یک واحد کم شده است.

به همین دلیل ما عملگرهای $L_{\pm}$ را عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده می نامیم.

اگر ویژه مقادیر عملگرهای $L_{\pm}$ را با $C_{\pm}(lm)$ نمایش دهیم آنگاه:

$$L_{\pm} Y_{lm} = C_{\pm}(lm) Y_{l,m\pm 1}$$

$$L_{\pm}^{\dagger} = (L_x \pm iL_y)^{\dagger} = L_x \mp iL_y = L_{\mp}$$

$$\langle L_{\pm} Y_{lm} | L_{\pm} Y_{lm} \rangle \geq 0$$

پس نتیجه ای که می توان از مثبت بودن طول بردار روبه رو گرفت:

$$\langle Y_{lm} | (L_{\pm})^{\dagger} L_{\pm} | Y_{lm} \rangle \geq 0$$

این است که:

$$\langle Y_{lm} | L_{\mp} L_{\pm} | Y_{lm} \rangle \geq 0$$

$$\langle Y_{lm} | L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z | Y_{lm} \rangle \geq 0$$

$$\langle Y_{lm} | L^2 | Y_{lm} \rangle - \langle Y_{lm} | L_z^2 | Y_{lm} \rangle \mp \hbar \langle Y_{lm} | L_z | Y_{lm} \rangle \geq 0$$

$$\cancel{\hbar^2} l(l+1) - m_{\pm}^2 \cancel{\hbar^2} \mp m_{\pm} \cancel{\hbar} \geq 0$$

$$l(l+1) \geq m_+^2 + m_+$$

$$l(l+1) \geq m_-^2 - m_-$$

قبلاً ثابت کرده بودیم که:

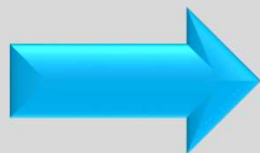
$$l(l+1) \geq 0$$

بدون از دست دادن کلیت مساله می توانیم فرض کنیم که:

$$l \geq 0$$

چرا؟ چون:

$$l(l+1) \geq 0$$



$$\begin{cases} l \geq 0 \\ l \leq -1 \end{cases} \quad or$$

اما اگر $l \leq -1$ را انتخاب کنیم باز هم می توانیم l' را به صورت $l = -l' - 1$ تعریف کنیم در این صورت

$$l = -l' - 1$$

$$l+1 = -l'$$

$$l(l+1) = (-l' - 1)(-l') = l'(l' + 1)$$

که هیچ تفاوتی ندارد.

$$l(l+1) \geq m_+^2 + m_+$$

$$l^2 + l \geq m_+^2 + m_+$$

$$l^2 + l + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \geq m_+^2 + m_+ + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \cancel{\frac{1}{4}} \geq \left(m_+ + \frac{1}{2}\right)^2 - \cancel{\frac{1}{4}}$$

$$\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(m_+ + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$l \geq m_+$$

پس برای m -های مثبت داریم:

$$l(l+1) \geq m_-^2 - m_-$$

$$l^2 + l \geq m_-^2 - m_-$$

$$l^2 + l + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \geq m_-^2 - m_- + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \cancel{\frac{1}{4}} \geq \left(m_- - \frac{1}{2}\right)^2 - \cancel{\frac{1}{4}}$$

$$l + \frac{1}{2} \geq -\left(m_- - \frac{1}{2}\right)$$

$$-l \leq m_-$$

پس برای $-m$ های منفی داریم:

$$l \geq m_+$$

$$-l \leq m_-$$

$$-l \leq m \leq l$$

اگر مینیمم m را با $m_{\min}$ نمایش دهیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$L_- Y_{lm_{\min}} = 0$$

$$L^2 = L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z$$

$$\hbar^2 l(l+1) = 0 + m_{\min}^2 \hbar^2 - m_{\min} \hbar^2$$

$$l(l+1) = m_{\min}^2 - m_{\min}$$

$$m_{\min} = -l$$

اگر ماکزیمم m را با $m_{\max}$ نمایش دهیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$L_+ Y_{lm_{\max}} = 0$$

$$L^2 = L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z$$

$$\hbar^2 l(l+1) = 0 + m_{\max}^2 \hbar^2 + m_{\max} \hbar^2$$

$$l(l+1) = m_{\max}^2 + m_{\max}$$

$$m_{\max} = l$$

حال چنین استدلال می کنیم که

چون مقدار ماکزیمم m ، یعنی $m_{\max}$ از $m_{\min}$ با گامهای یکی یکی به اندازه واحد قابل دستیابی است (با اعمال عملگر L_+) ما شکل زیر را خواهیم داشت:

الف) $2l+1$ باید عدد صحیح باشد

ب) m باید به صورت زیر باشد

$$m = -l, -l+1, -l+2, \dots, l-2, l-1, l \quad \text{or} \quad -l \leq m \leq l$$

از الف نتیجه می گیریم که:

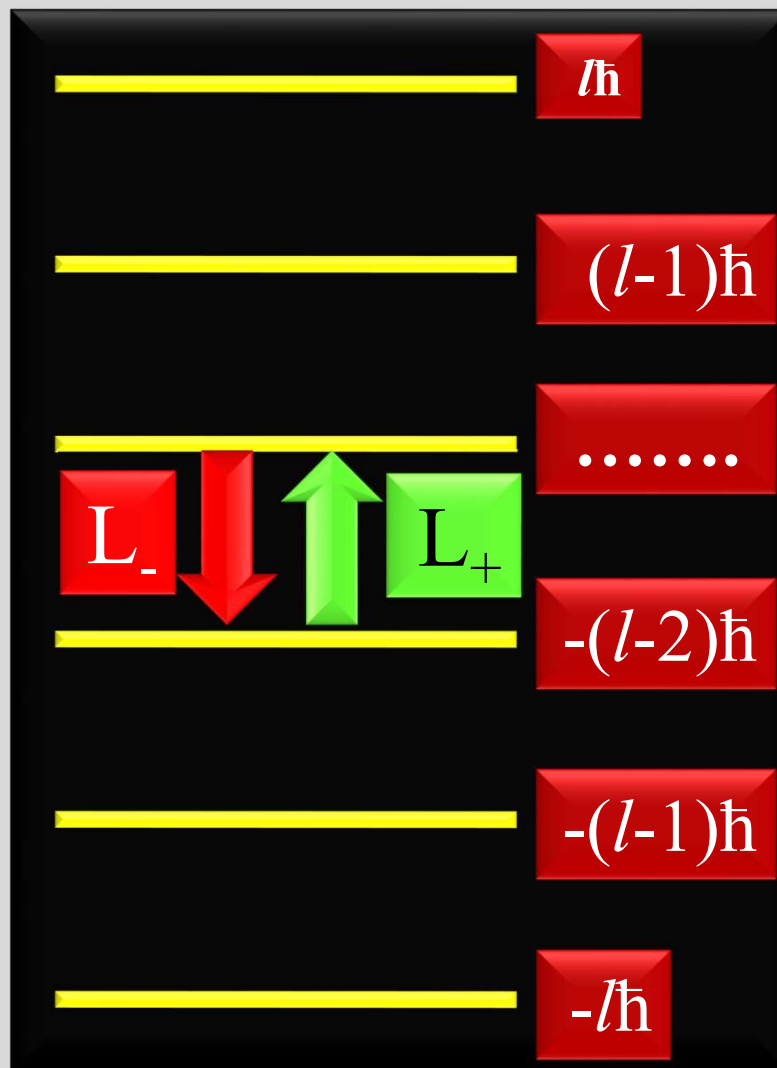
$$2l + 1 = \text{integer}$$

$$l = \frac{\text{integer}-1}{2} \geq 0$$

پس l هم می تواند صحیح و هم می تواند نیم صحیح باشد

لذا m نیز می تواند صحیح و نیم صحیح باشد.

اما ما در اینجا ما بحث خود را فقط به حالت صحیح معطوف می کنیم.



