

Chapter Thirteen

برهمکنش الکترونها با میدان مغناطیسی

Interaction of Electrons with magnetic field

در فصل 12، برهمکنش یک الکترون با میدان کولمبی استاتیک ناشی از یک بار نقطه ای مورد بحث قرار گرفت.

برای تعمیم این به برهمکنش با میدان مغناطیسی یا الکتریکی ما ابتدا باید نظریه کلاسیکی را مرور کنیم.

معادلات ماکسول در واحد کوسی در حلاء به صورت زیر اند:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$$

که در آنها $\rho(\mathbf{r}, t)$ و $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ چگالیهای بار و جریانی هستند که چشمه های منابع تولید میدانهای الکترومغناطیسی $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ و $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ هستند.

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

به طور خودکار ارضای می شود، زیرا.

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

قانون یا معادله بقا بار (معادله پیوستگی):

$$\vec{\nabla} \cdot 4 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

$$4\pi\rho$$

می‌توانیم دو معادله اول را با بیان میدانها بر حسب یک پتانسیل اسکالر $\Phi(\mathbf{r}, t)$ و یک پتانسیل برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ برآورده سازیم:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) = 0$$

بنابراین

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \mathbf{F}) = 0$$

زیرا:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

بنابراین

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t)] = 0$$

زیرا:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t)]$$

$\nearrow \mathbf{B}$
 $\nearrow 0$

خلاصه این که با گرفتن دیورژانس از معادله چهارم ماکسول و استفاده از معادله سوم ماکسول به معادله پیوستگی می‌رسیم. پس معادله پیوستگی به طور خودکار از معادلات سوم و چهارم برآورده می‌شود.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

با تعریف پتانسیلهای برداری و اسکالر به صورت زیر:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t)$$

و گرفتن دیورژانس از اولی و کرل از دومی معادلات اول و دوم ماکسول ارضاء می‌شوند.

یعنی معادلات سوم و چهارم ماکسول معادله پیوستگی و معادلات اول و دوم ماکسول سبب تعریف پتانسیلهای برداری و اسکالر می‌شوند.

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی پتانسیلهای اسکالر و برداری را به طور منحصر به فردی تعیین نمی کنند.

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \vec{\nabla} f(\mathbf{r}, t)$$

مثلا از تعریف پتانسیلهای جدیدی به صورت زیر:

$$\Phi'(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

نیز به راحتی دیده می شود که همان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را (همانند آنچه که پتانسیلهای برداری و اسکالر قدیمی انجام می دادند) به دست می دهند.

$$(\mathbf{A} \quad \Phi) \xrightarrow{\text{gauge transformation}} (\mathbf{A}' \quad \Phi')$$

تبدیل از مجموعه پتانسیلهای قدیم به پتانسیلهای جدید را یک تبدیل پیمانه ای نامند:

یعنی ناوردانی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی اجازه می دهد تا بتوانیم تابع اختیاری f را به بهترین وجه انتخاب کنیم.

زوج معادلات وابسته به هشتم (معادلات سه و چهار) را اکنون می توان به صورت زیر نوشت:

$$-\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

زیرا:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \right) = -\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) = 4\pi\rho$$

Ok

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \right] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Phi = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A})$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

Ok

اگر توزیع بار استاتیکی باشد یعنی چگالی بار مستقل از زمان باشد مناسب است که پیمانه طوری انتخاب شود که:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$$

این پیمانه کولمب نام دارد و در واقع یک نوع انتخاب تابع اختیاری f می باشد.

$$-\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$$

در این صورت داریم:

$$-\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, \cancel{t}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$$

چون طرف راست مستقل از زمان است پس طرف چپ هم باید مستقل از زمان باشد.

$$-\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$$

یعنی پتانسیل اسکالر نیز مستقل از زمان می شود.

با استفاده از نکته آخر می توان معادله پتانسیل برداری را نیز در پیمانه کولمب ساده کرد:

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \nabla \left(\cancel{\nabla \cdot \mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \overset{0}{=} \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

که این چیزی جزء یک معادله موج کلاسیک در حضور یک چشمه جریان نیست.

اگر توزیع بار استاتیک نباشد یعنی چگالی بار وابسته به زمان باشد، از پیمانه ای به نام پیمانه لورنتس استفاده می کنیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

این پیمانه سبب می شود که معادله پتانسیل برداری بدون تغییر باقی بماند، اما اکنون معادله پتانسیل اسکالاری هم (مانند پتانسیل برداری) از معادله موج پیروی می کند.

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left(\cancel{\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \overset{0}{=} \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

بنابراین پیمانه لورنتس سبب می شود که پتانسیل برداری در معادله موج صدق کند:

که همان معادله سابق موج کلاسیکی پتانسیل
بردارى در پايانه کولمب است.

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

$$-\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$-\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$-\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t)$$

پس پتانسیل اسکالارى هم همچون پتانسیل بردارى در معادله موج کلاسیک صدق می کند.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A})$$

نکته تلنگی مهم این است که رابطه زیر:

که در دست آوردن معادله موج کلاسیک حاکم بر تانسیل برداری در پیمانه کولمب از آن استفاده کردیم فقط در دستگاه مختصات کارتریزی دارای اعتبار است (زیرا مثلاً در دستگاه کروی بردارهای یک‌نیز متغیر هستند و از آنها نباید مشتق‌گیری به عمل آید).

بنابراین باید لاپلاسی تانسیل برداری در معادله موج مربوطه بر حسب محصه‌های کارتریزی محاسبه شود تا هر آنچه که تاکنون گفته‌ایم صادق باقی بماند.

معادله توصیف‌کننده برهمکنش یک الکترون نقطه‌ای به جرم μ با یک میدان الکترومغناطیسی عبارت از معادله نیروی لورنتس کلاسیکی است:

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]$$

$$e < 0$$

$$H_0 = \frac{P^2}{2\mu} + e\Phi(\mathbf{r})$$

حال بیان می کنیم که معادله حرکت کلاسیکی فوق به دست خواهد آمد اگر هامیلتونی کلاسیکی برای یک الکترون در غیاب میدانهای الکترومغناطیسی، یعنی:

$$\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

با تغییر متغیر زیر تغییر یابد:

و پتانسیل $e\Phi$ (که در اینجا فقط به پتانسیلهای اسکالر استاتیک علاقه مند هستیم) به آن اضافه شود، به طوری که:

$$H = \frac{1}{2\mu} \left[\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + e\Phi(\mathbf{r})$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x}$$

تمرین: ثابت کنید که از هامیلتونی فوق می توان معادله حرکت کلاسیک بیان شده در بالا را به دست آورد. (راهنمایی: از معادلات حرکت هامیلتون استفاده کنید.)

معادله شرودینگر تناظر با بردن پتانسیل استاتیکی به سمت راست به صورت زیر می شود:

$$\frac{1}{2\mu} \left[\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 \Psi(\mathbf{r}, t) = (E + e\Phi(\mathbf{r})) \Psi(\mathbf{r}, t)$$

طرف چپ عبارت است از:

$$\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \left[\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi - \frac{ie\hbar}{2\mu c} \mathbf{A} \cdot \vec{\nabla} \Psi - \frac{ie\hbar}{2\mu c} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) \overset{0}{\cancel{\Psi}} + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 \Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi - \frac{ie\hbar}{2\mu c} \mathbf{A} \cdot \vec{\nabla} \Psi + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 \Psi$$

$$\mathbf{A} = -1/2 \mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

برای یک میدان مغناطیسی، $\mathbf{B}$ ، یکنواخت می توان بردار $\mathbf{A}$ را به صورت زیر در نظر گرفت:

دقت شود که انتخاب فوق یک انتخاب منحصر به فرد نیست، چون اگر ∇f هم به $\mathbf{A}$ اضافه شود باز هم $\nabla \times \mathbf{A}$ میدان $\mathbf{B}$ را به دست خواهد داد. اما به هر حال انتخاب فوق یک انتخاب مناسب است.

می توان درستی انتخاب فوق را به صورت زیر تحقیق کرد:

$$\mathbf{A} = -1/2 \begin{pmatrix} yB_z - zB_y & zB_x - xB_z & xB_y - yB_x \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 B_x + 1/2 B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

بنابراین جمله دوم در هامیلتونی به دست آمده تبدیل می شود به:

$$-\frac{ie\hbar}{2\mu c} \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi = \frac{ie\hbar}{4\mu c} \mathbf{r} \times \mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = -\frac{ie\hbar}{4\mu c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \times \nabla \Psi$$

زیرا

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{B} \cdot \nabla &= r_i B_j \varepsilon_{ijk} \partial_k = B_j r_i \partial_k \varepsilon_{ijk} \\ &= -B_j r_i \partial_k \varepsilon_{ikj} = -B_j (\mathbf{r} \times \nabla)_j = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \times \nabla\end{aligned}$$

$$-\frac{i e \hbar}{2 \mu c} \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi = -\frac{i e \hbar}{4 \mu c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \times \nabla \Psi = \frac{e}{4 \mu c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \times \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \Psi$$

پس

L

P

$$-\frac{i e \hbar}{2 \mu c} \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi = \frac{e}{4 \mu c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \Psi$$

و جمله سوم نیز به صورت زیر قابل ساده شدن می باشد:

$$\frac{e^2}{2 \mu c^2} A^2 \Psi = \frac{e^2}{8 \mu c^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{B})^2 \Psi$$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{B})^2 = (\mathbf{r} \times \mathbf{B})_k (\mathbf{r} \times \mathbf{B})_k$$

$$= r_i B_j \varepsilon_{ijk} r_l B_m \varepsilon_{lmk}$$

$$= r_i B_j r_l B_m \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk}$$

$$= r_i B_j r_l B_m (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl})$$

$$= r_i r_i B_j B_j - r_i B_j r_j B_i$$

$$= r^2 B^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})^2 \quad \text{if } \mathbf{B} = B \hat{\mathbf{k}}$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2) B^2 - (zB)^2$$

$$= (x^2 + y^2) B^2$$

$$\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 \Psi$$

$$= \frac{e^2}{8\mu c^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{B})^2 \Psi$$

$$= \frac{e^2 B^2}{8\mu c^2} (x^2 + y^2) \Psi$$

که این جمله سوم ساده شده شبیه یک پتانسیل
نوساگر هارمونیک دوبعدی است.

