

فصل دو

موج تخت و بسته موج

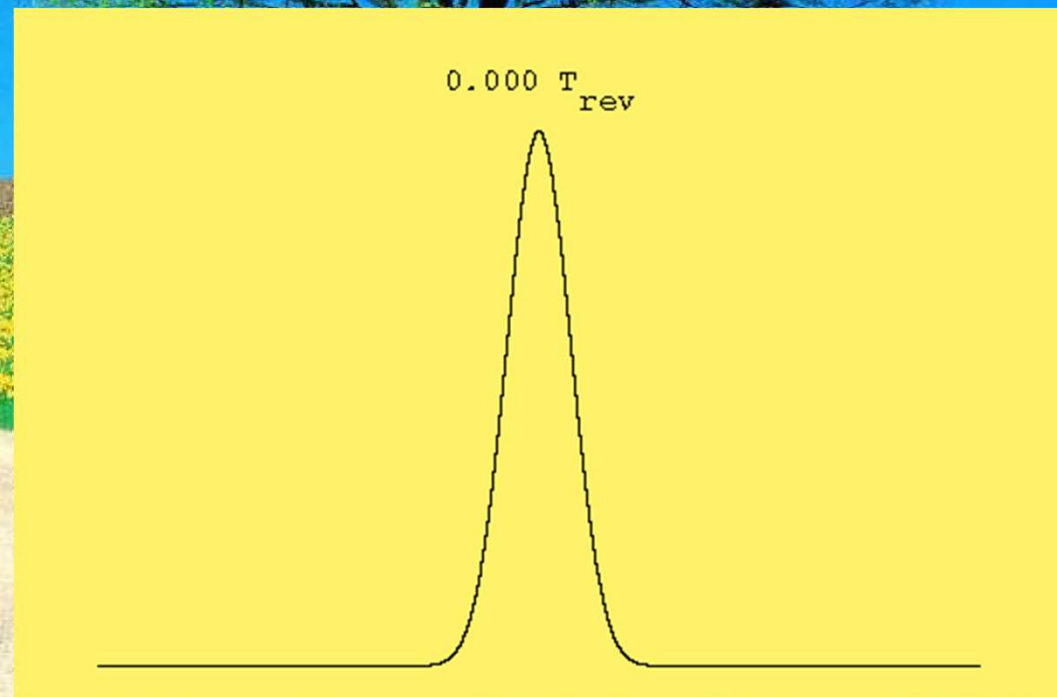
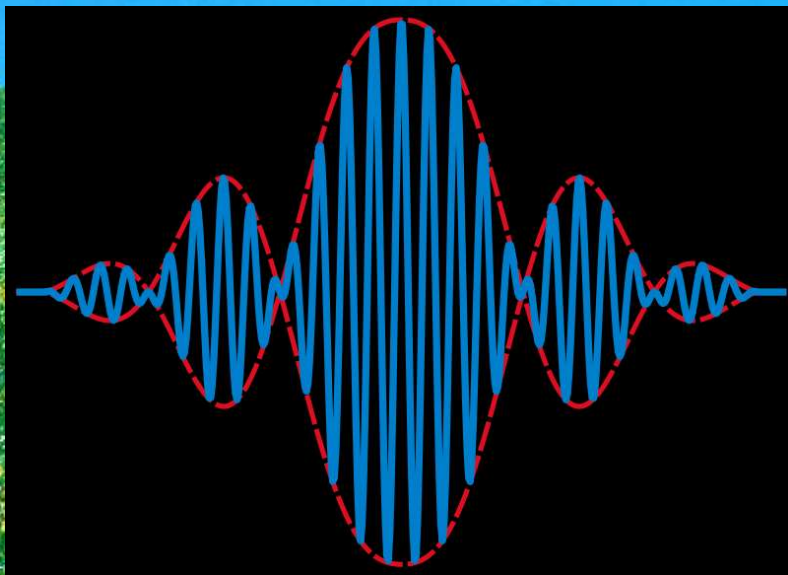


Tsunami



ابزارهای ریاضی مطالعه بسته موج

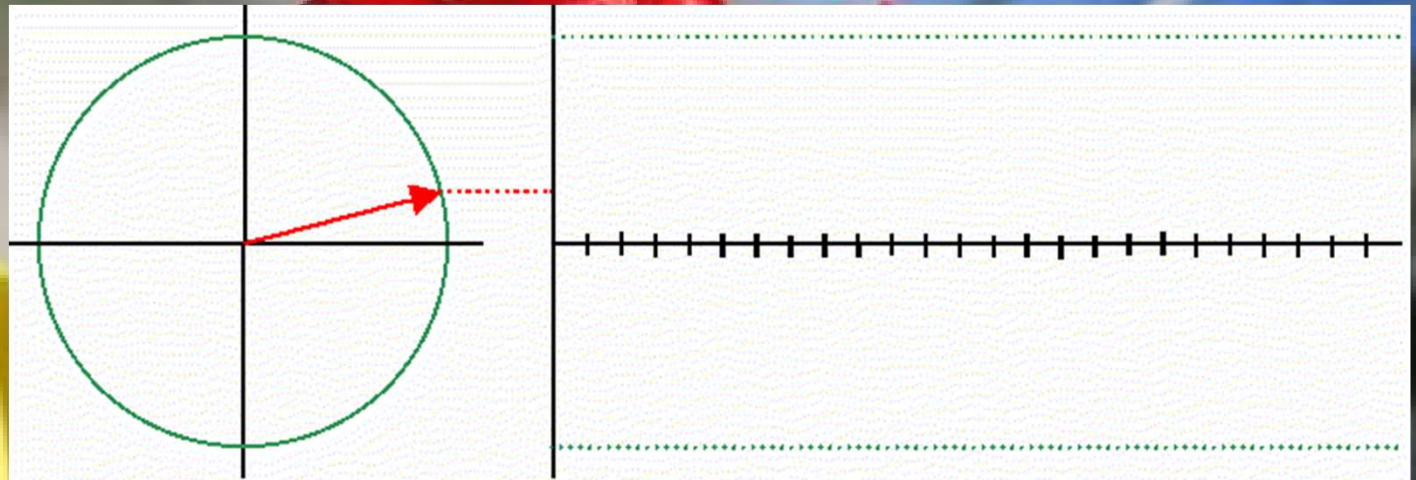
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{ikx}$$



$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) \cos(kx) + i \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) \sin(kx)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

ترکیب خطی امواج تخت با طول موج:



$$\cos\left(k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)\right) = \cos(kx + 2\pi) = \cos(kx)$$



$$x \rightarrow x + \frac{2\pi}{k}$$

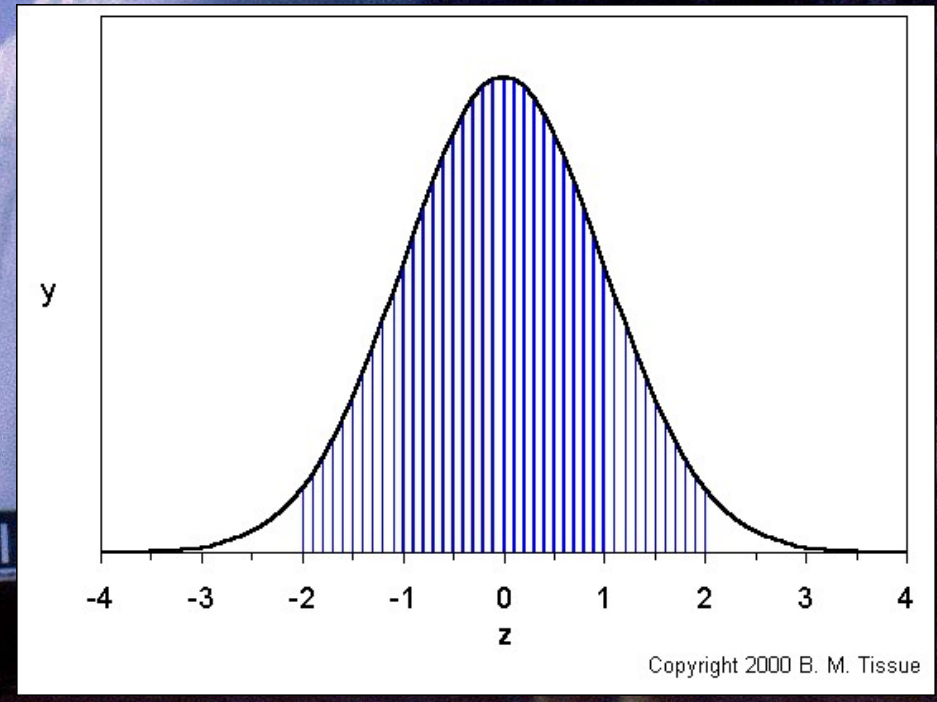
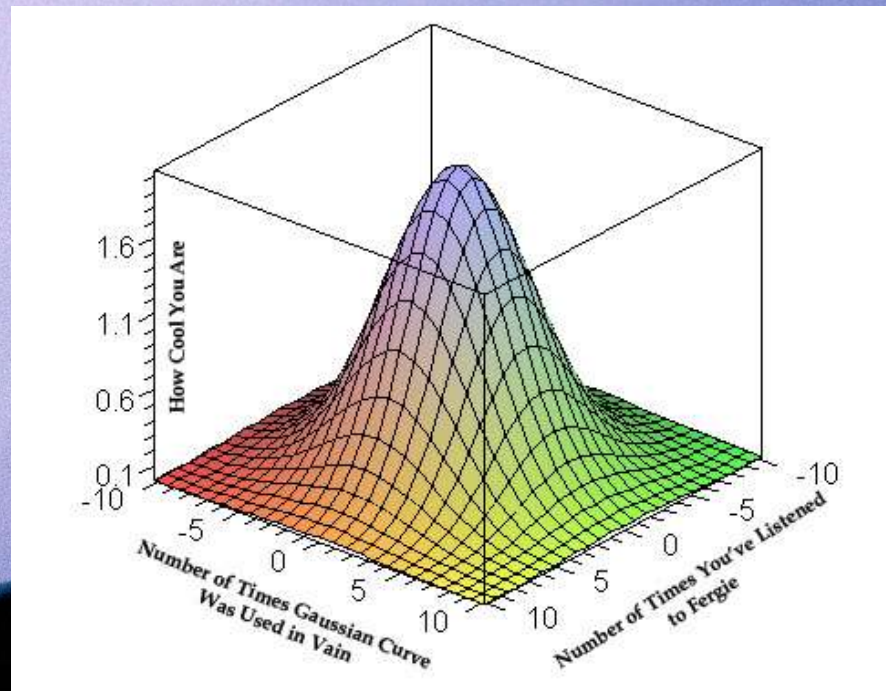
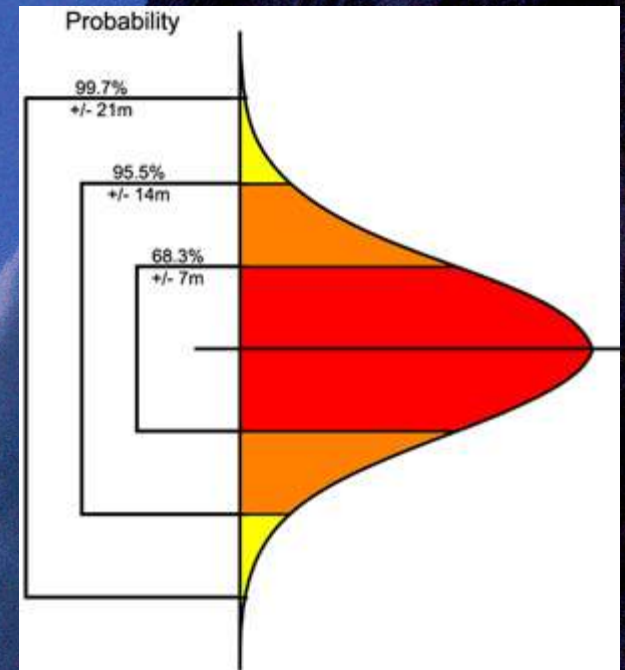
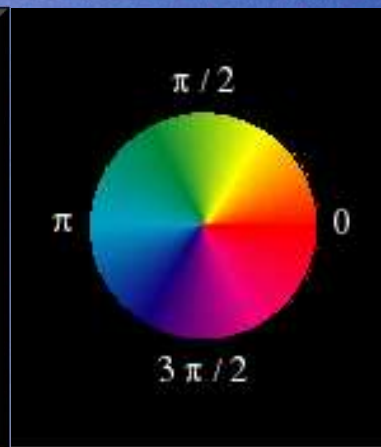
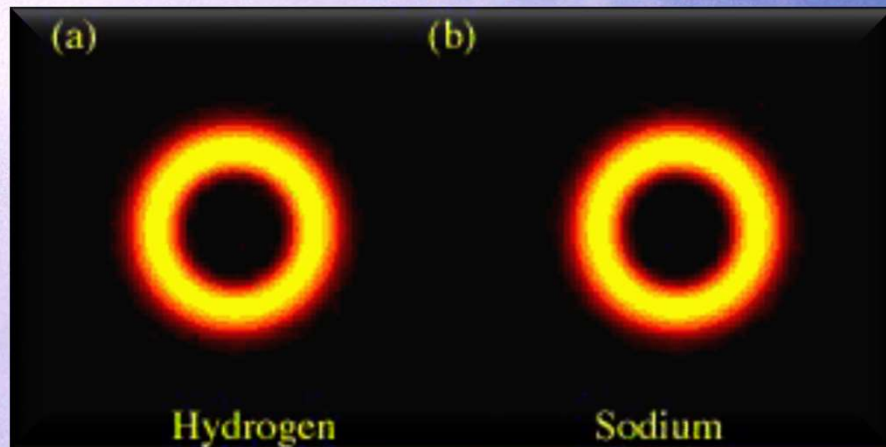