ما همچنین می توانیم ضرایب $C_{\pm}(l,m)$ را محاسبه کنیم:

$$L_{\pm} | Y_{lm} \rangle = C_{\pm}(lm) | Y_{l,m\pm 1} \rangle$$

$$\langle Y_{lm} | (L_{\pm})^{\dagger} = C_{\pm}^{*}(lm) \langle Y_{l,m\pm 1} |$$

$$\langle Y_{lm} | L_{\mp} = C_{\pm}^{*}(lm) \langle Y_{l,m\pm 1} |$$

$$\langle Y_{lm} | L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z | Y_{lm} \rangle = |C_{\pm}(lm)|^2 \langle Y_{l,m\pm 1} | Y_{l,m\pm 1} \rangle$$

$$\hbar^2 (l(l+1) - m^2 \mp m) = |C_{\pm}(lm)|^2$$

$$C_{\pm}(lm) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}$$

همان طور که در ابتدای فصل گفتیم هدف ما در این فصل به دست آوردن Y_{lm} یعنی ویژه توابع عملگرهای L^2 و L_z است.

الف) $2l+1$ باید عدد صحیح باشد

تا اینجا گفتیم که:

ب) m بین $-l$ و l است: $-l \leq m \leq l$

ج) l و m صحیح یا نیم صحیح اند

روشهای مختلفی برای به دست آوردن $-Y_{lm}$ ها وجود دارد.

1) یافتن معادله لژاندر با استفاده از روابط زیر و تفکیک متغیرهای زاویه ای و سپس بحث در مورد توابع خاص لژاندر، آن طور که در مباحث الکترودینامیک و ریاضی فیزیک آمده است:

$$-\frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2 = \frac{1}{r^2} \nabla_{\theta, \varphi}^2$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

(2) استفاده از عملگرهای بالا برنده، L_+ و پایین آورنده، L_- و بحث کوانتمی خالص

(3) نظریه گروه ها

روشهای (1) و (3) را بعداً در مقاطع بعدی خواهید دید، اما روش دوم هرگز تکرار نخواهد شد.

پس در اینجا به روش دوم خواهیم پرداخت، اما روش اول را نیز برای مشابهت دادن با روش نوسانگر هماهنگ و رسیدن به توابع لژاندر برای دانشجوی علاقه مند خلاصه می کنیم:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$= \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_{\theta, \varphi}^2$$

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

$$\nabla_{\theta, \varphi}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1) \hbar^2 Y_{lm}$$

$$-\frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2 = \frac{1}{r^2} \nabla_{\theta, \varphi}^2$$

$$L^2 = -\hbar^2 \nabla_{\theta, \varphi}^2$$

$$\cancel{\hbar^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm} = l(l+1) \cancel{\hbar^2} Y_{lm}$$

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm}$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi)$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Theta_{lm}(\theta) \exp(im\varphi)$$

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Theta_{lm}(\theta) \exp(im\varphi) = -l(l+1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Theta_{lm}(\theta) \exp(im\varphi)$$

$$\exp(im\varphi) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Theta_{lm}(\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} (-m^2) \exp(im\varphi) \Theta_{lm}(\theta) = -l(l+1) \Theta_{lm}(\theta) \exp(im\varphi)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Theta_{lm}(\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} (-m^2) \Theta_{lm}(\theta) = -l(l+1) \Theta_{lm}(\theta)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Theta_{lm}(\theta) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta_{lm}(\theta) = 0$$

که به این معادله معادله ژاندر
گویند.

مرسوم است که $\Theta_{lm}(\theta)$ را با نمایش $P_{lm}(\theta)$ می دهند.

تمرین: اگر $x = \cos\theta$ آنگاه

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_{lm}(x) - 2x \frac{d}{dx} P_{lm}(x) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P_{lm}(x) = 0$$

تمرین: با مراجعه به کتاب ریاضی فیزیک آرفکن تابع مولد تابع خاص لژاندر را بیابید و به کمک آن همچون حل معادله هرمیت در بحث نوسانگر که به طور مفصل در کلاس انجام شد عمل کرده و معادله لژاندر را حل کنید.

بسیار خوب برمی گردیم به روش عملگری برای محاسبه
هماهنگهای کروی

روش فوق در قیاس شبیه به همان روش عملگری است که قبلا در محاسبه توابع موج نوسانگر
هماهنگ با معرفی عملگرهای خلق و نابودی در مقابل روش مستقیم حل معادله دیفرانسیل بکار
بردیم.