پس کل هامیلتونی را می توان به صورت زیر
نوشت:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{eB}{4\mu c}L_z + \frac{e^2 B^2}{8\mu c^2}(x^2 + y^2) + e\Phi(\mathbf{r})$$

باید اندازه های این دو جمله (حالات دوم و سوم) را به هم مقایسه کنیم:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

$$a_0 = \frac{\hbar}{\mu c \alpha}$$

این نسبت با در نظر گرفتن مرتبه $\hbar$ برای $\langle L_z \rangle$ و مرتبه a_0^2 برای $\langle x^2 + y^2 \rangle$ به صوت زیر مقایسه می شود:

$$\frac{\frac{e^2}{8\mu c^2} a_0^2 B^2}{\frac{e}{4\mu c} \hbar B}$$

$$\approx \frac{1}{2} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{B}{\frac{e}{a_0^2}}$$

$$\approx \frac{1}{274} \frac{B}{\frac{e}{a_0^2}}$$

$$\approx \frac{B}{274 \left(\frac{4.8 \times 10^{-10}}{(0.5 \times 10^{-8})^2} \right)}$$

$$\approx \frac{B}{5 \times 10^9 \text{ gauss}}$$

بنابراین در دستگاه های اتمی با میدانهای قابل دسترس در آزمایشگاه یعنی میدانهایی از مرتبه $B \leq 10^4 \text{ gauss}$ جمله درجه دوم قطعا قابل صرف نظر کردن است.

جمله مرتبه اول یا خطی نسبت به B در قیاس با انرژی پتانسیل کولمبی می تواند به روش مشابهی تخمین زده شود.

$$\frac{\left(\frac{e}{4\mu c}\right)\hbar B}{\frac{e^2}{a_0}}$$

$$\approx \frac{\hbar}{4\mu c} \frac{B}{\frac{e}{a_0}}$$

$$= \frac{\hbar}{4\mu c a_0} B = \frac{e}{a_0^2} B$$

$$= \frac{\alpha}{4} \frac{B}{\frac{e}{a_0^2}}$$

$$\approx \frac{1}{548} \frac{B}{\frac{e}{a_0^2}}$$

$$\approx \frac{B}{10 \times 10^9 \text{ gauss}}$$

بنابراین جمله خطی فقط می تواند ترازهای انرژی را خیلی کم مختل کند.

نکته: جمله درجه دوم می تواند تحت دو شرط زیر خیلی مهم باشد:

(1) اگر میدان مغناطیسی خیلی شدید باشد. اعتقاد بر این است که میدانهایی به بزرگی 10^{12} gauss می تواند یا ممکن است روی سطح ستاره های نوترونی وجود داشته باشد، و می تواند چنین میدانهایی ساختار اتمها را تغییر دهد. [PRL25, 467 (1970)]

(2) وقتی که حرکت ماکروسکوپی یک الکترون در یک میدان خارجی در نظر گرفته می شود. یعنی وقتی که x^2+y^2 بزرگ باشد.

بیایید فقط جمله خطی را به تنهایی در نظر بگیریم و جهت z را منطبق بر B فرض کنیم.

$$H_1 = \frac{eB}{4\mu c} L_z \Psi$$

انگاه هامیلتونی نسبت به حالت $B=0$ با جمله زیر مختل می شود:

$$\frac{eB}{2\mu c} = \omega_L$$

اگر فرکانسی را که فرکانس لارمور نامیده می شود تعریف کنیم:

و با ویژه توابع انرژی ای که ویژه حالت های همزمان L^2 و L_z هستند، آنگاه هامیلتونی اختلالی وقتی که روی یک ویژه حالت اثر می کند، عددی مانند زیر را به دست می دهد:

$$H_1 u_{n/m}(\mathbf{r}) = \frac{eB}{4\mu c} L_z u_{n/m}(\mathbf{r}) = 1/2 \hbar \omega_L m u_{n/m}(\mathbf{r})$$

که در آن m ویژه مقدار مولفه z اندازه حرکت زاویه ای با $-l \leq m \leq l$ است.

بنابراین ترازهای انرژی موجود با $2l+1$ مرتبه تبهگنیشان شکافته می شود به $2l+1$ مولفه که به طور مساوی از یکدیگر فاصله دارند با انرژی که با رابطه زیر داده می شود:

$$E = -\frac{1}{2} \mu c^2 \left(\frac{Z\alpha}{n} \right)^2 + \frac{1}{2} m \hbar \omega_L$$

اندازه شکافکتی برابر است با:

$$\frac{eB\hbar}{4\mu c} = \frac{e\hbar}{4\mu c} \left(\frac{B}{\frac{e}{a_0^2}} \right) \frac{e}{a_0^2}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

$$a_0 = \frac{\hbar}{\mu c \alpha}$$

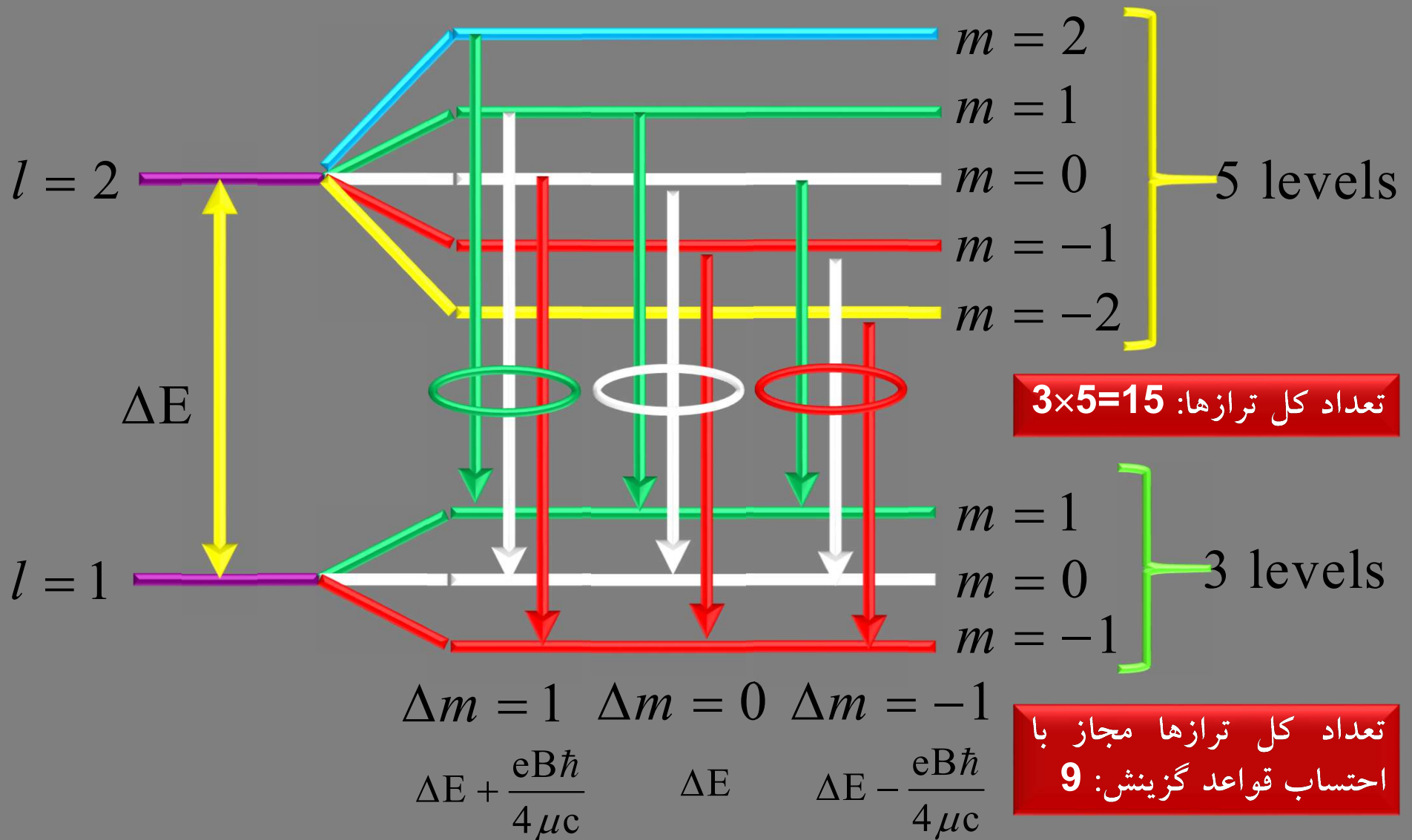
$$= \left(\frac{1}{2} \alpha^2 \mu c^2 \right) \alpha / 2 \frac{B}{e / a_0^2} = \frac{1}{2} \alpha^2 \mu c^2 \frac{B}{274e / a_0^2}$$

$$= 13.6 \frac{B}{5 \times 10^9}$$

چون قواعد انتخابی (که بعد توضیح داده خواهند شد) وجود دارند که بر اساس آنها فقط گذارهایی مجاز می باشند که در آنها مقدار m به اندازه صفر یا واحد تغییر کند:

$$\Delta m = 0 \quad \Delta m = \pm 1$$

بنابراین یک خط نمایش یک گذار با $B=0$ به سه خط شکافته می شود:



اثر بهنجار زیمن: از 15 گذار ممکن بین $l=1$ و $l=2$ که ناشی از شکافتگی میدان مغناطیسی است فقط 9 تای آنها متناظر با $\Delta m = -1, 0, 1$ به صورت خطوط سه تایی (به ازای هر Δm سه خط) روی می دهد.