Cos(kx) تکرار می شود

$$g(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2}$$

به عنوان یک انتخاب
می توانیم بنویسیم:

$$g(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2}$$



$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\alpha(k-k_0)^2} e^{ikx}$$

$$k - k_0 = k' \Rightarrow dk = dk'$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-\alpha k'^2} e^{i(k'+k_0)x}$$

$$= e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-\alpha k'^2} e^{ik'x}$$

$$= e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-\alpha \left[\frac{-ik'x}{\alpha} + k'^2 \right]}$$

$$= e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-\alpha \left\{ \left[k' - \left(\frac{ix}{2\alpha} \right) \right]^2 - \left(\frac{ix}{2\alpha} \right)^2 \right\}}$$

$$f(x) = e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-\alpha \left[k' - \left(\frac{ix}{2\alpha} \right) \right]^2} e^{\frac{-x^2}{4\alpha}}$$

$$q = k' - \left(\frac{ix}{2\alpha} \right) \Rightarrow dq = dk'$$

$$= e^{ik_0x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\alpha q^2} \right) e^{\frac{-x^2}{4\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-\alpha q^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

تمرین 1) ثابت کنید که:

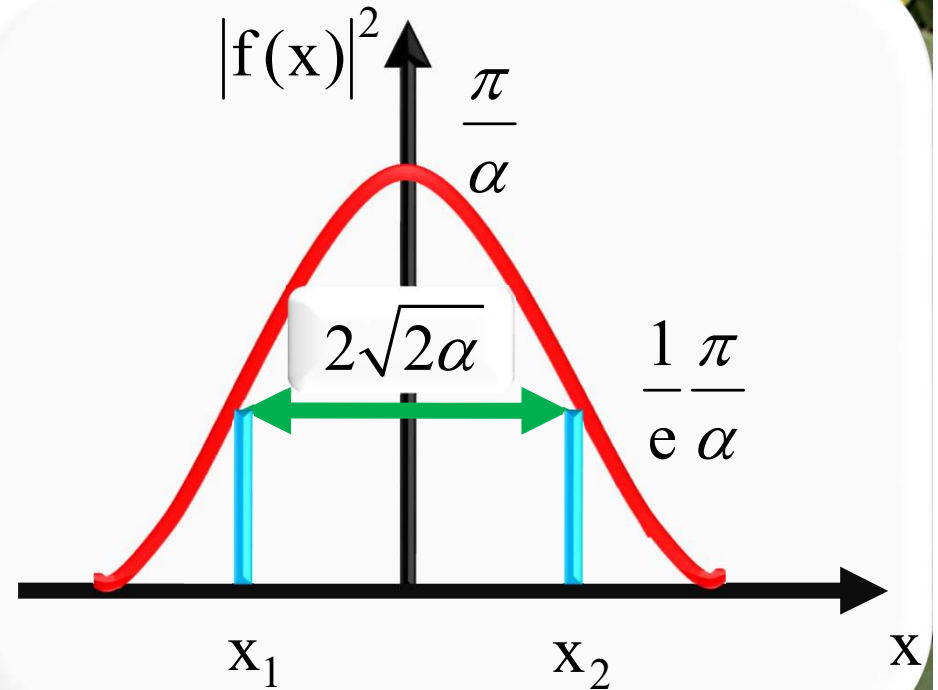
$$= e^{ik_0x} \cdot e^{\frac{-x^2}{4\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{ik_0x} e^{\frac{-x^2}{4\alpha}}$$

$$\left| e^{ik_0x} \right|^2 = e^{ik_0x} e^{-ik_0x} = 1$$

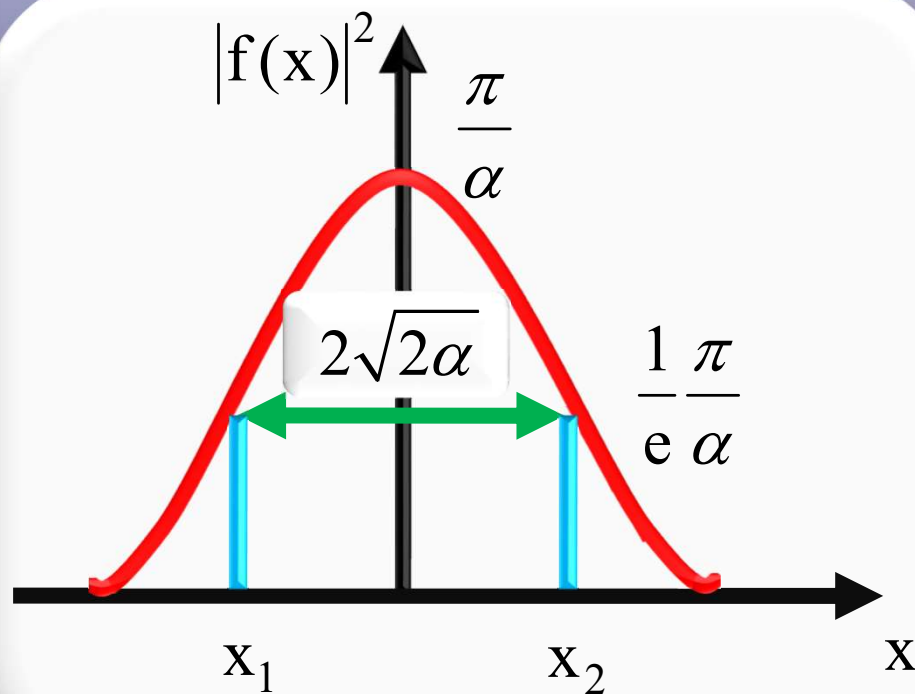
$$|f(x)|^2 = \frac{\pi}{\alpha} e^{\frac{-x^2}{2\alpha}}$$

$$\text{Max}(|f(x)|^2) = \frac{\pi}{\alpha} = \text{max}$$



$$\frac{1}{e} \text{max} = \frac{1}{e} \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\alpha} e^{\frac{-x^2}{2\alpha}}$$

$$\frac{-x^2}{2\alpha} = -1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2\alpha}$$



$$x_2 = +\sqrt{2\alpha}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2\sqrt{2\alpha}$$



$$\frac{-x^2}{2\alpha} = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2\alpha}$$