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m(\varphi)$$

$$L_+ Y_{lm_{\max}} = 0$$

$$m_{\max} = l$$

$$\Phi_{m_{\max}}(\varphi) = \Phi_l(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(il\varphi)$$

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\cancel{\hbar e^{i\varphi}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \exp(il\varphi) \Theta_{ll}(\theta) = 0$$

$$e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \exp(il\varphi) \Theta_{ll}(\theta) = 0$$

$$e^{i(l+1)\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - l \cot \theta \right) \Theta_{ll}(\theta) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - l \cot \theta \right) \Theta_{ll}(\theta) = 0$$

$$\ln \Theta_{ll}(\theta) = l \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$\frac{\partial \Theta_{ll}(\theta)}{\partial \theta} = l \cot \theta \Theta_{ll}(\theta)$$

$$\ln \Theta_{ll}(\theta) = l \ln \sin \theta = \ln \sin^l \theta$$

$$\Theta_{ll}(\theta) = C_l \sin^l \theta$$

ضریب بهنجارش

$$\frac{d\Theta_{ll}(\theta)}{\Theta_{ll}(\theta)} = l \cot \theta d\theta$$

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = C_l \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

برای محاسبه ضریب بهنجارش به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\int Y_{ll}^*(\theta, \varphi) Y_{ll}(\theta, \varphi) d\Omega = 1$$

$$\int Y_{ll}^*(\theta, \varphi) Y_{ll}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 1$$

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = C_l \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

$$\int |C_l|^2 \sin^{2l+1} \theta d\theta d\varphi = 1$$

$$2\pi |C_l|^2 \int \sin^{2l+1} \theta d\theta = 1$$

تابع بتا

تمرین: با مراجعه به کتاب آرفکن تابع بتا را مطالعه و آن را خلاصه نویسی کنید.

$$I = \int \sin^{2l+1} \theta d\theta$$

$$I = \int \sin^{2l} \theta \sin \theta d\theta$$

$$I = \int (1 - \cos^2 \theta)^l \sin \theta d\theta$$

$$I = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta)^l \sin \theta d\theta$$

$$\cos \theta = X \quad \sin \theta d\theta = -dX$$

$$I = \int_{-1}^1 (1 - X^2)^l dX$$

$$I = \int_{-1}^1 (1 - X)^l (1 + X)^l dX$$

$$(1 + X)^l = u$$

$$du = l(1 + X)^{l-1} dX$$

$$(1 - X)^l dX = dv$$

$$v = \frac{-(1 - X)^{l+1}}{l + 1}$$

$$I = \frac{l}{l + 1} \int_{-1}^1 (1 - X)^{l+1} (1 + X)^{l-1} dX$$

با یک بار انتگرال گیری جزء به جزء انتگرال بتا
به صورت زیر تبدیل شد:

$$I = \int_{-1}^1 (1 - X)^l (1 + X)^l dX$$

$$I = \frac{l}{l+1} \int_{-1}^1 (1 - X)^{l+1} (1 + X)^{l-1} dX$$

انتگرال گیری جزء به جزء برای بار
دوم:

$$I = \frac{l}{l+1} \frac{l-1}{l+2} \int_{-1}^1 (1 - X)^{l+2} (1 + X)^{l-2} dX$$

پس از l بار جزء به
جزء

$$I = \frac{l}{l+1} \frac{l-1}{l+2} \frac{l-2}{l+3} \dots \frac{l-(l-1)}{2l} \int_{-1}^1 (1 - X)^{2l} (1 + X)^{l-l} dX$$

$$\int_{-1}^1 (1 - X)^{2l} dX = - \frac{(1 - X)^{2l+1}}{2l+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{2^{2l+1}}{2l+1}$$

1

$$I = \frac{l}{l+1} \frac{l-1}{l+2} \frac{l-2}{l+3} \cdots \frac{l-(l-1)}{2l} \frac{2^{2l+1}}{2l+1}$$