اگر اسپین الکترون در یک اتم صفر نباشد آنگاه طرح شکافتگی ترازها آنچه که در شکل قبل نشان داده شد متفاوت خواهد شد که به آن اثرنا بهنجار زیمن گویند. با این اثر پس از آن که اسپین را معرفی کردیم خواهیم پرداخت.

یکی از مسایل جالب توجه این است که به توصیف جواب یک الکترون در یک میدان مغناطیسی ثابت بپردازیم که در آن جمله دوم قابل صرف نظر کردن نباشد اما بتوان از پتانسیل کولمبی صرف نظر کرد.

تحت چنین شرایطی با انتخاب جهت Z به عنوان جهت میدان مغناطیسی معادله شرودینگر به صورت زیر نوشته می شود:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi + \frac{eB}{4\mu c} L_z \Psi + \frac{e^2 B^2}{8\mu c^2} (x^2 + y^2) \Psi = E \Psi$$

حضور پتانسیل x^2+y^2 استفاده از دستگاه مختصات استوانه ای را برای جداسازی متغیرها پیشنهاد می کند:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = u_m(\rho) e^{im\varphi} e^{ikz}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) e^{im\varphi} e^{ikz} + \frac{1}{\rho^2} (-m^2) u e^{im\varphi} e^{ikz} \right. \\ & \left. - k^2 u e^{im\varphi} e^{ikz} \right\} + \frac{eBm\hbar}{4\mu c} u e^{im\varphi} e^{ikz} + \frac{e^2 B^2}{8\mu c^2} \rho^2 u e^{im\varphi} e^{ikz} \\ & = E u e^{im\varphi} e^{ikz} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{m^2}{\rho^2} u + \frac{e^2 B^2}{4 \hbar^2 c^2} \rho^2 u + \left(\frac{2 \mu E}{\hbar^2} - \frac{e B m}{2 \hbar c} + k^2 \right) u = 0$$

نشان دهید که می‌توانیم معادله فوق را به شکل زیر بنویسیم:

$$x = \sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}} \rho$$

تمرین: با تغییر متغیر روبه‌رو:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{m^2}{x^2} u - x^2 u + \lambda u = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \mu c}{e B \hbar} \left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2 \mu} \right) - m$$

برای حل معادله دیفرانسیل فوق در اینجا ابتدا به بررسی حالت‌های حدی می‌پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda u(x) = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - x^2 u \approx 0$$

الف) رفتار تابع موج در بینهایت

$$u(x) \approx e^{-x^2/2}$$

$$\frac{d^2 (e^{-x^2/2})}{dx^2} = x^2 e^{-x^2/2} - e^{-x^2/2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2/2} = x^2 u(x)$$

ب) رفتار تابع موج در
حوالی مبدا

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^2 u}{dx^2} \& \frac{1}{x} \frac{du}{dx} \& \frac{m^2}{x^2} u \gg \lim_{x \rightarrow 0} \lambda u(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 u(x) = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{m^2}{x^2} u \approx 0$$

$$u(x) \approx x^{|m|}$$

$$u(x) = x^{|m|} e^{-x^2/2} G(x)$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

نشان دهید که می‌توانیم معادله دیفرانسیل را به
معادله دیفرانسیل لاکرت تبدیل کنیم:

$$y = x^2$$

تمرین: با تغییر متغیر روبه‌رو:

$$\frac{d^2 G}{dy^2} + \left(\frac{|m|+1}{y} - 1 \right) \frac{dG}{dy} + \frac{\lambda - 2 - 2|m|}{4y} G = 0$$

$$\frac{d^2 H}{d\rho^2} + \left(\frac{2l+2}{\rho} - 1 \right) \frac{dH}{d\rho} + \frac{\lambda - 1 - l}{\rho} H = 0$$

یادآوری: در اتم
هیدروژن داریم که:

$$G(y) = L_{\frac{1}{4}\lambda - \frac{1+|m|}{2}}^{|m|}(y)$$

پس اکنون باید بگوییم که:

$$H(\rho) = L_{\lambda-l-1}^{2l+1}(\rho)$$

و سپس می‌کسیم که:

تمرین: ویژه مقادیر انرژی را با استفاده از روش فصل قبل (اتم هیدروژن) به دست آورید یعنی:

$$G(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$



به دست آوردن معادله بازگشتی



قطع بسط با ازای $n=n_r$



یافتن ویژه مقادیر انرژی

$$\lambda = \frac{4\mu c}{eB\hbar} \left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \right) - 2m$$

$$\frac{\lambda}{4} - \frac{1+|m|}{2} = n_r; \quad n_r = 0, 1, 2, \dots$$

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \frac{eB\hbar}{2\mu c} (2n_r + 1 + |m| + m)$$

$$G(y) = L_{n_r}^{|m|}(y)$$

برای انجام این کار، ابتدا نظریه کلاسیک را مورد بررسی می‌کنیم:

حال حد کلاسیکی را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$H = \frac{1}{2\mu} \left[\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2$$

با میلتنونی بدون در نظر گرفتن پتانسیل اسکالر:

$$\left(v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z} \right)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\mu} \left(\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)$$

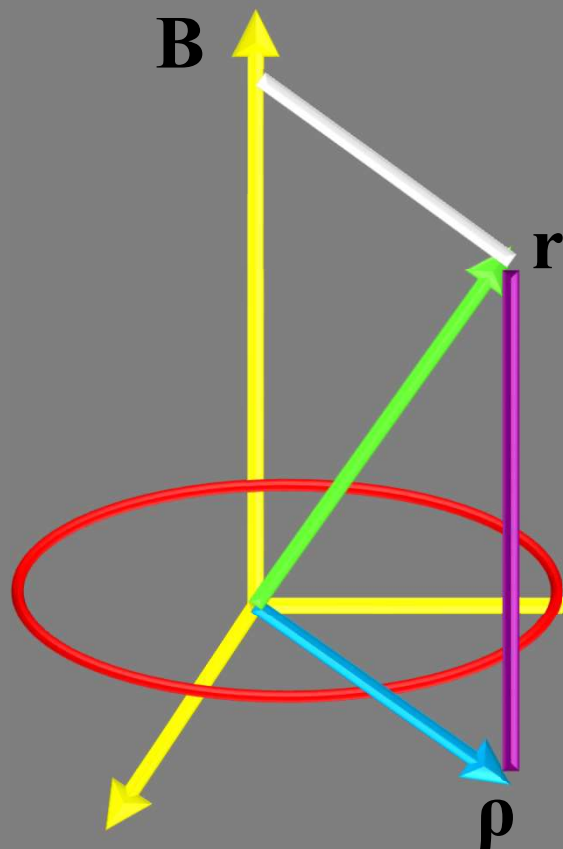
$$\mathbf{A} = -1/2 \mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

برای محاسبه کلاسیکی شعاع حرکت یک الکترون در یک میدان مغناطیسی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

که در آن ρ شعاع مدار حرکت کلاسیک الکترون است.

$$\mu \rho v = L_z + \frac{eB}{2c} \rho^2$$

ابتدا رابطه زیر را ثابت می‌کنیم:



$$\mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \frac{e}{c} \mathbf{r} \times \mathbf{A}$$

$$\mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \frac{e}{c} \mathbf{r} \times \left(-\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B} \right)$$

با استفاده از قاعده $\mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ ، $\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ جمله دوم طرف راست معادله فوق را می توان ساده کرد:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$\mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{L} - \frac{e}{2c} \left(\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - r^2 \mathbf{B} \right)$$

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{v} = v_{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + v_{\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + v_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{v})_z = \rho v_{\varphi} = \rho v$$

$$\mu (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_z = L_z + \frac{e}{2c} B (x^2 + y^2)$$

$$\mu \rho v = L_z + \frac{e}{2c} B \rho^2$$

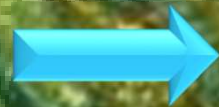


$$\mathbf{F} = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

عبارت نیروی وارد بر الکترون:

رابطه زیر برای حرکت دایره‌ای یک الکترون تحت نیروی جانب مرکز به دست می‌دهد:

$$\mu \frac{v^2}{\rho} = \frac{evB}{c}$$



$$\mu \frac{v}{\rho} = \frac{eB}{c}$$

$$v = \frac{eB}{\mu c} \rho$$

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \rho \frac{evB}{c}$$

$$= \frac{1}{2} \rho \frac{evB}{c} \times \frac{\rho}{\rho}$$

$$= \frac{e}{2c} B \rho^2 \frac{v}{\rho}$$

$$\mu \rho v = L_z + \frac{e}{2c} B \rho^2$$

$$= (\mu \rho v - L_z) \frac{v}{\rho}$$

$$\frac{1}{2} \mu v = \frac{L_z}{\rho}$$

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{L_z v}{\rho}$$

$$= \mu v^2 - \frac{L_z v}{\rho}$$

$$\frac{1}{2} \mu v = \frac{L_z}{\rho}$$

$$v = \frac{eB}{\mu c} \rho$$

$$\frac{1}{2} \mu \frac{eB}{\mu c} \rho = \frac{L_z}{\rho}$$

$$\frac{1}{2} \frac{eB}{c} = \frac{L_z}{\rho^2}$$

$$\rho^2 = \frac{2c}{eB} L_z$$

$$\rho = \sqrt{\frac{2c}{eB} L_z}$$

حال به معادله انرژی زیر یعنی بحث کوئتمومی خودبازمی کردیم:

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \frac{eB\hbar}{2\mu c} (2n_r + 1 + |m| + m)$$

چون $\hbar$ خیلی کوچک است، انرژی فقط در صورتی می تواند از مرتبه ماکروسکوپی (برای یک B قابل قبول) باشد که عبارت داخل پرانتز فوق یعنی $2n_r + 1 + |m| + m$ خیلی بزرگ باشد.

حال دو حالت را در نظر می گیریم:

الف) اگر $m < 0$ باشد، این ایجاب می کند که n_r خیلی بزرگ باشد (اگر می خواهیم حد کلاسیکی را بررسی کنیم)

می دانیم که n_r درجه چند جمله ایهای لاگر است و تعداد صفرهای آن را تعیین می کند.