$$x_1 = -\sqrt{2\alpha}$$

آلفای بزرگتر منجر به پهنای بزرگتر و این خود منجر به تابع پهنتر می شود

آلفای کوچکتر منجر به پهنای کوچکتر و این خود منجر به تابع جایگزیده تر می شود

$$g(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2}$$

$$|g(k)|^2 = e^{-2\alpha(k-k_0)^2}$$

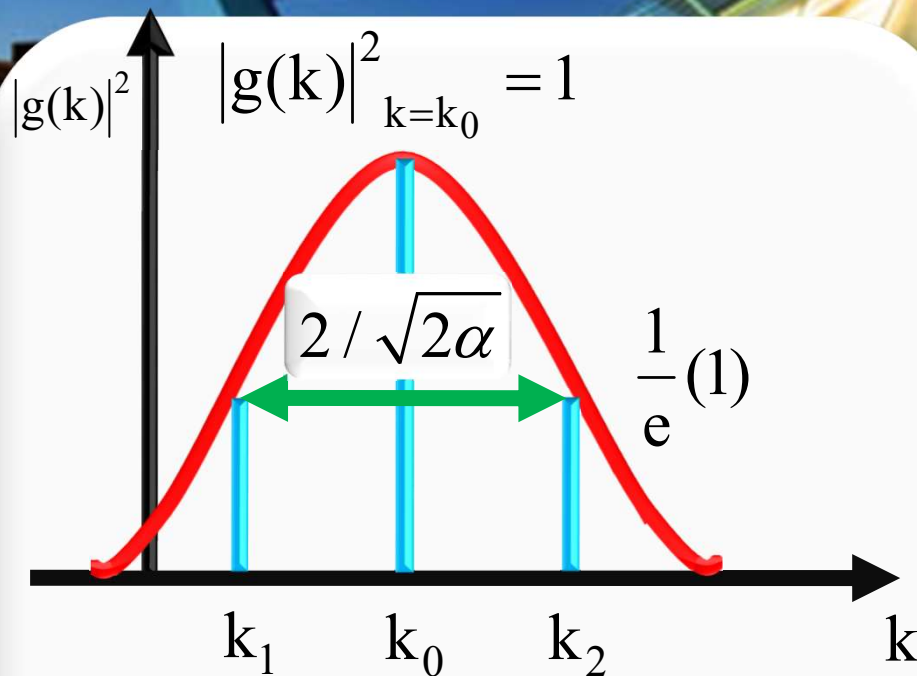
$$\text{Max}(|g(k)|^2) = 1 = \max$$

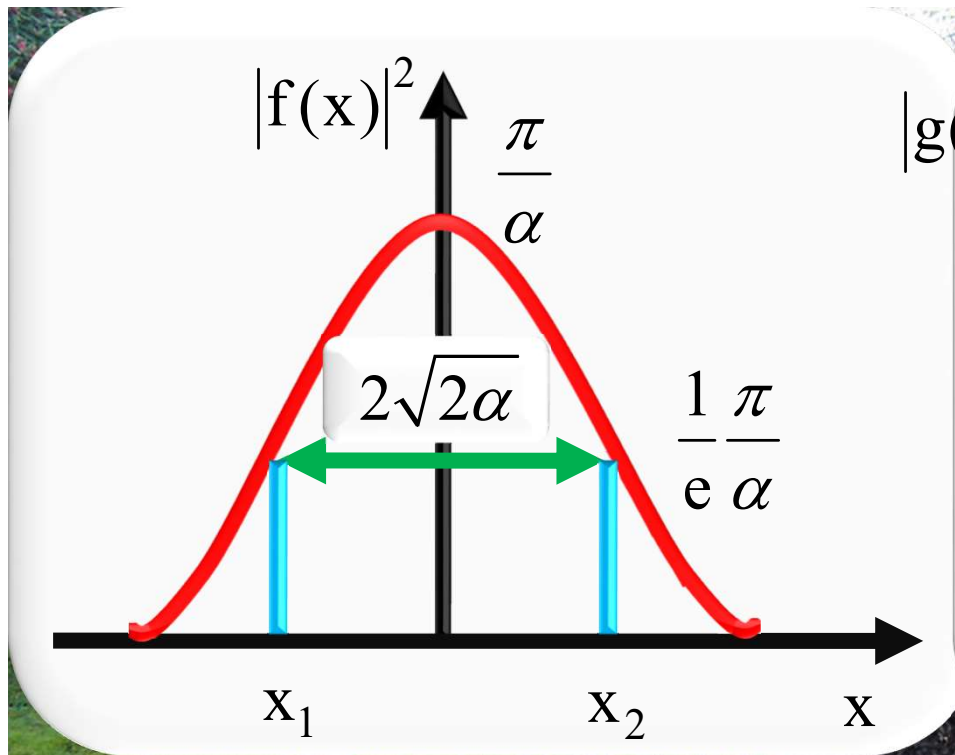
$$\frac{1}{e} \text{Max} = \frac{1}{e} 1 = 1e^{-2\alpha(k-k_0)^2}$$

$$-2\alpha(k-k_0)^2 = 1 \Rightarrow (k-k_0)^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

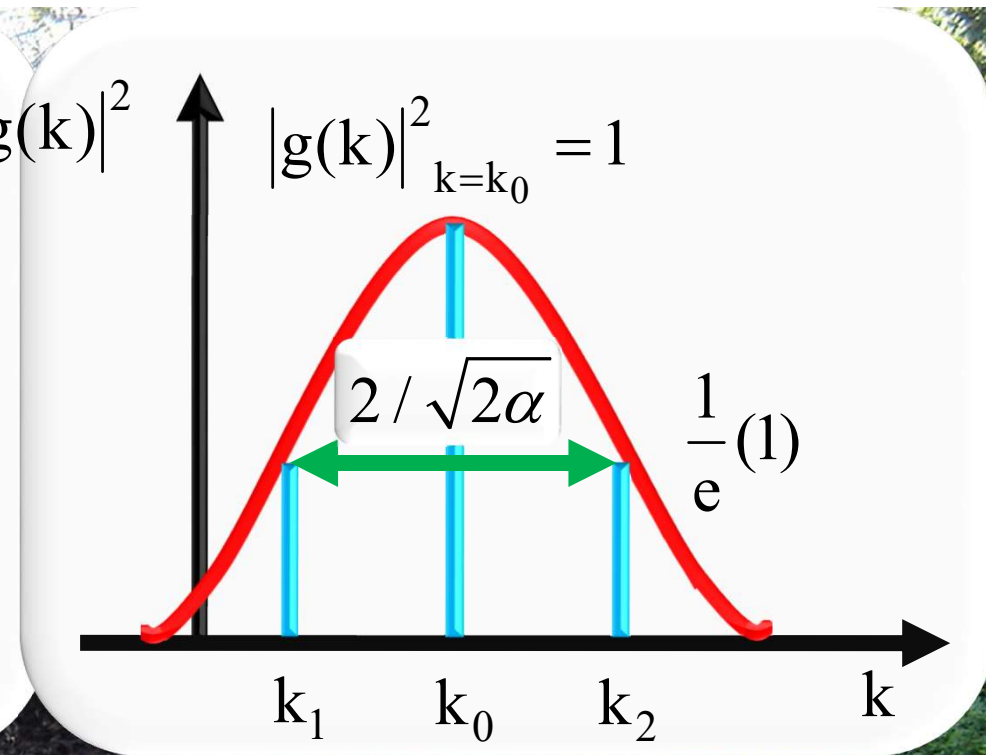
$$k_1 = k_0 - \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}, \quad k_2 = k_0 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

$$k_2 - k_1 = \Delta k = \frac{2}{\sqrt{2\alpha}}$$





$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2\sqrt{2\alpha}$$



$$k_2 - k_1 = \Delta k = 2/\sqrt{2\alpha}$$

آلفای بزرگتر منجر به پهنای بزرگتر و این خود منجر به تابع پهنتر می شود

آلفای کوچکتر منجر به پهنای کوچکتر و این خود منجر به تابع جایگزیده تر می شود

آلفای بزرگتر منجر به پهنای کوچکتر و این خود منجر به تابع جایگزیده تر می شود

آلفای کوچکتر منجر به پهنای بزرگتر و این خود منجر به تابع پهنتر می شود

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2\sqrt{2\alpha}$$

$$k_2 - k_1 = \Delta k = 2/\sqrt{2\alpha}$$

$$\Delta k \Delta x = (2/\sqrt{2\alpha})(2\sqrt{2\alpha}) = 4$$

$$\Delta k \Delta x = 4$$

فضای k عکس فضای
حقیقی x رفتار می کند

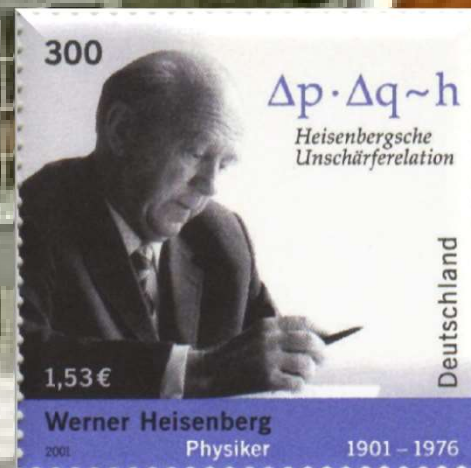
$$\Delta k \Delta x \geq O(1)$$



حاصل ضرب فوق مستقل از α است

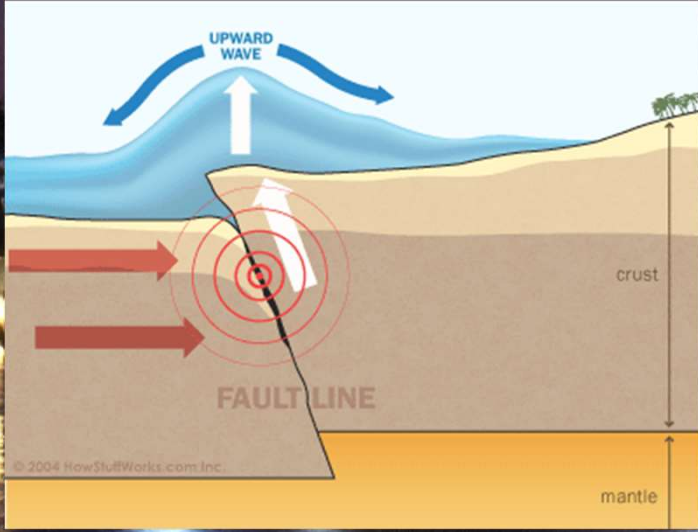
اگرچه این پدیده یک ویژگی کلی بسته های موج است،

اما به زودی خواهیم دید که این پدیده به یک مفهوم عمیق در مکانیک کوانتومی اشاره می کند