1

$$I = \frac{l(l-1)(l-2)\cdots 3 \times 2 \times 1}{(l+1)(l+2)(l+3)\cdots (2l)(2l+1)} 2^{2l+1}$$

$$I = \frac{l!}{\frac{(2l+1)!}{l!}} 2^{2l+1}$$

$$I = \frac{l!l!}{(2l+1)!} 2^{2l+1}$$

$$2\pi |C_l|^2 \int \sin^{2l+1} \theta d\theta = 1$$

$$2\pi |C_l|^2 \frac{(l!)^2}{(2l+1)!} 2^{2l+1} = 1$$

$$I = \int \sin^{2l+1} \theta d\theta$$

$$2\pi |C_l|^2 I = 1$$

$$2\pi |C_l|^2 \frac{(l!)^2}{(2l+1)!} 2^{2l} \times 2 = 1$$

$$4\pi |C_l|^2 \frac{(l!)^2}{(2l+1)!} 2^{2l} = 1$$

$$|C_l|^2 = \frac{(2l+1)!}{4\pi} \left(\frac{1}{2^l l!} \right)^2$$

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = C_l \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{1}{2^l l!} \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

حال با استفاده از این رابطه و عملگر پایین آورنده به محاسبه کلی هارمونیکهای
کروی می پردازیم:

$$L_- Y_{lm} = C_-(l, m) Y_{l, m-1}$$

$$L_- Y_{ll} = C_-(l, l) Y_{l, l-1}$$

$$(L_-)^2 Y_{ll} = C_-(l, l) C_-(l, l-1) Y_{l, l-2}$$

.....

.....

$m + 1$

m

$$(L_-)^{l-m} Y_{ll} = C_-(l, l) C_-(l, l-1) \dots C_-(l, l - (m - 1)) Y_{l, l-(m-1)}$$

$$(L_-)^{l-m} Y_{ll} = C_-(l, l) C_-(l, l-1) \dots C_-(l, m+1) Y_{l, m}$$

$$Y_{l, m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{C_-(l, l) C_-(l, l-1) \dots C_-(l, m+1)} (L_-)^{l-m} Y_{ll}(\theta, \varphi)$$

$$C_{-}(l, m) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}$$

$$C_{-}(l, l) = \hbar \sqrt{l(l+1) - l(l-1)} = \hbar \sqrt{1 \times 2l}$$

$$C_{-}(l, l-1) = \hbar \sqrt{l(l+1) - (l-1)(l-2)} = \hbar \sqrt{2 \times (2l-1)}$$

.....

$$C_{-}(l, m+1) = \hbar \sqrt{l(l+1) - (m+1)(m)}$$

$$= \hbar \sqrt{l^2 + l - m^2 - m} = \hbar \sqrt{l^2 - m^2 + l - m}$$

$$= \hbar \sqrt{(l-m)(l+m) + l - m} = \hbar \sqrt{(l-m)(l+m+1)}$$

$$C_{-}(l, l) = \hbar \sqrt{1 \times 2l}$$

$$C_{-}(l, l-1) = \hbar \sqrt{2 \times (2l-1)}$$

.....

$$C_{-}(l, m+1) = \hbar \sqrt{(l-m)(l+m+1)}$$

$$C_{-}(l, l)C_{-}(l, l-1)...C_{-}(l, m+1) =$$

$$= \hbar^{l-m} \sqrt{1 \times 2 \times 3 \dots (l-m)} \times \sqrt{\frac{2l(2l-1)\dots(l+m+1)(l+m)(l+m-1)\dots \times 3 \times 2 \times 1}{(l+m)(l+m-1)\dots \times 3 \times 2 \times 1}}$$

$$= \hbar^{l-m} \sqrt{(l-m)!} \times \sqrt{\frac{(2l)!}{(l+m)!}}$$

$$C_{-}(l,l)C_{-}(l,l-1)...C_{-}(l,m+1) = \hbar^{l-m} \sqrt{\frac{(l-m)!(2l)!}{(l+m)!}}$$

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{C_{-}(l,l)C_{-}(l,l-1)...C_{-}(l,m+1)} (L_{-})^{l-m} Y_{ll}(\theta, \varphi)$$

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\hbar^{l-m}} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}} (L_{-})^{l-m} Y_{ll}(\theta, \varphi)$$

$$L_{-} = \hbar e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\tilde{L}_{-} = \frac{L_{-}}{\hbar} = e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\cancel{\hbar^{l-m}}} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}} \cancel{\hbar^{l-m}} e^{-i(l-m)\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^{l-m} Y_{ll}(\theta, \varphi)$$

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{1}{2^l l!} \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}} e^{-i(l-m)\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^{l-m} \\ \times \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{1}{2^l l!} \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{1}{2^l l!} (\tilde{L}_-)^{l-m} \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} \frac{1}{2^l l!} (\tilde{L}_-)^{l-m} \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

پس حالا باید این عبارت را حساب کنیم.