پس اگر n_r بخواهد خیلی بزرگ باشد، دیگر تابع نمی تواند برای ناحیه کوچک y جایی که مدار کلاسیکی قرار است واقع شود بزرگ باشد.

ب) اگر $m > 0$ باشد، ضریب $2n_r + 1 + |m| + m = 2n_r + 1 + 2m$ باید بزرگ باشد، که اگر بخواهیم آن طور که در بالا گفته شد n_r کوچک باشد پس باید خود m بزرگ باشد.

در این صورت می توان انرژی را به صورت زیر تخمین زد:

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \frac{eB\hbar}{2\mu c} (2n_r + 1 + |m| + m) = \frac{eB\hbar}{2\mu c} (2n_r + 1 + 2m)$$

که همان طور که ملاحظه می شود به حد کلاسیکی رسیدیم:

$$\approx \frac{eB\hbar}{\mu c} m$$

کلاسیک

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{L_z v}{\rho}$$

$$v = \frac{eB}{\mu c} \rho$$

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{eB}{\mu c} L_z = \frac{eB}{\mu c} m \hbar$$

حد کلاسیکی
کو انتهم

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \approx \frac{eB\hbar}{\mu c} m$$

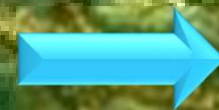
پس چنین در این حالت می توانیم نشان دهیم که شعاع مدار کلاسیکی که با قله تابع توزیع احتمال تعیین می شود متناسب با حد کلاسیکی است:

باز هم مانند اتم هیدروژن برای یافتن شعاع مدار فرض می کنیم که $n_r=0$ باشد، یعنی فقط یک قله داشته باشیم و صفر نداشته باشیم.

$$P(x) = x^{2|m|} e^{-x^2}$$

در این صورت تابع لاگر فقط یک ثابت می شود، پس:

$$\frac{dP(x)}{dx} = \left(2|m| x^{2|m|-1} - 2x^{2|m|+1} \right) e^{-x^2} = 0$$



$$x = \sqrt{|m|}$$

اما قبلا متغیر $\mathbf{x}$ را به صورت زیر تعریف کرده بودیم:

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}} \rho$$

$$= \sqrt{|\mathbf{m}|}$$



$$\rho = \sqrt{\frac{2\hbar c}{eB}} m = \sqrt{\frac{2c}{eB}} \hbar m$$

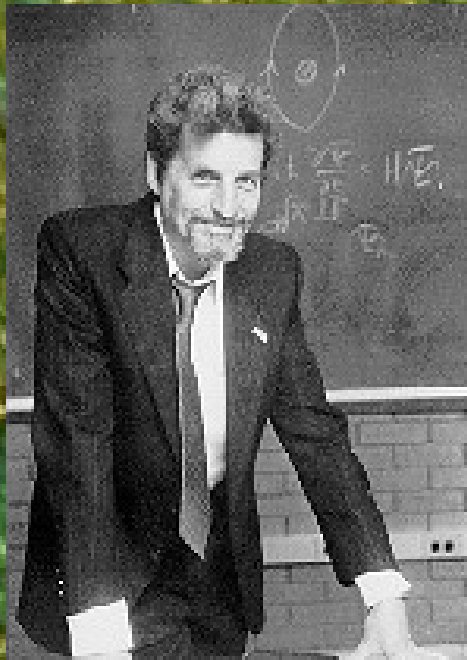
که با حد کلاسیکی به زیبایی در توافق است.

$$\rho = \sqrt{\frac{2c}{eB}} L_z$$

چندین اثر کوانتوم مکانیکی جالب توجه در ارتباط با برهمکنش یک میدان مغناطیسی وجود دارد که ما اکنون به آنها برمیگردیم.

معادله شرودینگر زیر

$$\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 \Psi(\mathbf{r}, t) = (E + e\Phi(\mathbf{r})) \Psi(\mathbf{r}, t)$$



YAKIR AHARONOV



David Joseph Bohm (1917-1992)

به نظر می رسد که اصل ناوردایی پیمانه ای را نقض می کند، زیرا پتانسیل برداری در معادله شرودینگر ظاهر شده است و بنابراین ما میلتونی دستگاه که تحت تبدیل پیمانه ای زیر

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla f(\mathbf{r}, t)$$

به صورت زیر تبدیل می شود

$$\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 \xrightarrow{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f} \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} \nabla f(\mathbf{r}, t) \right]^2$$

دیگر ناورد اباقی نمی ماند.

اما هنوز این امکان وجود دارد که ناوردایی پیمانه ای را حفظ کنیم.

برای حفظ ناوردایی پتانسیل می‌کنیم که یک تغییر تابع موج به اندازه یک عامل فاز نتیجه یا تغییر فیزیکی عمده‌ای در پاسخ نهایی ایجاد نخواهد کرد.

عامل فاز فوق حتی می‌تواند به $\mathbf{r}$ هم بستگی داشته باشد.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla f(\mathbf{r}, t)$$

بنابراین اگر هنگام تبدیل پتانسیل می‌باشد:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow e^{i\Lambda(\mathbf{r}, t)} \Psi(\mathbf{r}, t)$$

تابع موج نیز تبدیل شود:

آنگاه طرف چپ معادله شرودینگر به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{e}{c} \nabla f \right] \cdot \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{e}{c} \nabla f \right] e^{i\Lambda} \Psi$$

$$= \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{e}{c} \nabla f \right] \cdot \left[e^{i\Lambda} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \Psi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \Psi + \frac{e}{c} \nabla f \Psi + \hbar \nabla \Lambda \Psi \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\mu} e^{i\Lambda} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{e}{c} \nabla f + \hbar \nabla \Lambda \right]^2 \Psi$$

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) = -\frac{e}{\hbar c} f(\mathbf{r}, t)$$

پس برای ناوردانگاه داشتن هامیلتونی کافی است که انتخاب زیر را انجام دهیم:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c} f(\mathbf{r}, t)} \Psi(\mathbf{r}, t)$$

انتخاب فوق معادل تبدیل زیر است:

$$\frac{1}{2\mu} e^{i\Lambda} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \cancel{\frac{e}{c} \nabla f} + \cancel{\hbar \nabla \Lambda} \right]^2 \Psi$$

چون در این صورت حلمات سوم و چهارم موجود در طرف چپ هامیلتونی یکدیگر را حذف خواهند کرد:

$$= \frac{1}{2\mu} e^{i\Lambda} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right]^2 \Psi$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

در یک ناحیه تهی از میدان که ایجاد می کند:

$$\mathbf{A} = \nabla f$$

پتانسیل برداری را می توان به صورت گرادیان یک تابع اسکالر نوشت:

بنابراین در یک ناحیه تهی از میدان با حرکت الکترون را می توانیم به دوروش توصیف کنیم:

الف) یا این که حضور میدان مغناطیسی را کلاً در نظر نمی گیریم و بنویسیم:

$$\left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 + V(\mathbf{r}) \right] \Psi = E \Psi$$

و این معادله شرودینگر را حل کنیم

ب) یا این که معادله شرودینگر را پتانسیل برداری به صورت زیر بنویسیم:

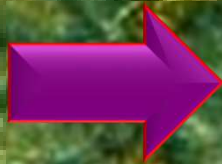
$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi' + V(\mathbf{r}) \Psi' = E \Psi'$$

$$\Psi' = e^{-\frac{ie}{\hbar c} f} \Psi$$

و فرض کنیم که:

تابع f را می توان بر حسب $\mathbf{A}$ با حل معادله زیر به صورت انتگرالی نوشت:

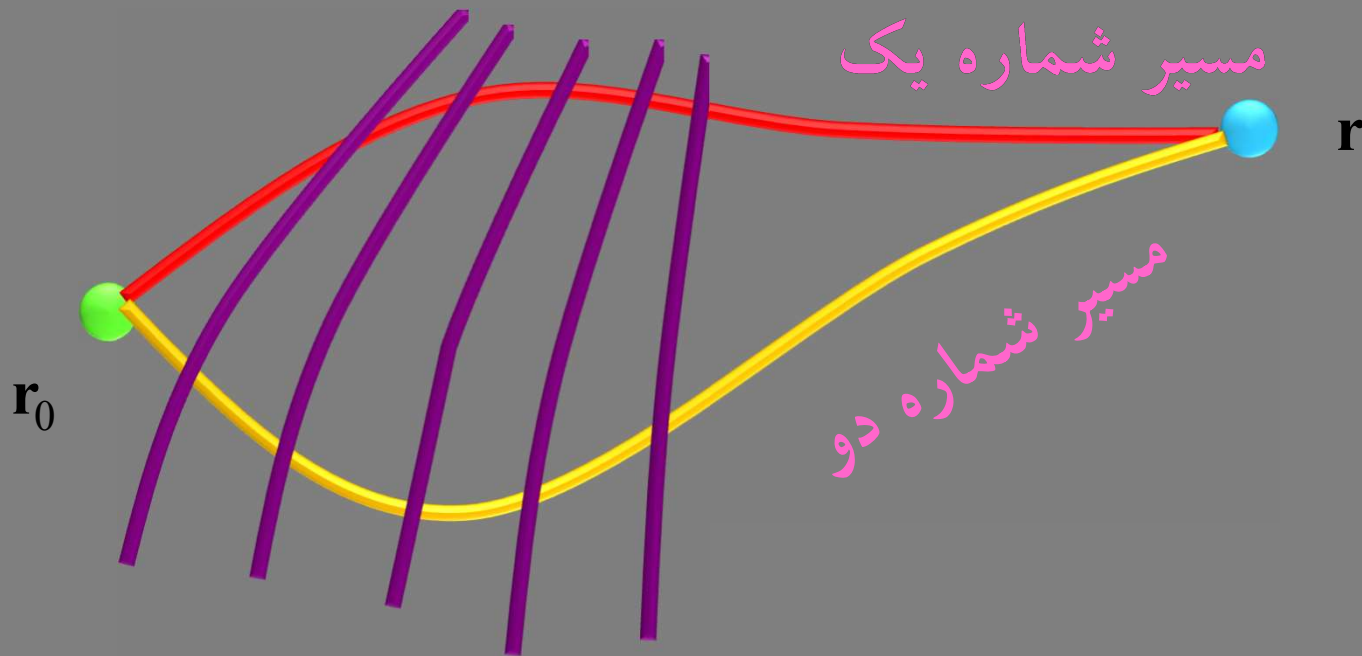
$$\mathbf{A} = \nabla f$$



$$f(\mathbf{r}, t) = \int^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t)$$

که در آن مسیر انتگرال گیری از یک نقطه ثابت دلخواه مانند صفر (مبداء) یا بینهایت تا نقطه $\mathbf{r}$ به طور دلخواه انتخاب شده است.