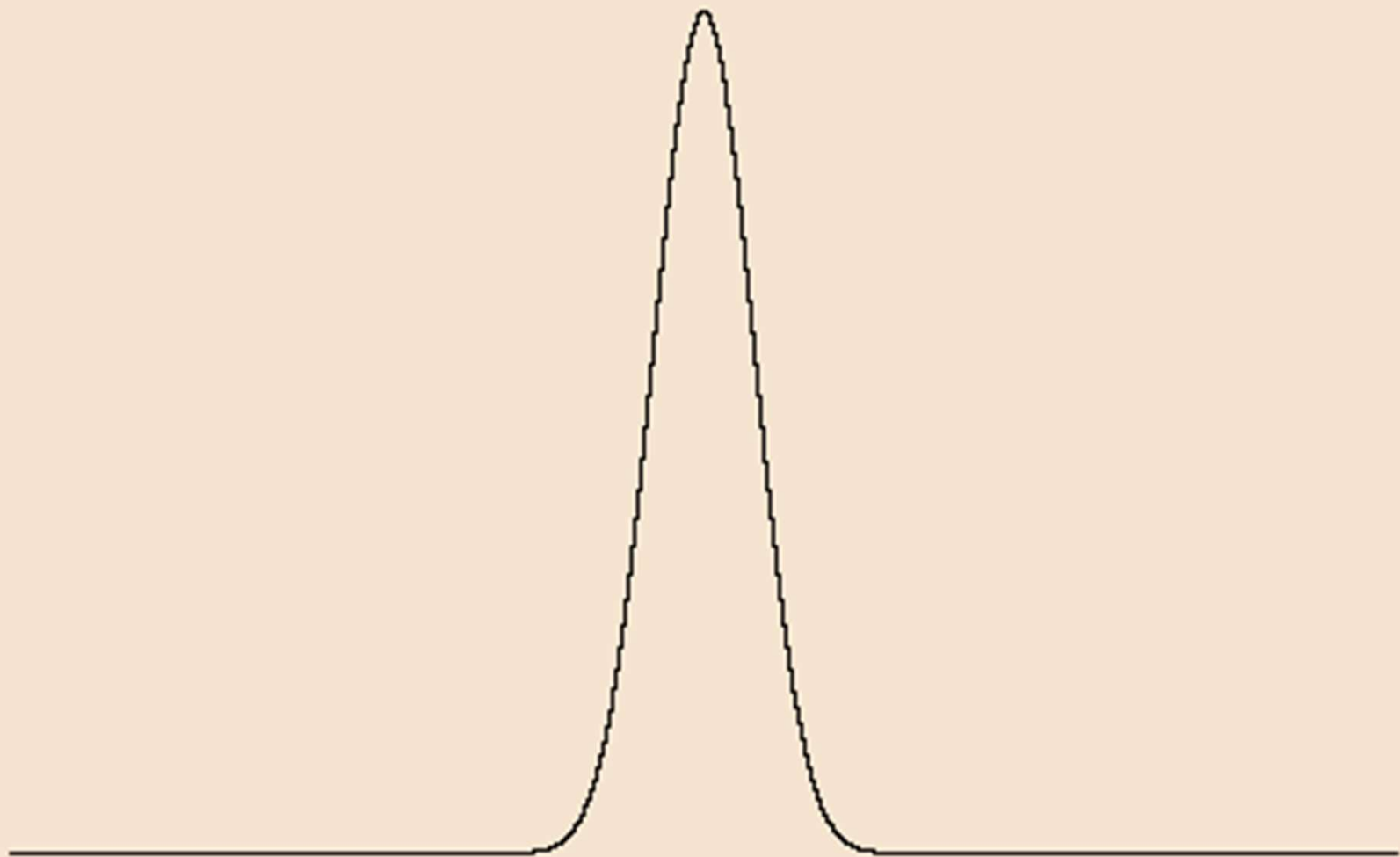




How Tsunamis Work: Tsunamigenesis



0.000 T_{rev}

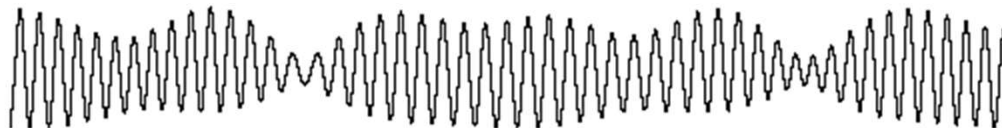




0.0000 T_{rev}

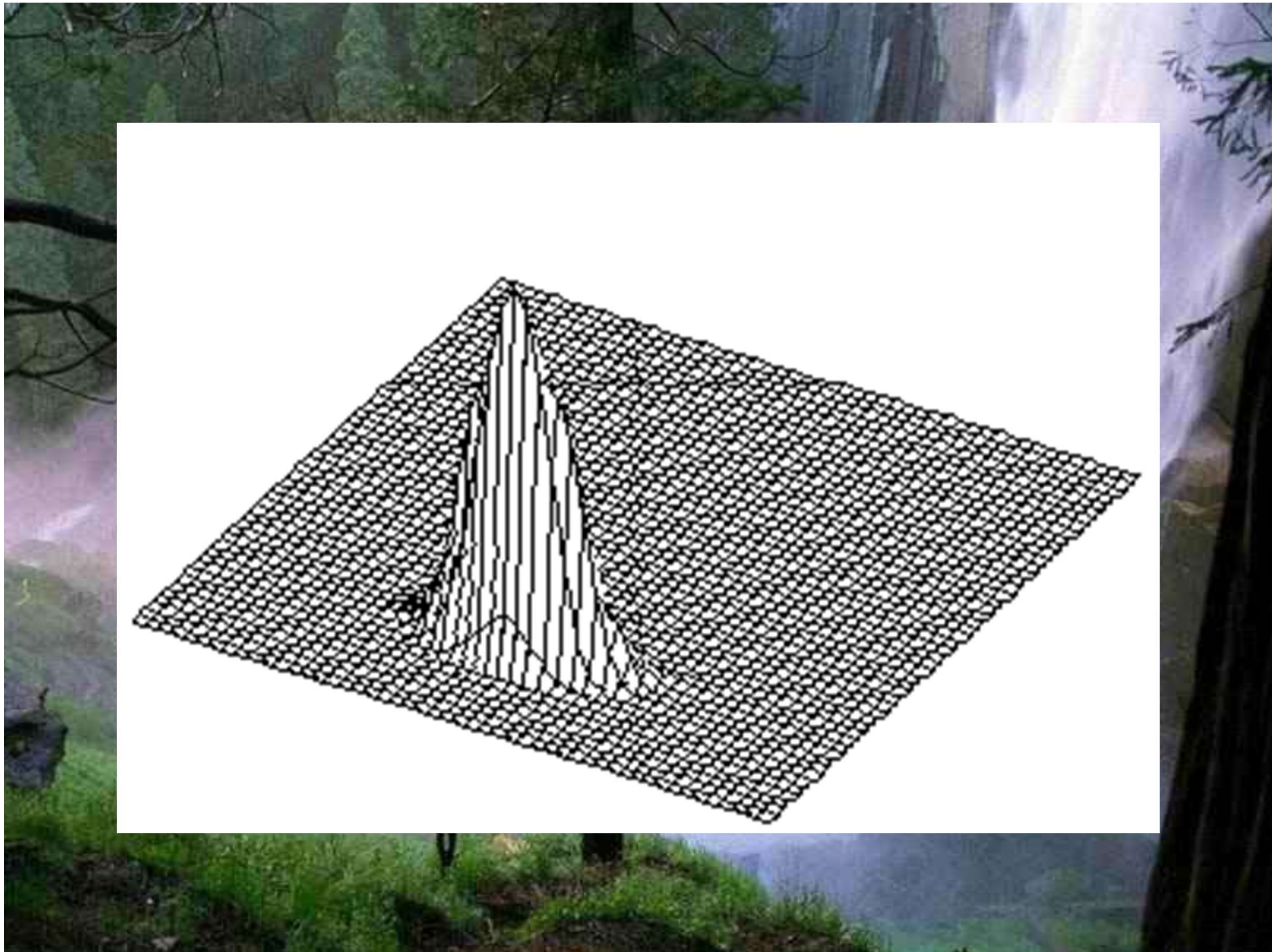


0.2288 T_{rev}

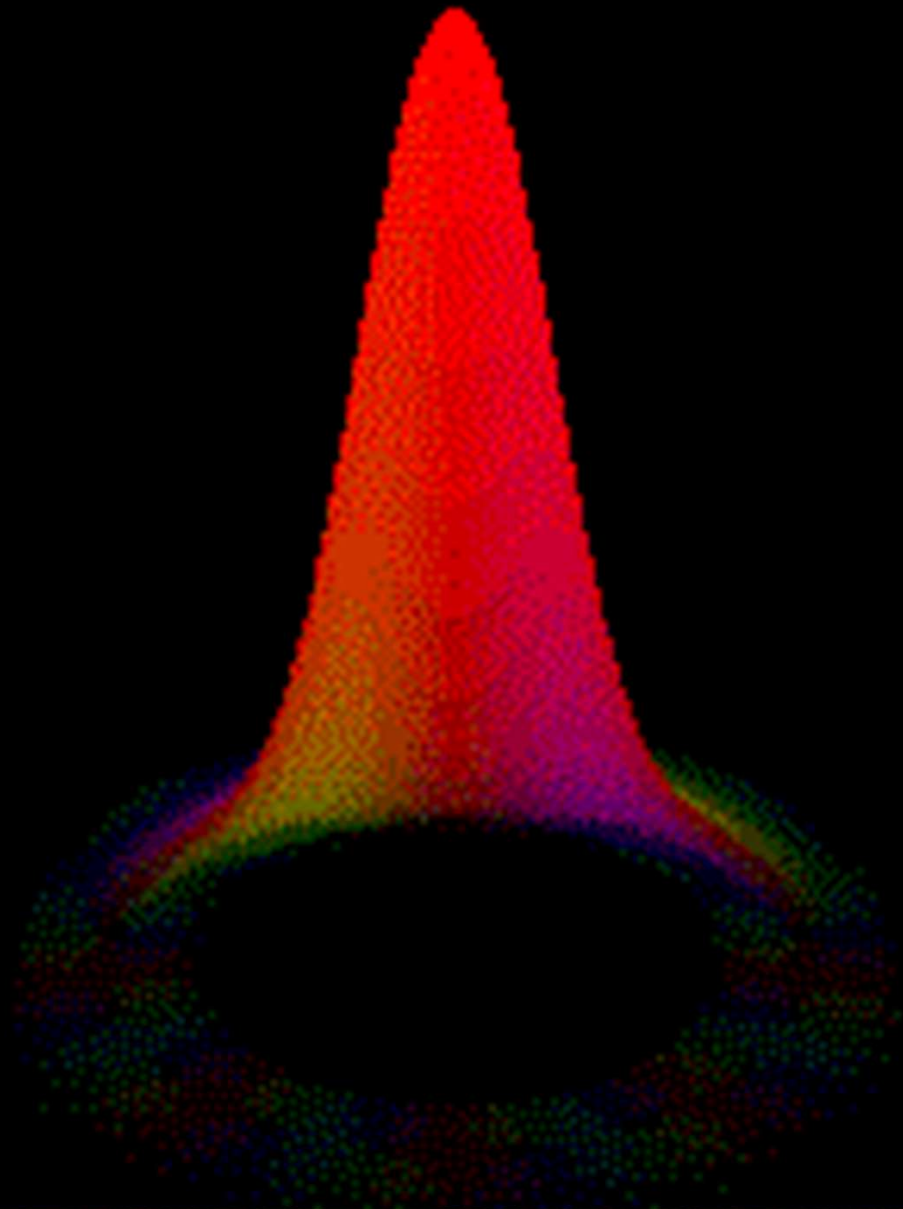








0.00 T_K





چگونه یک بسته موج انتشار می یابد؟

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{ikx}$$

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{ik(x-ct)} = f(x - ct)$$

$$f(x, t) = f(x - ct) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{ik_0(x-ct)} e^{-\frac{(x-ct)^2}{4\alpha}}$$

$$|f(x, t)|^2 = \frac{\pi}{\alpha} e^{-[(x-ct)^2/2\alpha]}$$

بنابراین بسته موج با سرعت c بدون تغییر شکل انتشار می یابد

این بدان معنی است که اگر بسته موج در ابتدا در $x=0$ جایگزیده باشد، در لحظه t در $x=ct$ جایگزیده باقی خواهد ماند