ابتدا اثر L_- را روی $\sin^l \theta$ مطالعه می کنیم و سپس توانهای بالاتر عملگر پایین آورنده را مطالعه می کنیم تا بتوانیم اثر توان $l-m$ عملگر پایین آورنده را روی آن حدس بزنیم:

$$\tilde{L}_- (\sin^l \theta \exp(il\varphi)) = e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

$$= -e^{i(l-1)\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + l \cot \theta \right) \sin^l \theta$$

اتحاد زیر را در نظر بگیرید:

این اتحاد به ازای هر $f(\theta)$ دلخواه برقرار است، زیرا:

$$\left(\frac{d}{d\theta} + l \cot \theta \right) f(\theta) = \frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} [\sin^l \theta f(\theta)]$$

از طرف راست شروع می کنیم و آن را ساده می کنیم و نشان می دهیم که با سمت چپ مساوی است.

$$\frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} [\sin^l \theta f(\theta)]$$

$$= \frac{1}{\sin^l \theta} \left[l \cos \theta \sin^{l-1} \theta f(\theta) + \sin^l \theta \frac{df(\theta)}{d\theta} \right]$$

$$= \left[l \cot \theta f(\theta) + \frac{df(\theta)}{d\theta} \right]$$

$$= \left(\frac{d}{d\theta} + l \cot \theta \right) f(\theta)$$

$$\left(\frac{d}{d\theta} + l \cot \theta \right) f(\theta) = \frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} [\sin^l \theta f(\theta)]$$

بنابراین با استفاده از اتحاد فوق می توان اثر توان اول عملگر پایین آورنده را به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

$$= -e^{i(l-1)\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + l \cot \theta \right) \sin^l \theta$$

$$= -e^{i(l-1)\varphi} \frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin^{2l} \theta)$$

$$(\tilde{L}_-)^2 \sin^l \theta \exp(il\varphi) = \tilde{L}_- (\tilde{L}_- \sin^l \theta \exp(il\varphi))$$

$$e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[-e^{i(l-1)\varphi} \frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin^{2l} \theta) \right]$$

$$= -e^{i(l-2)\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + (l-1) \cot \theta \right) \left[-\frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^{2l} \theta \right]$$

$$= (-1)^2 e^{i(l-2)\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + (l-1) \cot \theta \right) \left[\frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^{2l} \theta \right]$$

توجه
شود

f(θ) -ی جدید

$$= (-1)^2 e^{i(l-2)\varphi} \left[\frac{1}{\sin^{l-1} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^{l-1} \theta \frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^{2l} \theta \right) \right]$$

$$(\tilde{L}_-)^3 \sin^l \theta \exp(il\varphi) = \tilde{L}_- \left(\tilde{L}_-^2 \sin^l \theta \exp(il\varphi) \right)$$

$$= \tilde{L}_- \left\{ (-1)^2 e^{i(l-2)\varphi} \left[\frac{1}{\sin^{l-1} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^{l-1} \theta \frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^{2l} \theta \right) \right] \right\}$$

$$= e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left\{ (-1)^2 e^{i(l-2)\varphi} \left[\frac{1}{\sin^{l-1} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^{l-1} \theta \frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^{2l} \theta \right) \right] \right\}$$

$$= (-1)^3 e^{i(l-3)\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + (l-2) \cot \theta \right) \left[\frac{1}{\sin^{l-1} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^{l-1} \theta \frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^{2l} \theta \right) \right]$$

توجه
شود

f(θ)-یی دیگر

$$= (-1)^3 e^{i(l-3)\varphi} \left[\frac{1}{\sin^{l-2} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^{l-2} \theta \frac{1}{\sin^{l-1} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^{l-1} \theta \frac{1}{\sin^l \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^{2l} \theta \right) \right) \right]$$

$$= (-1)^3 \frac{e^{i(l-3)\varphi}}{\sin^{l-2} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^{2l} \theta \right) \right)$$

حالا دیگر می توانیم $(L_-)^{l-m}$ را حدس بزنیم، اما قبل از حدس زدن بهتر است آن را ساده تر کنیم.