انتگرال فوق فقط اگر $\mathbf{B} = 0$ باشد دارای معنی است زیرا تفاوت انتگرال در امتداد دو مسیر متفاوت 1 و 2 عبارت است از:



$$f(\mathbf{r}, t) = \int_1 d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) + \int_2 d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \oint d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t)$$

$$= \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi = \text{Magnetic Field Flux}$$

که در آن از قضیه استوکس استفاده شده است و Φ فلوی مغناطیسی از سطحی است که بر روی دو مسیر 1 و 2 بنا شده است.

بنابراین تنها اگر ϕ صفر باشد آنگاه عامل فاز $\exp(-ie/(\hbar c))f$ مستقل از مسیر خواهد شد.

چنین استقلالی از مسیر ضروری است اگر اسرار داشته باشیم که تابع موج تک مقدار باشد.

پس اگر $B=0$ باشد آنگاه استقلال از مسیر وجود خواهد داشت.

اگر ϕ مخالف صفر باشد یعنی مسیرهای انتخاب شده شامل یک فلو باشد، آنگاه توابع موج الکترونها در حال حرکت در طول دو مسیر فازهای متفاوتی خواهند داشت.

یک نتیجه جالب این است که اگر یک الکترون در یک ناحیه تهی از میدان حرکت کند (که البته نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر خیلی راحت به هم وصل نشده باشند بلکه یک حفره شامل فلوی غیر صفر را احاطه کنند) آنگاه وقتی که یک مدار بسته را طی می کند و به نقطه اول خود بازمی گردد تابع موج آن به حالت اول بازمی گردد بلکه به اندازه فاز زیر در آنها اختلاف فاز ظاهر خواهد شد:

$$\exp\left(\frac{ie\Phi}{\hbar c}\right)$$

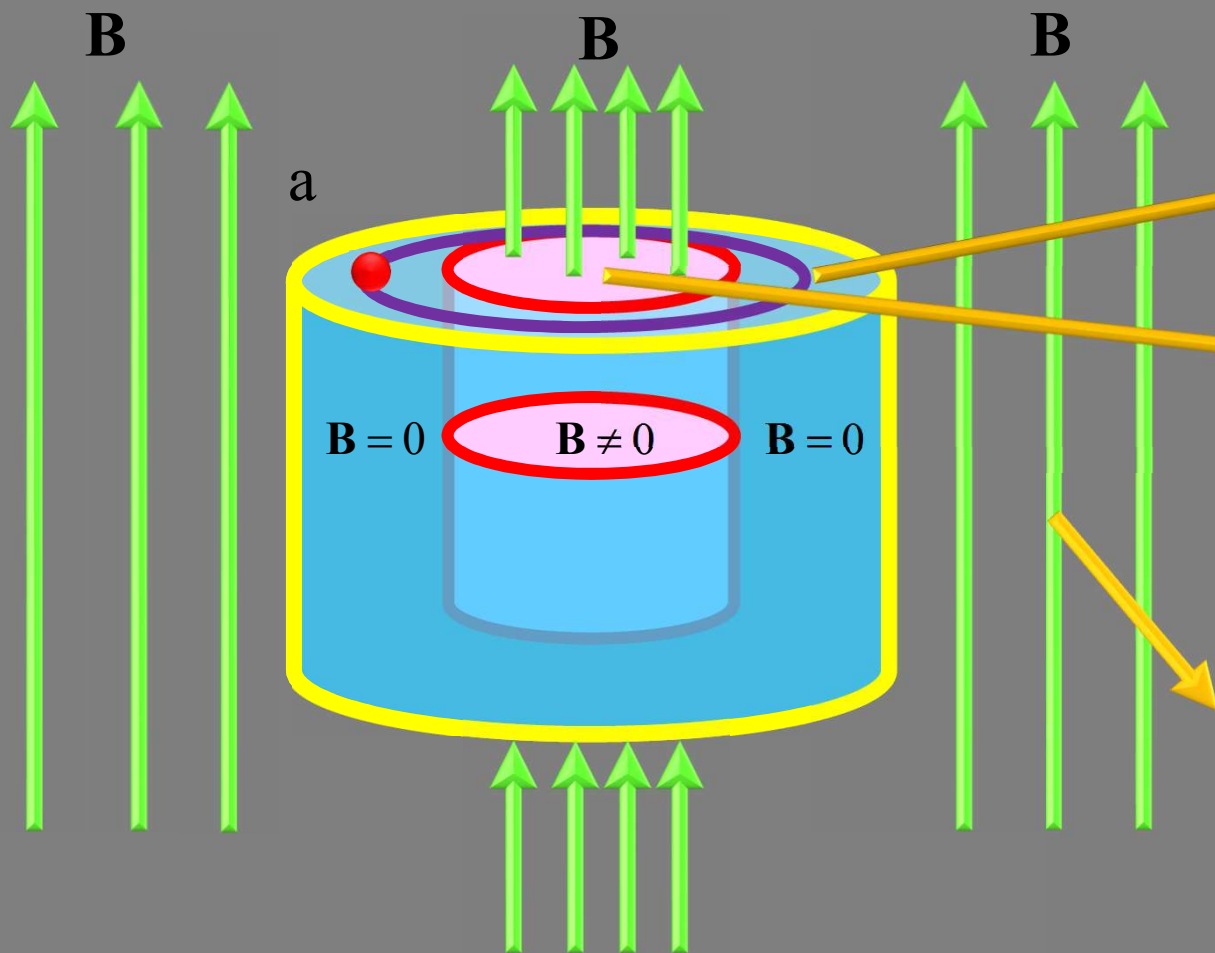
$$\Phi = \frac{2\pi\hbar c}{e} n$$

شرط تک مقداره بودن تابع موج که هم از یک شدن ضریب فاز است ایجاب می کند که فلوئی در گرفته شده کواسیره باشد.

مدار حرکت الکترون
در ناحیه خالی از میدان

حضره

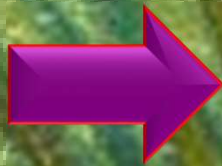
میدان مغناطیسی که فقط احازره حضور در
درون حفره و خارج از استوانه خارجی
را دارد مقدار آن در ناحیه توپر استوانه
صفر باید باشد.



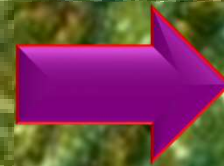
در مسیر حرکت الکترون:

خلاصه این که:

$$\mathbf{B} = 0$$



$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$



$$\mathbf{A} = \nabla f$$

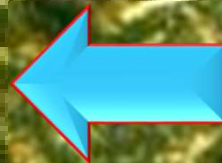
$$f(\mathbf{r}, t) = \int_a^a d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \oint d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t)$$

$$= \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi \neq 0$$

$$\Psi' = e^{-\frac{ie}{\hbar c} f} \Psi = e^{-\frac{ie}{\hbar c} \Phi} \Psi$$

می توان از معادله شرودینگر در
غیاب میدان مساله را حل کرد

B در مسیر حرکت الکترون صفر است



از طرفی می توان مساله را با معادله شرودینگر در
حضور میدان نیز حل کرد که نتیجه آن Ψ است.

Ψ باید تک مقداره باشد



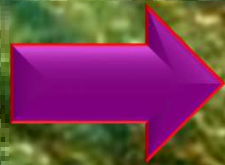
هنوز باید مساله حتی با حل در حضور میدان تک مقداره باشد زیرا واقعا **B=0** است.



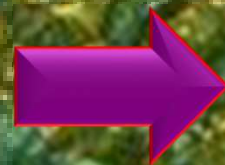
پس از تک مقدارده بودن نتیجه می گیریم که:

$$\Psi' = e^{-\frac{ie}{\hbar c}\Phi} \Psi$$

$$e^{-\frac{ie}{\hbar c}\Phi} = 1$$



$$e^{-\frac{ie}{\hbar c}\Phi} = e^{-2n\pi i}$$



$$\frac{e}{\hbar c}\Phi = 2n\pi$$

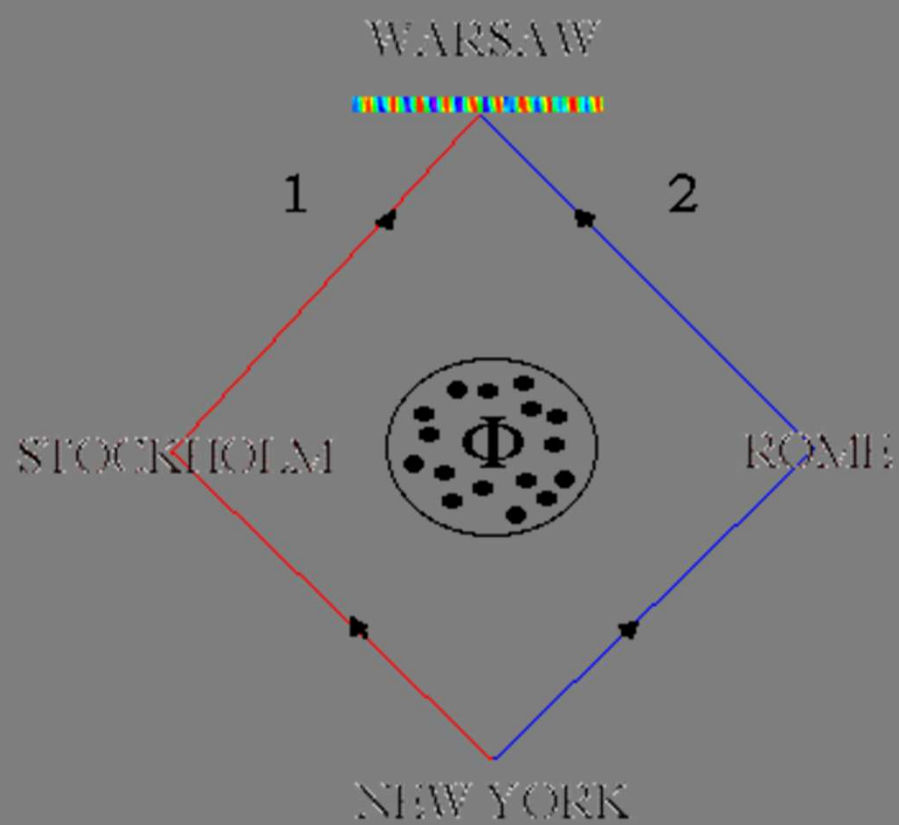


$$\Phi_n = \frac{2\pi\hbar c}{e}n; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



$$\Phi = \frac{2\pi\hbar c}{e}n$$

AHARONOV-BOHM EFFECT



$$\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2 = \frac{e}{\hbar} \Phi$$

چنین وضعیتی در حرکت الکترونها در یک حلقه ابررسانا که ناحیه ای شامل یک فلوی مغناطیسی را در بر دارد به وقوع می پیوندد.

آزمایشات اولیه در سال 1961 بر اساس طرح زیر انجام شد:

یک حلقه ساخته شده از یک ابررسانا، در یک میدان مغناطیسی قرار داده شد.

داماد ابتدا بالاتر از دمای بحرانی بود.

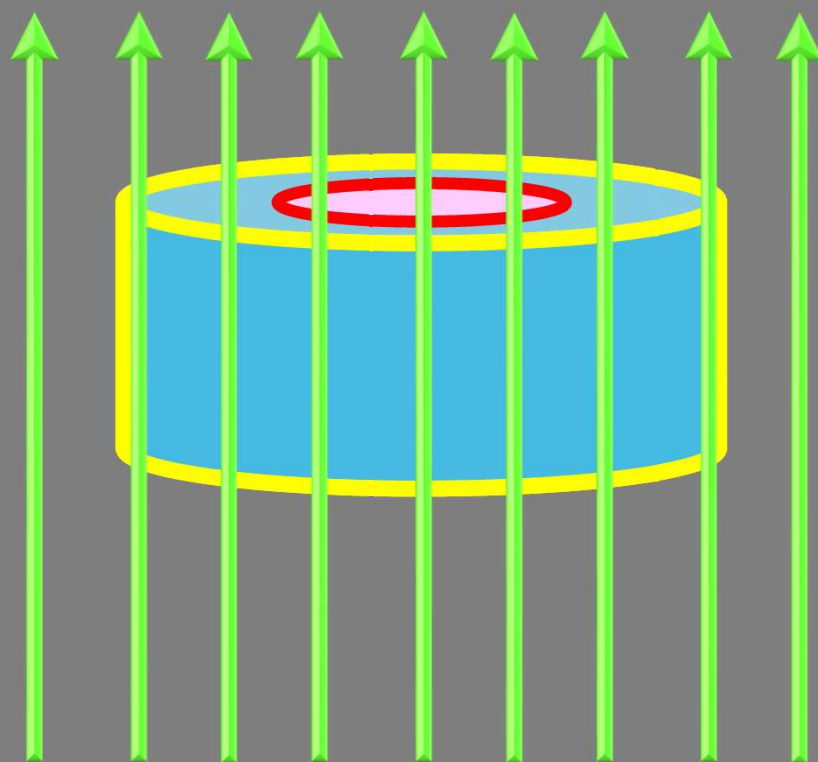
دمای بحرانی دمای است که خاصیت ابررسانایی زیر آن دما بروز پیدا می کند.

ابررسانا ها خطوط میدان مغناطیسی را قطع نمی کنند.

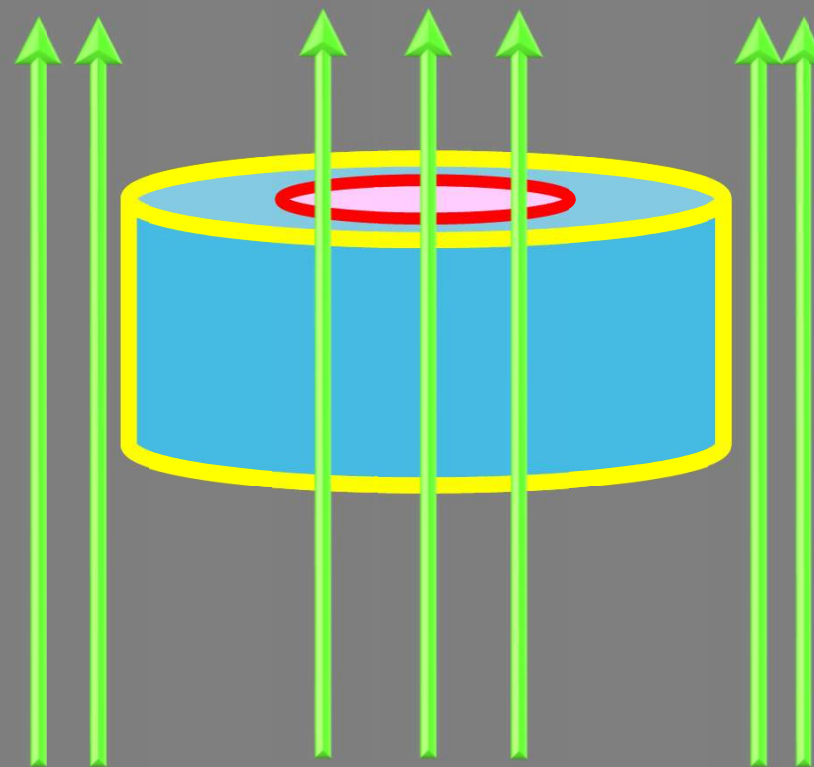
این اثر را اثر مایسنر گویند:

وقتی که حلقه تازیر دمای بحرانی سرد شود، آنگاه به ابر رسانا تبدیل می شود.

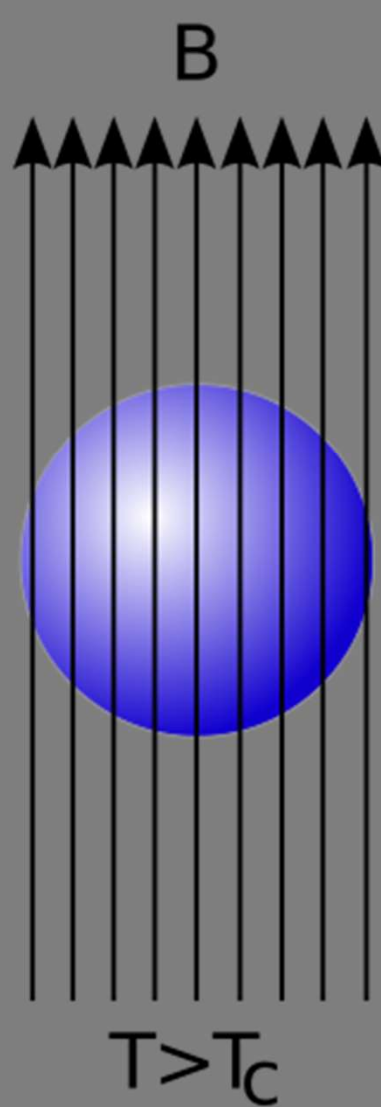
در این صورت میدان مغناطیسی درون حلقه ابر رسانا کسری افتد:



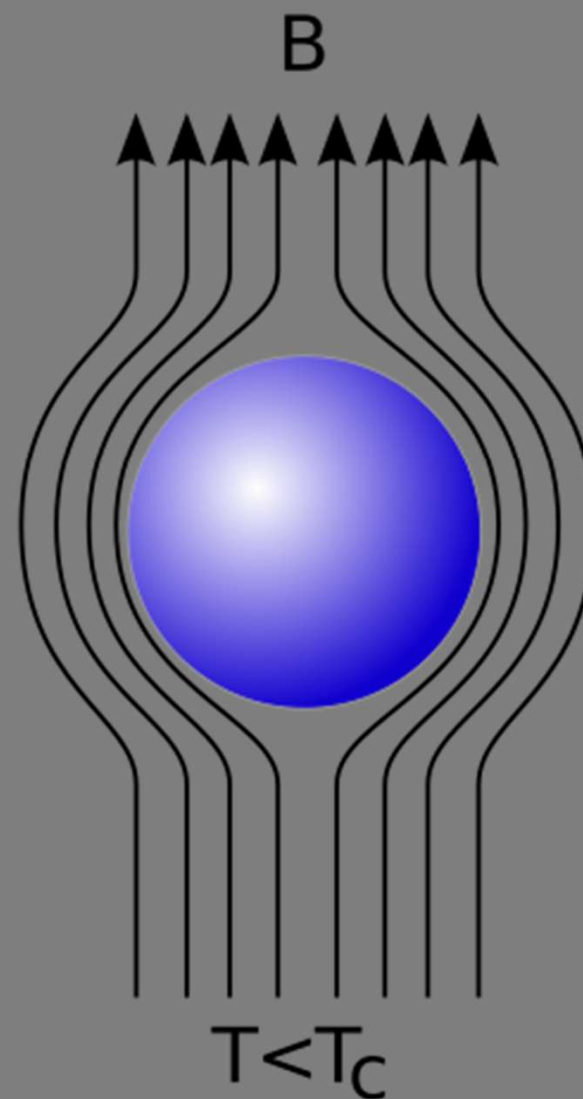
$$T > T_c$$



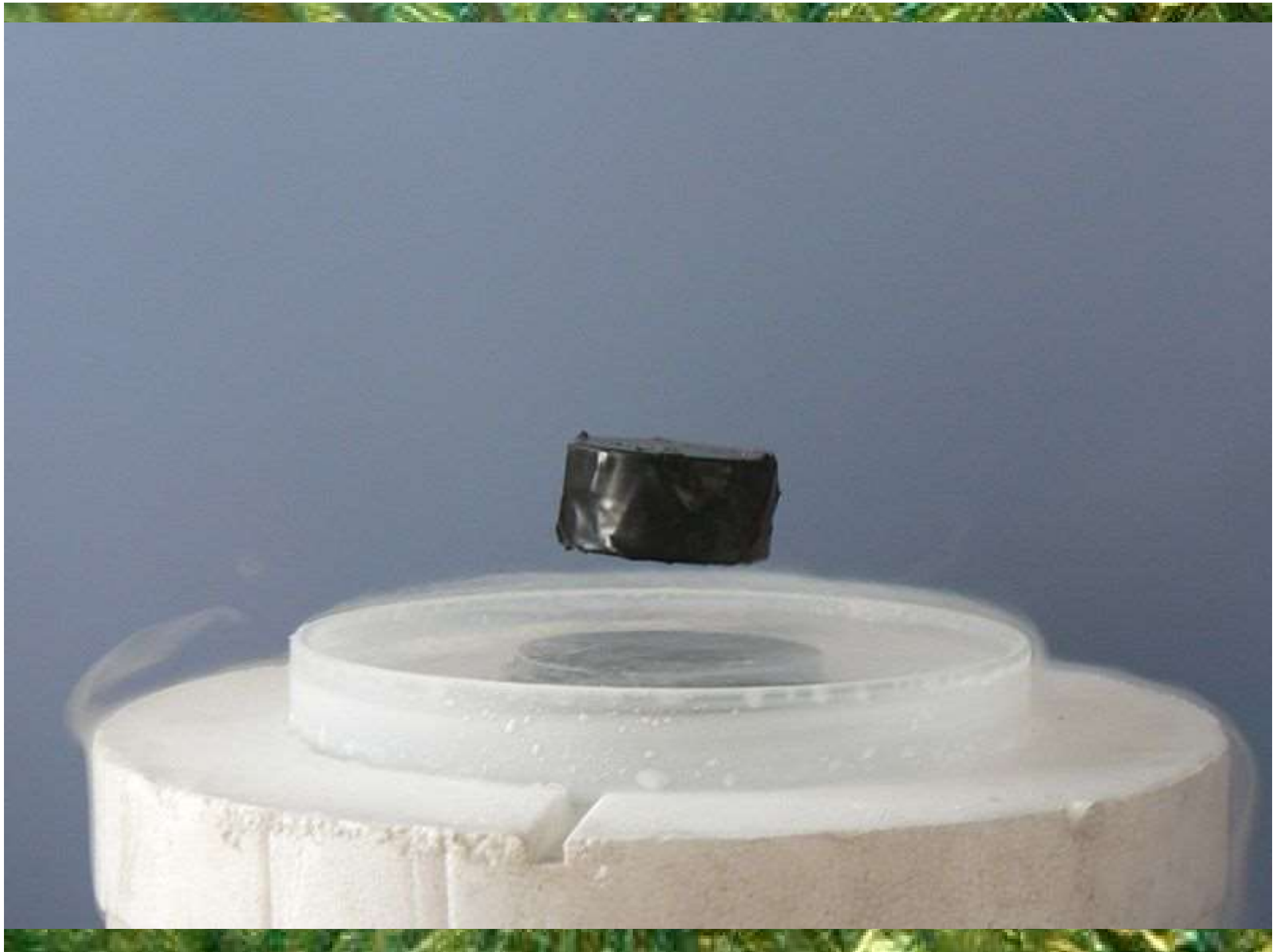
$$T < T_c$$



جسم در این حالت شیه فلز رفتار می کند و میدان مغناطیسی می تواند به درون آن نفوذ کند.



جسم در این حالت ابررسانا می شود و اجازه عبور میدان مغناطیسی را نمی دهد و خطوط میدان را دفع می کند.



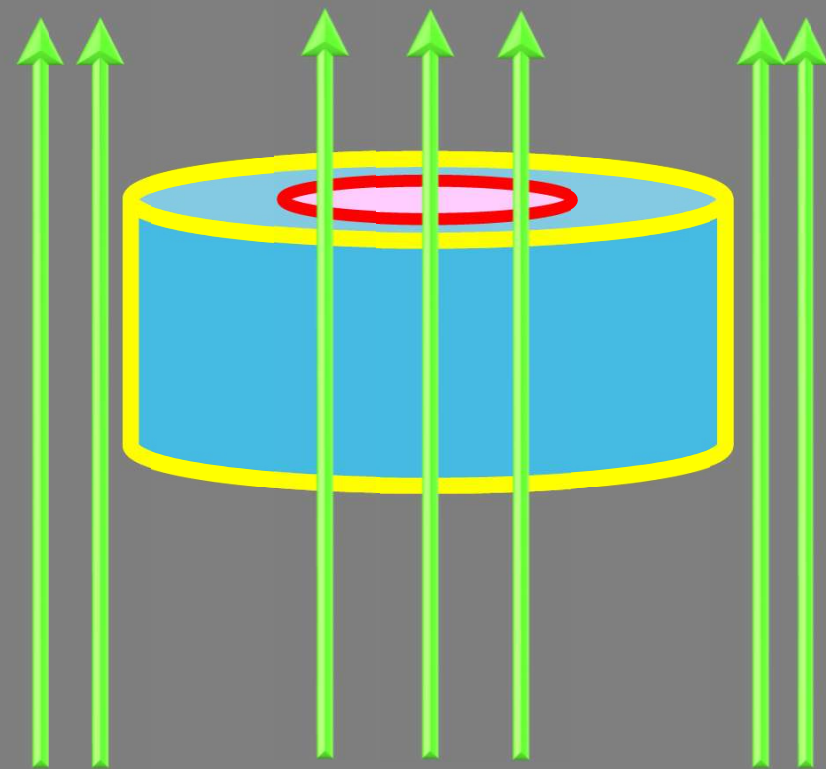
تجربه نشان می‌دهد که فلز می‌تواند مغناطیسی به صورت زیر کوانتیزه می‌شود:

$$\Phi_n = \frac{2\pi\hbar c}{(2e)} n$$

که با رابطه‌ای که ما به دست آورده ایم اندکی تفاوت دارد:

$$\Phi_n = \frac{2\pi\hbar c}{e} n$$

یعنی در تجربه به جای بار الکترون دو برابر بار الکترون ظاهر شده است.



$$T < T_c$$

خطوطی که در حفره کیر افتاده اند بهانهایی هستند که کوانتیزه می‌شوند.

دو برابر شدن بار الکترون که در رابطه تجربی وجود دارد با دک فعلی ما از ابررساناها و پدیده ابررسانایی سازگار است.

دک فعلی مای گوید که زوجهای کوپر با دو برابر بار الکترون باعث ابررسانایی می شوند.

یعنی الکترونها در واقع دو الکترون با اسپین مخالف یکدیگر هستند که با یکدیگر جفت شده اند.

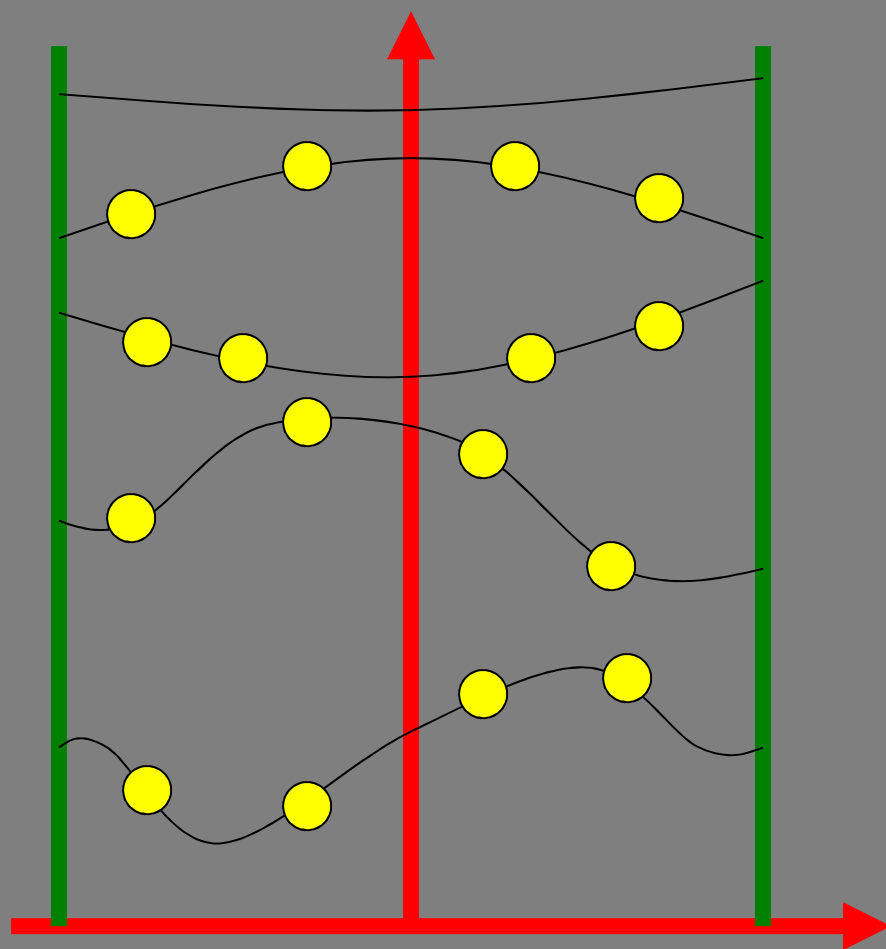
به این دو الکترون زوج کوپر گویند.