یعنی قله بسته موج با سرعت c حرکت می کند

اما باید توجه نمود که نتیجه فوق فقط وقتی صحیح است که $\omega = kc$ باشد

اگر $\omega \neq kc$ باشد، یعنی بر حسب k لزوما خطی نباشد

بسته موج چگونه انتشار می یابد؟

در این حالت فرض می کنیم که بسته موج در فضای k یک تابع دلخواه منتهی جایگزیده باشد که این خود منجر به یک پارامتر آلفای بزرگ می شود

با استفاده از فرض فوق می توان ω را حول k_0 به صورت زیر بسط تیلور داد

$$\omega(k) \cong \omega(k_0) + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k_0} (k - k_0)^2$$

بنابراین با فرض فوق بسته موج در فضای x جایگزیده نیست

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

این فرض کلیت مساله را از دست نمی دهد و فقط باعث ساده شدن محاسبات می شود، زیرا

$$g(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2} \quad k - k_0 = k'$$

تمرین 2) ثابت کنید که:

$$f(x,t) = e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \left(\frac{\pi}{\alpha + i\beta t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-[(x - v_g t)^2 / 4(\alpha + i\beta t)]}$$

که در آن

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} \quad \& \quad \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k_0}$$

$$|f(x,t)|^2 = \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2 + \beta^2 t^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-[\alpha(x - v_g t)^2 / 2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)]}$$

$$|f(x,t)|^2 = \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2 + \beta^2 t^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-[\alpha (x-v_g t)^2 / 2 (\alpha^2 + \beta^2 t^2)]}$$

رابطه فوق معرف یک بسته موج است که قله آن با سرعت گروه v_g حرکت می کند
اما در این حالت بر خلاف حالت $\omega = kc$ شکل بسته موج ثابت باقی نمی ماند
بلکه با زمان تغییر پیدا می کند

برای حالت $\omega = kc$ داشتیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{ik_0 x} e^{\frac{-x^2}{4\alpha}}$$

$$f(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{ik_0 (x-ct)} e^{\frac{-(x-ct)^2}{4\alpha}}$$

$$|f(x)|^2 = \frac{\pi}{\alpha} e^{\frac{-x^2}{2\alpha}}$$

$$|f(x,t)|^2 = \frac{\pi}{\alpha} e^{-[(x-ct)^2 / 2\alpha]}$$

پهنای بسته موج را برای حالت $\omega = kc$ به صورت زیر به دست آورده بودیم

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2\sqrt{2\alpha} \propto \sqrt{\alpha}$$

حال با مقایسه دو فرمول زیر می توانیم پهنای بسته موج را برای حالت $\omega \neq kc$ نیز به دست آوریم:

$$|f(x)|^2 = \frac{\pi}{\alpha} e^{\frac{-x^2}{2\alpha}}$$



$$\Delta x \propto \sqrt{\alpha}$$

$$|f(x,t)|^2 = \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2 + \beta^2 t^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-[\alpha (x-v_g t)^2 / 2 (\alpha^2 + \beta^2 t^2)]}$$

$$|f(x,t)|^2 = \frac{\pi}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2}}} e^{-[\alpha (x-v_g t)^2 / 2 (\alpha^2 + \beta^2 t^2)]}$$



$$\Delta x \propto \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha}}$$

$$\frac{1}{e} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2 + \beta^2 t^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2 + \beta^2 t^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-[\alpha(x-v_g t)^2 / 2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)]}$$

$$\alpha(x-v_g t)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)$$

$$x^2 = 2\left(\alpha + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha}\right) \Rightarrow x_0 = \pm \sqrt{2\left(\alpha + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha}\right)}$$

$$\Delta x = 2\sqrt{2\left(\alpha + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha}\right)} = 2\sqrt{2\alpha} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2}}$$

Therefore the width varies by time.

Comparison with the value at $t = 0$ shows that the width, initially given by $2\sqrt{\alpha}$, now becomes $2\sqrt{\alpha + \beta^2 t^2 / \alpha} = 2\sqrt{\alpha} \sqrt{1 + \beta^2 t^2 / \alpha^2}$. The result is that the wave packet traveling with speed v_g *spreads* as time increases. When α is large, so that the packet is broad, the spreading is small. Nevertheless it is there, and this stands in the way of interpreting the wave packet as describing the particle itself.

یک ذره آزاد را در نظر بگیرید

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{p}{m}$$

$$E = \hbar \omega$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$\omega = \frac{p^2 / 2m}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar}$$

$$d\omega = \frac{p dp}{m \hbar}$$

$$\frac{d\omega}{dp} = \frac{p}{m \hbar}$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{p}{m}$$

$$p = \hbar k$$



FreeFoto.c

سرعت گروه و سرعت فاز

$$y_1 = A \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$y_2 = A \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$y = A[\sin(k_1 x - \omega_1 t) + \sin(k_2 x - \omega_2 t)]$$

$$y = 2A \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

$$k_1 \cong k_2 \equiv k$$

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = k_{av} \cong k_1 \text{ or } k_2 \equiv k$$

$$k_2 - k_1 = \Delta k$$

$$\omega_1 \cong \omega_2 \equiv \omega$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{av} \cong \omega_1 \text{ or } \omega_2 \equiv \omega$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta \omega$$

$$\Delta k \ll k$$

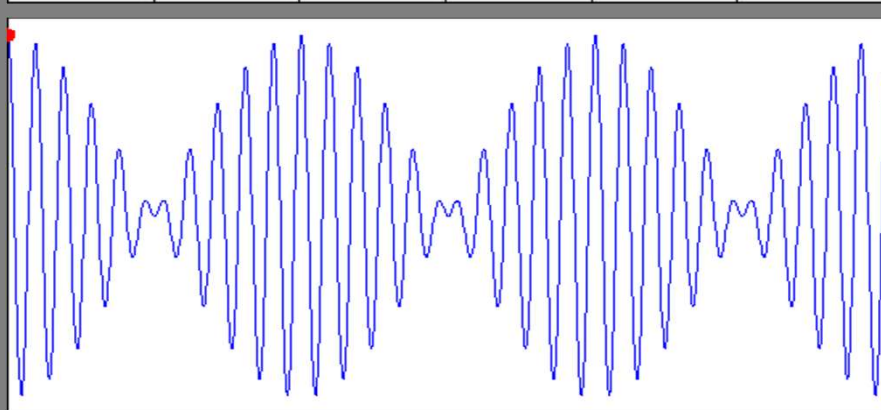
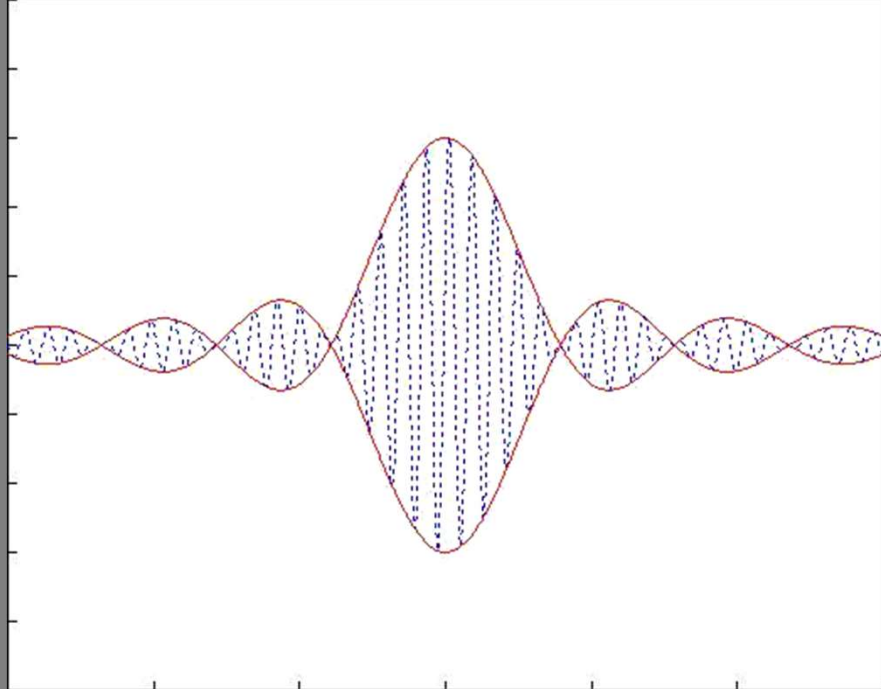
$$\Delta \omega \ll \omega$$

$$y = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \sin(x - \omega t)$$

$$v_g = \frac{\frac{\Delta \omega}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

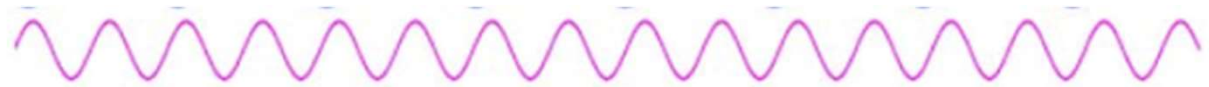
$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$



$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

تابع موج سینوسی با طول موج کوتاه

$$\lambda_{ph} = \frac{2\pi}{k}$$



$$\Delta k \ll k$$



$$\lambda_{ph} \ll \lambda_g$$

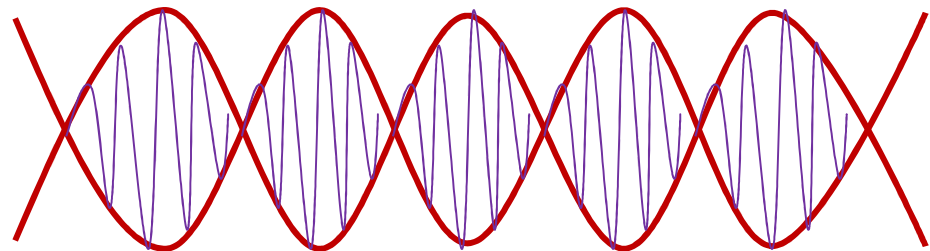
$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