که برای این منظور از تغییر متغیرهای زیر استفاده می کنیم.

$$\cos \theta = u$$



$$-\sin \theta d\theta = du$$



$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{df}{du} \frac{du}{d\theta} = -\sin \theta \frac{df}{du}$$



$$\frac{df}{du} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{df(\theta)}{d\theta}$$

$$\left(\tilde{L}_-\right)^3 \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

$$= (-1)^3 \frac{e^{i(l-3)\varphi}}{\sin^{l-2} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin^{2l} \theta \right) \right)$$

$$= (-1)^3 \frac{e^{i(l-3)\varphi}}{\sin^{l-2} \theta} \left(-\sin \theta \frac{d}{du} \left(-\frac{d}{du} \left(-\frac{d}{du} (1-u^2)^l \right) \right) \right)$$

$$= (-1)^3 \frac{e^{i(l-3)\varphi}}{\sin^{l-3} \theta} (-1)^3 \frac{d^3}{du^3} (1-u^2)^l$$

$$= \frac{1}{\sin^{l-3} \theta} \left[\frac{d^3}{du^3} (1-u^2)^l \right] e^{i(l-3)\varphi}$$

$$\left(\tilde{L}_-\right)^3 \sin^l \theta \exp(il\varphi) = \frac{1}{\sin^{l-3} \theta} \left[\frac{d^3}{du^3} \left(1 - u^2\right)^l \right] e^{i(l-3)\varphi}$$

$$\left(\tilde{L}_-\right)^{l-m} \sin^l \theta \exp(il\varphi) = \frac{1}{\sin^m \theta} \left[\frac{d^{l-m}}{du^{l-m}} \left(1 - u^2\right)^l \right] e^{im\varphi}$$

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{1}{2^l l!} \left(L_-\right)^{l-m} \sin^l \theta \exp(il\varphi)$$

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{1}{2^l l!} \frac{1}{\sin^m \theta} \left[\frac{d^{l-m}}{du^{l-m}} \left(1 - u^2\right)^l \right] e^{im\varphi}$$

از طرفی تابع لژاندر به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_l^m(u) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(1-u^2)^{-m/2}}{2^l l!} \left(\frac{d}{du} \right)^{l-m} (1-u^2)^l$$

پس می توان هارمونیکهای کروی را بر حسب توابع لژاندر به صورت زیر می توان نوشت:

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \frac{1}{2^l l!} \frac{1}{\sin^m \theta} \left[\frac{d^{l-m}}{du^{l-m}} (1-u^2)^l \right] e^{im\varphi} \\ &= (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \end{aligned}$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \varphi)$$

تمرین:

$$P_l^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta)$$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{22} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta \exp(2i\varphi)$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \exp(i\varphi)$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta \exp(i\varphi)$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{15}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$|Y_0^0(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_1^0(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_1^1(\theta, \phi)|^2$$



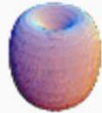
$$|Y_2^0(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_2^1(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_2^2(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_3^0(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_3^1(\theta, \phi)|^2$$



$$|Y_3^2(\theta, \phi)|^2$$



$$\text{Re}[Y_l^m(\theta, \phi)]^2$$



$$\text{Re}[Y_l^m(\theta, \phi)]\text{Re}[Y_l^m(\theta, \phi)]^2$$



$$\text{Re}[Y_l^m(\theta, \phi)]\text{Re}[Y_l^m(\theta, \phi)]\text{Re}[Y_l^m(\theta, \phi)]^2$$



$$\text{Re}[Y_l^m(\theta, \phi)]\text{Re}[Y_l^m(\theta, \phi)]\text{Re}[Y_l^m(\theta, \phi)]\text{Re}[Y_l^m(\theta, \phi)]^2$$



$$\text{Im}[Y_l^m(\theta, \phi)]^2$$



$$\text{Im}[Y_l^m(\theta, \phi)]^2\text{Im}[Y_l^m(\theta, \phi)]^2$$



$$\text{Im}[Y_l^m(\theta, \phi)]^2\text{Im}[Y_l^m(\theta, \phi)]^2\text{Im}[Y_l^m(\theta, \phi)]^2$$



$$|Y_3^3(\theta, \phi)|^2$$