زوجهای کوپر عامل ابررسانایی هستند.

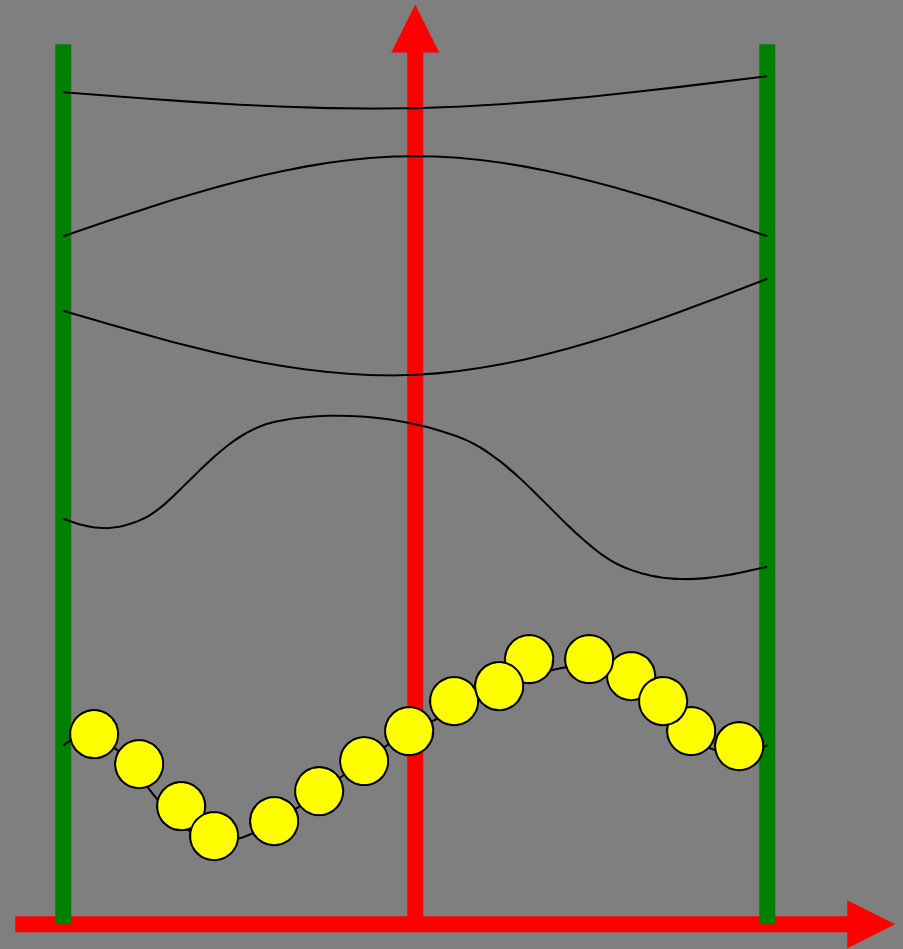
اسپین زوجهای کوپر صفرو بنا بر این مانند یک بوزون رفتار می کنند.

لذا دمای بحرانی چگالش بوزا نشین روی می دهد.

چگالش بوزانشین یعنی هنگامی که می خواهیم زوجهای کوپرا را بچینیم باید مانند بوزونها با آنها رفتار کنیم و همه را در حالت زمینه در پایین ترین تراز انرژی قرار دهیم:



$$T > T_c$$



$$T < T_c$$

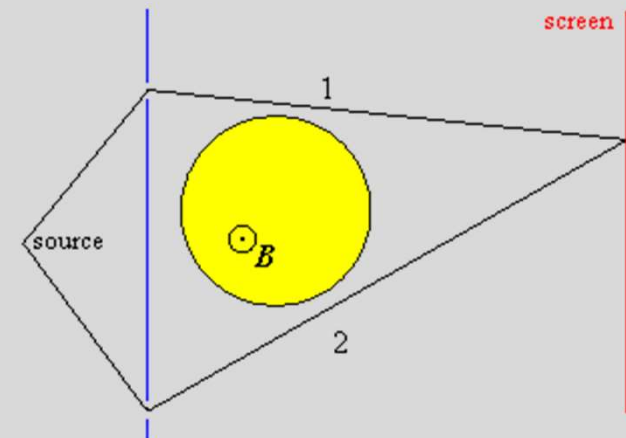
نمایش آشکار دیگری از وابستگی فاز تابع موج به فلز در اصول می تواند در یک آزمایش تداخل سنجی که در آن یک سلونوئید در برگیرنده یک میدان مغناطیسی بین دو شکاف در مشاهد شود.

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

طرح تداخل روی صفحه ناشی از برهمه‌نمی دو بخش تابع موج است:

که در آن Ψ_1 بخشی از تابع موج الکترون در مسیر 1 و Ψ_2 آن بخش از تابع موج الکترون در مسیر 2 است.

$$\Psi = \Psi_1 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_1 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\} + \Psi_2 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\}$$



$$\Psi = \Psi_1 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_1 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\} + \Psi_2 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\}$$

$$\Psi = \left[\Psi_1 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \left(\int_1 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} - \int_2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right) \right\} + \Psi_2 \right] \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\}$$

$$\Psi = \left[\Psi_1 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \Phi \right\} + \Psi_2 \right] \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\}$$

طرح تداخل در حضور
میدان مغناطیسی

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

طرح تداخل در غیاب میدان مغناطیسی

$$|\Psi(B=0)|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2$$

پس طرح تداخل در حضور میدان
بستگی به فلوی میدان دارد و با طرح
تداخل در غیاب میدان تفاوت دارد.

$$|\Psi(B \neq 0)|^2 = \left| \Psi_1 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \Phi \right\} + \Psi_2 \right|^2$$

نکته اخير ابتدا به صورت نظری در مقاله زیر پیش بینی شد:

THE PHYSICAL REVIEW

A journal of experimental and theoretical physics established by E. L. Nichols in 1893

SECOND SERIES, VOL. 115, NO. 3

AUGUST 1, 1959

Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory

Y. AHARONOV AND D. BOHM

H. H. Wills Physics Laboratory, University of Bristol, Bristol, England

(Received May 28, 1959; revised manuscript received June 16, 1959)

In this paper, we discuss some interesting properties of the electromagnetic potentials in the quantum domain. We shall show that, contrary to the conclusions of classical mechanics, there exist effects of potentials on charged particles, even in the region where all the fields (and therefore the forces on the particles) vanish. We shall then discuss possible experiments to test these conclusions; and, finally, we shall suggest further possible developments in the interpretation of the potentials.

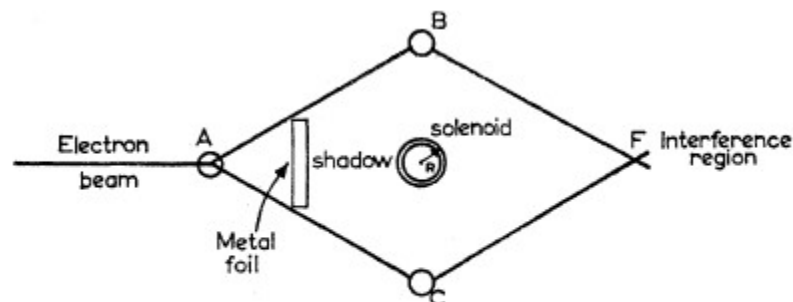


FIG. 2. Schematic experiment to demonstrate interference with time-independent vector potential.

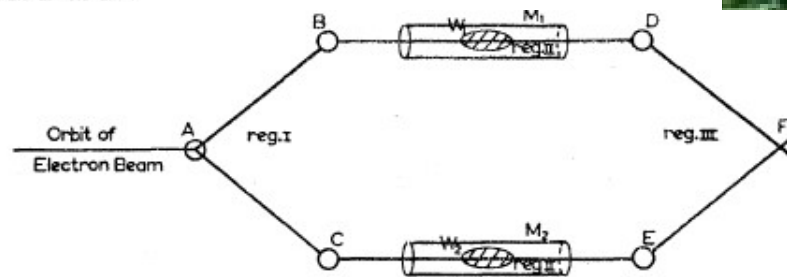


FIG. 1. Schematic experiment to demonstrate interference with time-dependent scalar potential. A, B, C, D, E : suitable devices to separate and divert beams. W_1, W_2 : wave packets. M_1, M_2 : cylindrical metal tubes. F : interference region.

و سپس به صورت تجربی در مقاله زیر مورد تایید قرار گرفت:

VOLUME 5, NUMBER 1

PHYSICAL REVIEW LETTERS

JULY 1, 1960

SHIFT OF AN ELECTRON INTERFERENCE PATTERN BY ENCLOSED MAGNETIC FLUX

R. G. Chambers

H. H. Wills Physics Laboratory, University of Bristol, Bristol, England

(Received May 27, 1960)

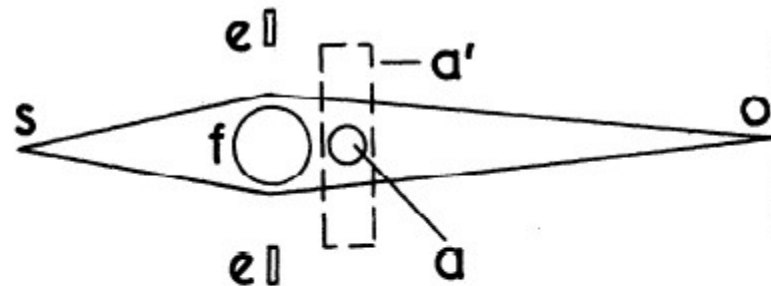


FIG. 1. Schematic diagram of interferometer, with source s , observing plane o , biprism e , f , and confined and extended field regions a and a' .