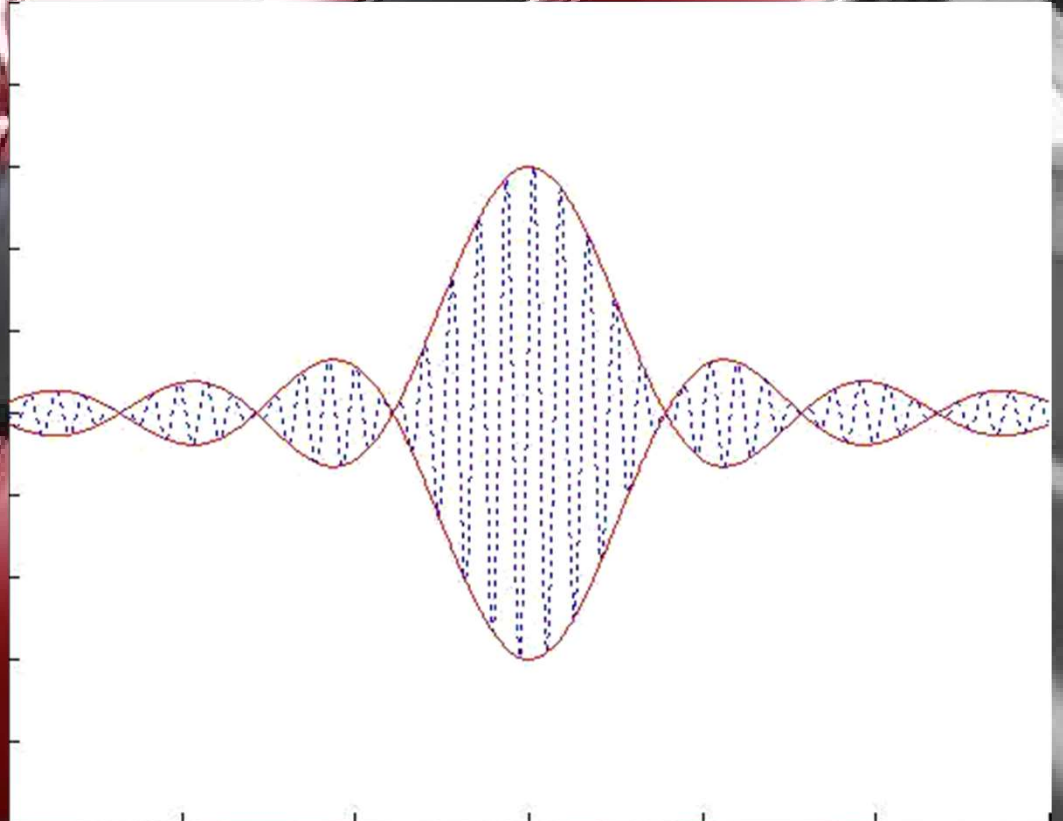


$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{4\pi}{\Delta k}$$

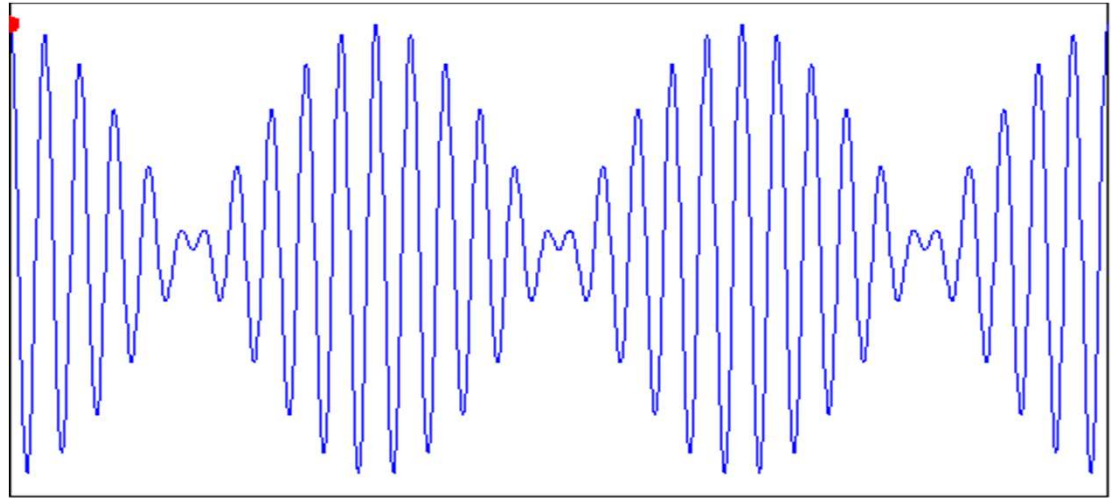
تابع موج یا پوش کوسینوسی با طول موج بلند

حاصل ضرب توابع سینوسی و کسینوسی

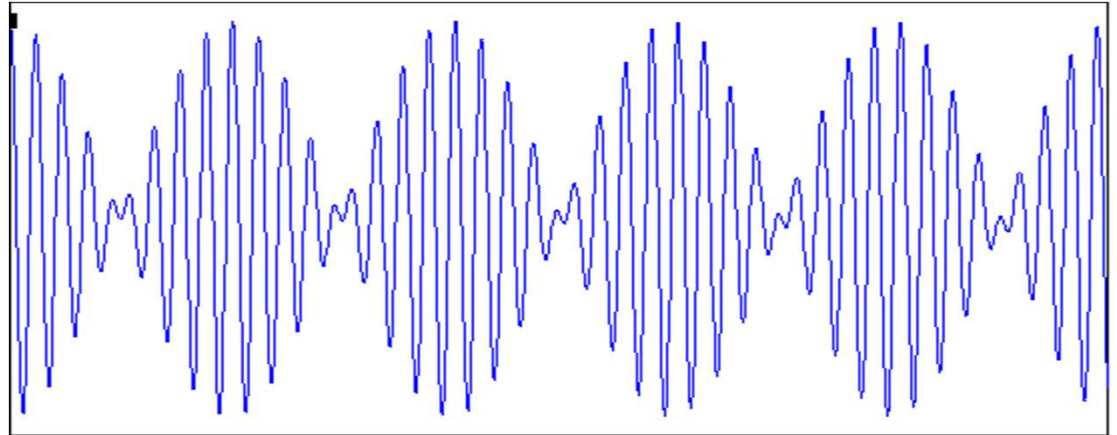




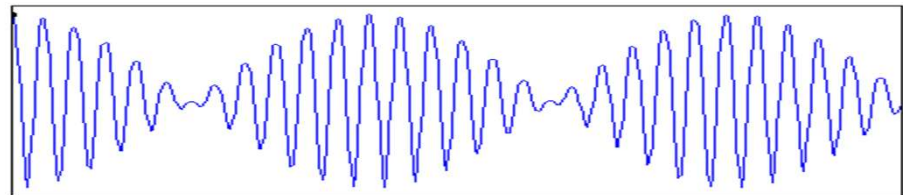
A wavepacket in a non-dispersive medium



A wavepacket having normal dispersion



A wavepacket having anomalous dispersion



تمرین 3: آیا سرعت فاز از سرعت گروه می تواند بزرگتر یا کوچکتر باشد؟

[https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_\(optics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_(optics))

For visible light, refraction indices n of most transparent materials (e.g., air, glasses) decrease with increasing wavelength λ :

$$1 < n(\lambda_{\text{red}}) < n(\lambda_{\text{yellow}}) < n(\lambda_{\text{blue}}),$$

or alternatively:

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0.$$

In this case, the medium is said to have *normal dispersion*. Whereas, if the index increases with increasing wavelength (which is typically the case in the ultraviolet^[4]), the medium is said to have *anomalous dispersion*.

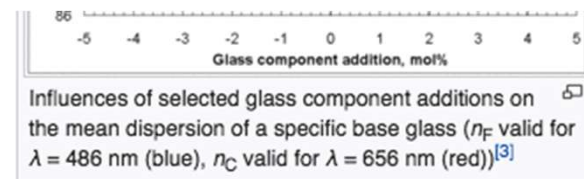
At the interface of such a material with air or vacuum (index of ~ 1), Snell's law predicts that light incident at an angle θ to the *normal* will be refracted at an angle $\arcsin(\frac{\sin \theta}{n})$. Thus, blue light, with a higher refractive index, will be bent more strongly than red light, resulting in the well-known *rainbow* pattern.

Group and phase velocity [\[edit\]](#)

Another consequence of dispersion manifests itself as a temporal effect. The formula $v = \frac{c}{n}$ calculates the *phase velocity* of a wave; this is the *velocity* at which the *phase* of any one frequency component of the wave will propagate. This is not the same as the *group velocity* of the wave, that is the rate at which changes in *amplitude* (known as the *envelope* of the wave) will propagate. For a homogeneous medium, the group velocity v_g is related to the phase velocity v by (here λ is the wavelength in vacuum, not in the medium):

$$v_g = \frac{c}{n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}} = \frac{v}{1 - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}}.$$

The group velocity v_g is often thought of as the velocity at which energy or information is conveyed along the wave. In most cases this is true, and the group velocity can be thought of as the *signal velocity* of the waveform. In some unusual circumstances, called cases of anomalous dispersion, the rate of change of the index of refraction with respect to the wavelength changes sign (becoming negative), in which case it is possible for the group velocity to exceed the speed of light ($v_g > c$). Anomalous



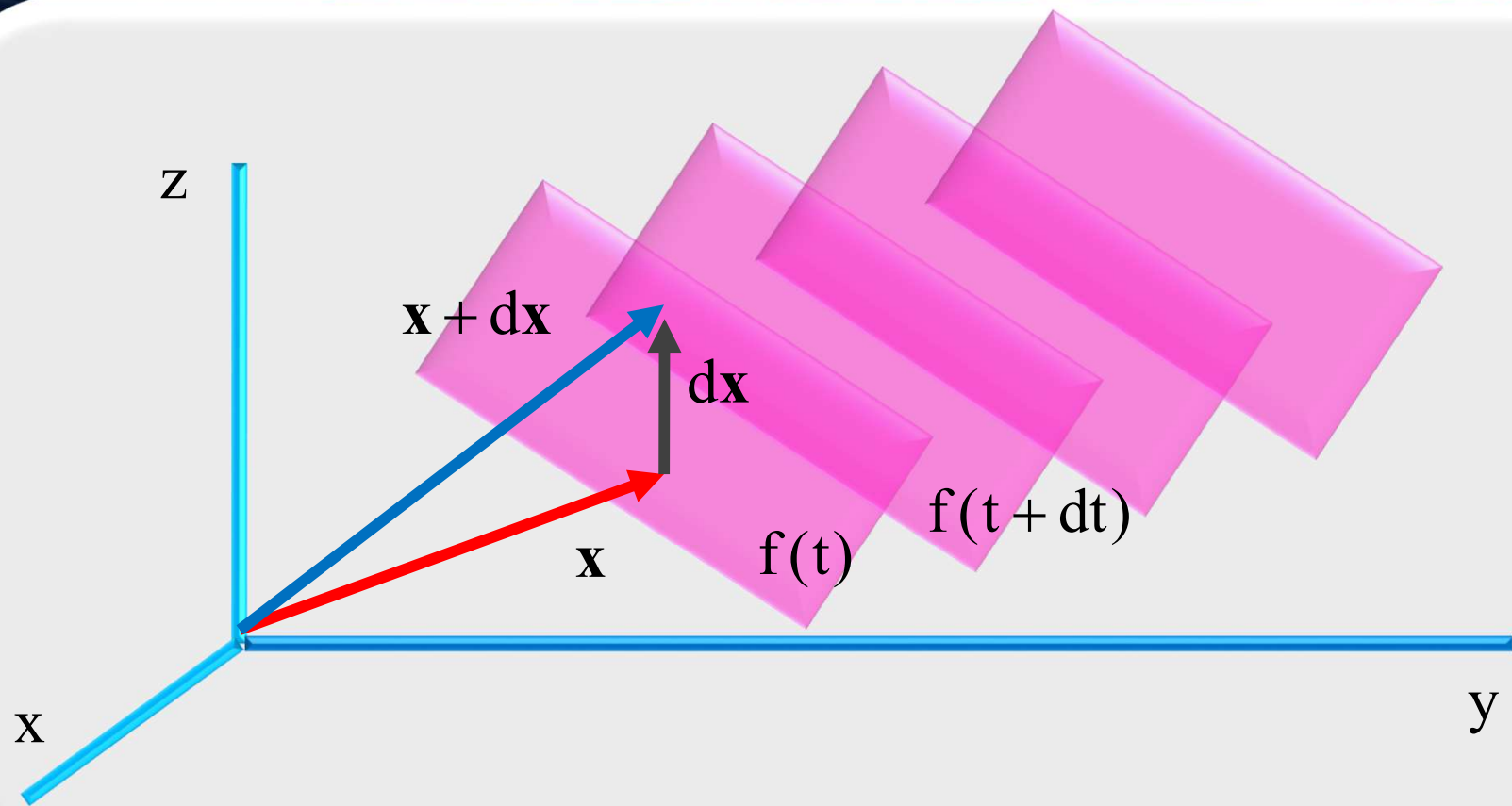
تمرین 4: فیلم آموزشی زیر را با دقت
نگاه کنید و خلاصه ای از آن را بنویسید

<https://www.youtube.com/watch?v=CtFSovvN19g>



$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$\Phi(x, t) = kx - \omega t$$



$$df(x, t) = f(x + dx, t + dt) - f(x, t) = c - c = 0$$

$$df(x, t) = \nabla f \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

$$|dx| = \frac{\mp \frac{\partial f}{\partial t} dt}{|\nabla f|}$$

$$\nabla f \cdot dx = \pm |\nabla f| |dx|$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{|dx| \hat{n}}{dt}$$

$$\pm |\nabla f| |dx| = - \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$\hat{n} = \frac{\pm \nabla f}{|\nabla f|}$$

$$|dx| = \frac{\mp \frac{\partial f}{\partial t} dt}{|\nabla f|}$$

$$v = \frac{- \frac{\partial f}{\partial t} \nabla f}{|\nabla f|^2}$$

سرعت سطح موج یک تابع سینوسی

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$|\nabla f|^2 = A^2 k^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

$$v = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t} \nabla f}{|\nabla f|^2}$$

$$v = \frac{A \omega A k \cos^2(kx - \omega t) \hat{i}}{A^2 k^2 \cos^2(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -A \omega \cos(kx - \omega t)$$

$$v = \frac{\omega}{k} \hat{i}$$

$$\nabla f = A k \cos(kx - \omega t) \hat{i}$$

سرعت فاز یک تابع سینوسی

$$\Phi(x, t) = kx - \omega t$$

$$|\nabla\Phi|^2 = k^2$$

$$v = \frac{-\frac{\partial\Phi}{\partial t} \nabla\Phi}{|\nabla\Phi|^2}$$

$$v = \frac{\omega k}{k^2} \hat{i}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\omega$$

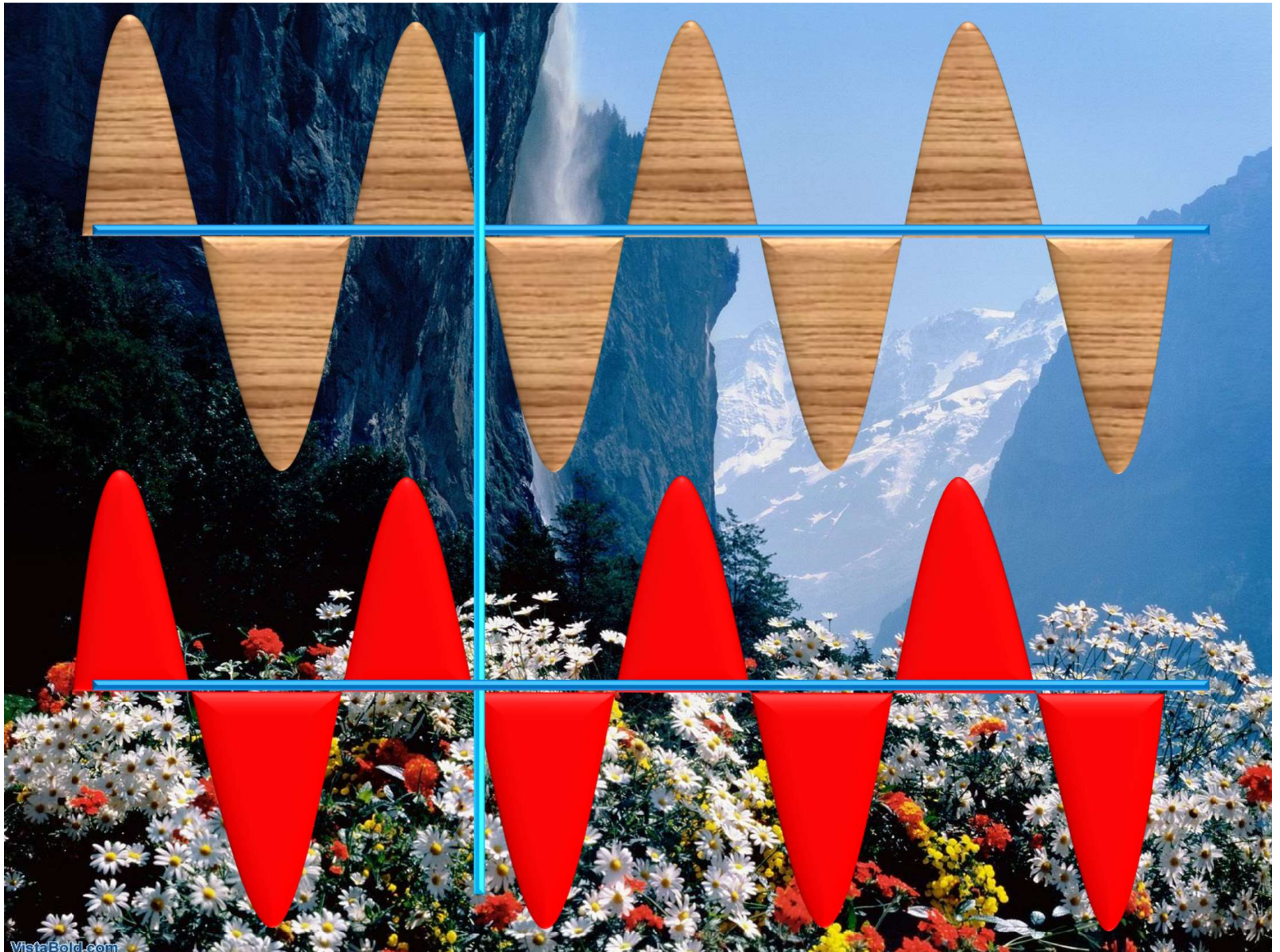
$$v = \frac{\omega}{k} \hat{i}$$

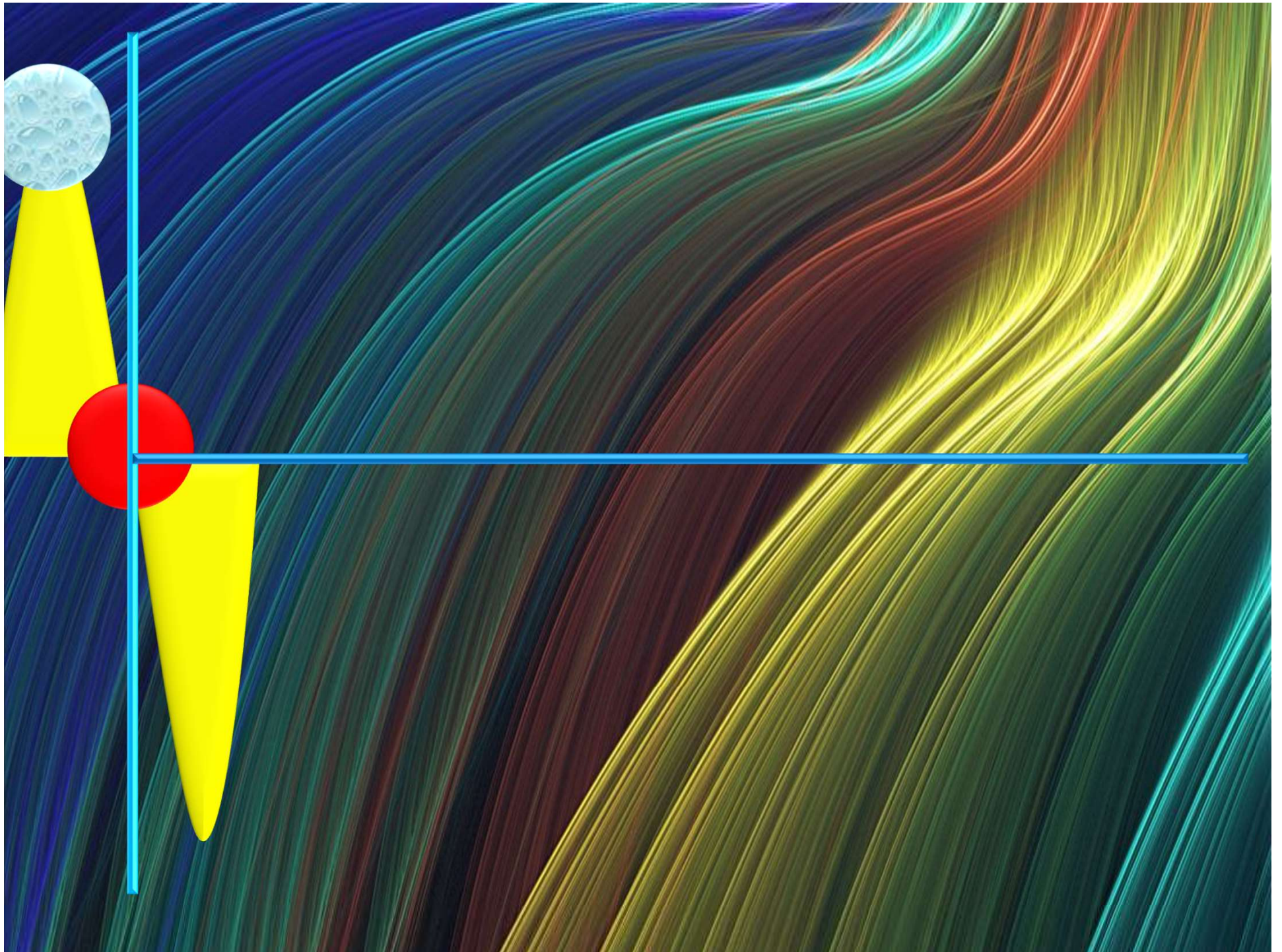
$$\nabla\Phi = k\hat{i}$$

که با سرعت جبهه موج آن برابر است.

تمرین 5) سرعت فاز و سرعت جبهه
موج یک موج کروی را بدست آورید
و نشان دهید که با یکریگر تفاوت
دارند.

تمرین 6) نشان دهید که در حالت کلی
سرعت فاز و سرعت جبهه موج امواج
تخت $f(kx-\omega t)$ با یکریگر برابرند.







$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \Phi(p) e^{i(px - Et)/\hbar}$$

$$k = \frac{p}{\hbar}$$

$$k \longleftrightarrow p$$

تمرین 7) ثابت کنید که تابع موج فوق در معادله شرودینگر زیر صدق می کند:

$$E = \hbar\omega$$

$$E \longleftrightarrow \omega$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$$

در مکانیک کلاسیک هیچ گونه توضیحی برای تناظرهای فوق وجود ندارد

رابطه فوق فقط یک حدس است و نه چیز بیشتری

$$\Psi(x, t) = N \int_{-\infty}^{\infty} dp \Phi(p) e^{i(px - Et)/\hbar}$$

معادله فوق را می توان به حالتی که در آن یک پتانسیل خارجی نیز وجود داشته باشد تعمیم داد

$$\Delta k \Delta x \geq 1$$

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p}$$

$$\hbar \Delta k \Delta x \geq \hbar$$

$$\Delta x \geq \frac{6.63 \times 10^{-34} / 2\pi \times 10^4 \times 10^3}{10^{-6}} \approx 10^{-21} \text{ cm}$$

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

حال یک الکترون را در نظر
بگیرید و نشان دهید که به اصل
عدم قطعیت نیاز داریم.



یک ذره غبار را در نظر بگیرید و
نشان دهید که نیازی به اصل عدم
قطعیت برای آن نیست.

$$\Delta p \approx p \approx \frac{mc\alpha}{n} \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

$$m \approx 10^{-4} \text{ gr}$$

$$v \approx 10^4 \text{ cm / s}$$

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

$$\Delta x = \frac{\hbar n}{m c \alpha}$$

$$\Delta p \approx 10^{-6} \text{ grcm/sec}$$

$$\Delta x \approx a_0 \approx 0.5 \text{ \AA}$$



$$\Delta k \Delta x \geq 1$$

$$\hbar k = p$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{2\pi \Delta \lambda}{\lambda^2} \Delta x \geq 1$$



$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$



$$|\Delta k| = \frac{2\pi \Delta \lambda}{\lambda^2}$$



$$\Delta x \Delta \lambda \geq \frac{\lambda^2}{2\pi}$$

$$\Delta \omega \Delta t \geq 1$$

$$\hbar \omega = E$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{2\pi \Delta T}{T^2} \Delta t \geq 1$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$2\pi \Delta f \Delta t \geq 1$$



$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$



$$|\Delta \omega| = \frac{2\pi \Delta T}{T^2}$$



$$\Delta T \Delta t \geq \frac{T^2}{2\pi}$$



$$\Delta \omega = 2\pi \Delta f$$



$$\Delta f \Delta t \geq \frac{1}{2\pi}$$



تمرین 8) تستهای پنج سال گذشته
مرتبط با مباحث مطرح شده در این
فصل را یافته و حل کنید.

تست 1: اگر عدم قطعیت در تعیین انرژی یک ذره آزاد به جرم m که در راستای x حرکت می کند از مرتبه انرژی آن باشد در این صورت کدام گزینه برای عدم قطعیت در تعیین مکان ذره صحیح است؟

$$2) \quad \Delta x \approx x$$



$$1) \quad \Delta x \geq \sqrt{\frac{2}{m E}} \hbar$$

$$3) \quad \Delta x \leq \frac{\hbar}{\sqrt{2 m E}}$$

$$3) \quad \Delta x \approx 0$$

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

$$\Delta p = \sqrt{2m} \frac{\Delta E}{2\sqrt{E}} = \sqrt{2m} \frac{E}{2\sqrt{E}} = \sqrt{\frac{mE}{2}}$$

$$E = T = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Delta p \Delta x = \sqrt{\frac{mE}{2}} \Delta x \geq \hbar$$

$$p = \sqrt{2mE}$$

$$\Delta x \geq \hbar \sqrt{\frac{2}{mE}}$$

تست 2: ذره ای در یک بعد تحت پتانسیل $V(x)=A|x|$ قرار دارد. A عدد ثابتی است. انرژی حالت پایه این ذره با استفاده از اصل عدم قطعیت چه تابعی از A است؟

4) $A^{4/3}$

3) $A^{2/3}$

2) $A^{1/3}$

1) A

$$E = \frac{p^2}{2m} + v(x) = \frac{p^2}{2m} + A|x|$$

$$\Delta E = \frac{p\Delta p}{m} + A\Delta x$$

$$E \geq \Delta E$$

$$E \geq \frac{p\Delta p}{m} + A\Delta x$$

$$p \geq \Delta p$$

$$E \geq \frac{(\Delta p)^2}{m} + A\Delta x$$

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

$$\Delta p \geq \hbar / \Delta x$$

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} + A\Delta x$$

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} + A|\Delta x|$$

$$\frac{dE}{d(\Delta x)} = 0$$

$$\frac{-\hbar^2}{m(\Delta x)^3} + A = 0$$

$$\Delta x = \left(\frac{\hbar^2}{mA} \right)^{1/3}$$

$$E_{\text{ground}} = \frac{\hbar^2}{2m \left(\frac{\hbar^2}{mA} \right)^{2/3}} + A \left(\frac{\hbar^2}{mA} \right)^{1/3}$$

$$E_{\text{ground}} = \frac{\hbar^{2/3}}{2m^{1/3}} (A)^{2/3} + \frac{\hbar^{2/3}}{m^{1/3}} (A)^{2/3}$$

$$E_{\text{ground}} = \frac{3}{2} \frac{\hbar^{2/3}}{m^{1/3}} (A)^{2/3}$$

$$E_{\text{ground}} \propto A^{2/3}$$

$$V(x) = A|x|$$

$$4) \quad A^{4/3}$$



$$3) \quad A^{2/3}$$

$$2) \quad A^{1/3}$$

$$1) \quad A$$

تست 3: سرعت فاز متناظر وابسته به یک ذره آزاد نسبیتی که با سرعت v و عدد موج k حرکت می کند کدام است؟

4) c

3) $c^2 \frac{p}{E}$

2) v

1) $c \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2 k^2}}$



$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

$$v_{ph} = \frac{E}{p} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} / p$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$v_{ph} = \frac{E}{p} = \sqrt{c^2 + \frac{m_0^2 c^4}{p^2}} = c \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2 k^2}}$$

تست 4: سرعتهای فاز و گروه یک الکترون نسبیتی که طول موج دو بروی وابسته به آن $0.01 \text{ \AA}$ می باشد به ترتیب کدام است؟ ($\hbar c = 2 \times 10^{-13} \text{ MeV-m}$)



4) $0.925c, 1.08c$

3) $0.9c, 0.925c$

2) $0.4c, 0.8c$

1) $0.85c, 0.4c$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = \sqrt{(1.256)^2 + (0.511)^2} = 1.357 \text{ MeV}$$

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}$$

$$v_{ph} = \frac{E}{p} = \frac{1.357}{\frac{1.256}{c}} = 1.08c$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$v_{gr} = \frac{dE}{dp} = \frac{1/2(2pc^2)}{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} = \frac{pc^2}{E}$$

$$pc = \frac{\hbar c}{\lambda} = \frac{2\pi \times 2 \times 10^{-13} (\text{MeV-m})}{0.01 \times 10^{-10} (\text{m})}$$

$$pc = 4\pi \times 10^{-1} = 0.4\pi \text{ MeV} = 1.257 \text{ MeV}$$

$$v_{gr} = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc \cdot c}{E} = \frac{1.257c}{1.357} = 0.926c$$

تست 5: v_g سرعت گروه بسته موج مربوط به یک ذره است. اگر v_g ثابت باشد، در خصوص پخش شدن بسته موج و مکان در لحظه t (نسبت به مکان ذره در $t=0$) چه می توان گفت؟



(1) پخش نمی شود و مکان آن به اندازه $v_g t$ جابه جا می شود.

(2) پخش می شود و مکان آن به اندازه $v_g t$ جابه جا می شود.

(3) پخش می شود و مکان آن ثابت است.

(4) پخش نمی شود و مکان آن ثابت است.

تست 6: توپی به جرم 0.2 کیلو گرم در یک جعبه مکعبی به ضلع 0.3 متر قرار دارد. مقدار کمینه انرژی این توپ کدام است؟

4) 10^{-19} joule

3) 10^{-31} joule

2) 10^{-34} joule

1) 10^{-67} joule



$$m = 0.2 \text{ kg}$$

$$\Delta x = 0.3 \text{ m}$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Delta E = \frac{p \Delta p}{m}$$

$$p \geq \Delta p$$

$$\Delta E \geq \frac{(\Delta p)^2}{m}$$

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

$$\Delta p \geq \hbar / \Delta x$$

$$E \geq \Delta E \geq \frac{\hbar^2}{m(\Delta x)^2}$$

$$E_{\min} = \frac{(6.6 \times 10^{-34})^2}{0.2(0.3)^2} \approx 10^{-67}$$

تست 7: سرعت فاز متناظر وابسته به یک ذره آزاد نسبیتی که با سرعت v و عدد موج k حرکت می کند کدام است؟

4) c

3) $c^2 \frac{p}{E}$

2) v

1) $c \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2 k^2}}$



$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$v_{ph} = \frac{E}{p} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} / p$$

$$v_{ph} = \frac{E}{p} = \sqrt{c^2 + \frac{m_0^2 c^4}{p^2}} = c \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2 k^2}}$$

تست 8: نیوتن نشان داده است که سرعت فاز v_p امواج عمیق دریا با طول موج λ در رابطه $v_p = \sqrt{\frac{g \lambda}{2 \pi}}$ صدق می کند. (g شتاب گرانشی است).
 سرعت گروه این موجها چقدر است؟

4) $3/2 v_p$

3) $1/2 v_p$

2) $2 v_p$

1) v_p



$$v_p = \sqrt{\frac{g \lambda}{2 \pi}}$$

$$\omega^2 = g k$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g \lambda}{2 \pi}$$

$$2 \omega \, d\omega = g \, dk$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} = \frac{g}{2\sqrt{gk}} = \frac{1}{2} \sqrt{g/k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g \lambda}{2 \pi}} = \frac{1}{2} v_p$$