

Chapter Four

Eigenfunctions and Eigenvalues

معادله وابسته به زمان شرودینگر:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)$$

$$\Psi(x, t) = T(t)u(x)$$

$$i\hbar u(x) \frac{dT(t)}{dt} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) \right] T(t) \times \frac{1}{u(x)T(t)}$$

$$i\hbar \frac{dT(t)/dt}{T(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{u(x)} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x)$$

$$= \text{cte.} = E$$

فقط تابعی از زمان

فقط تابعی از مکان

$$i\hbar \frac{dT(t)/dt}{T(t)} = E$$

$$\ln \frac{T(t)}{C} = -\frac{iE}{\hbar} t$$

$$\frac{dT(t)}{T(t)} = -\frac{iE}{\hbar} dt$$

$$T(t) = C e^{-\frac{iE}{\hbar} t}$$

$$\int \frac{dT(t)}{T(t)} = -\frac{iE}{\hbar} \int dt$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{u(x)} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x) = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) = Eu(x)$$

معادله مستقل از زمان شرودینگر

معادله وابسته به زمان شرودینگر تحول زمانی $\Psi(x, t)$ را به دست می دهد.

معادله مستقل از زمان شرودینگر یک معادله ویژه مقدار است.

منظور از معادله ویژه مقدار چیست؟

در حالت کلی اثر یک عملگر روی یک تابع این است که آن تابع را به تابع دیگری تبدیل می کند.

چند مثال از چنین نگاشتهایی در زیر آورده شده است:

$$Of(x) = f(x) + x^2$$

$$Of(x) = [df(x)/dx]^3$$

$$Of(x) = [f(x)]^2$$

$$Of(x) = df(x)/dx - 2f(x)$$

$$Of(x) = f(3x^2 + 1)$$

$$Of(x) = \lambda f(x)$$

هر یک از عملگرهای فوق قاعده ای را بیان می کنند که اثر عملگر O را بر تابع $f(x)$ بیان می کند.

عملگرهای خطی را با L نمایش می دهیم تا با عملگر کلی O متفاوت باشد:

$$L[f_1(x) + f_2(x)] = Lf_1(x) + Lf_2(x)$$

$$Lcf(x) = cLf(x)$$

پس از لیست ارایه شده در اسلاید قبلی فقط دو تای پایینی آنها خطی هستند:

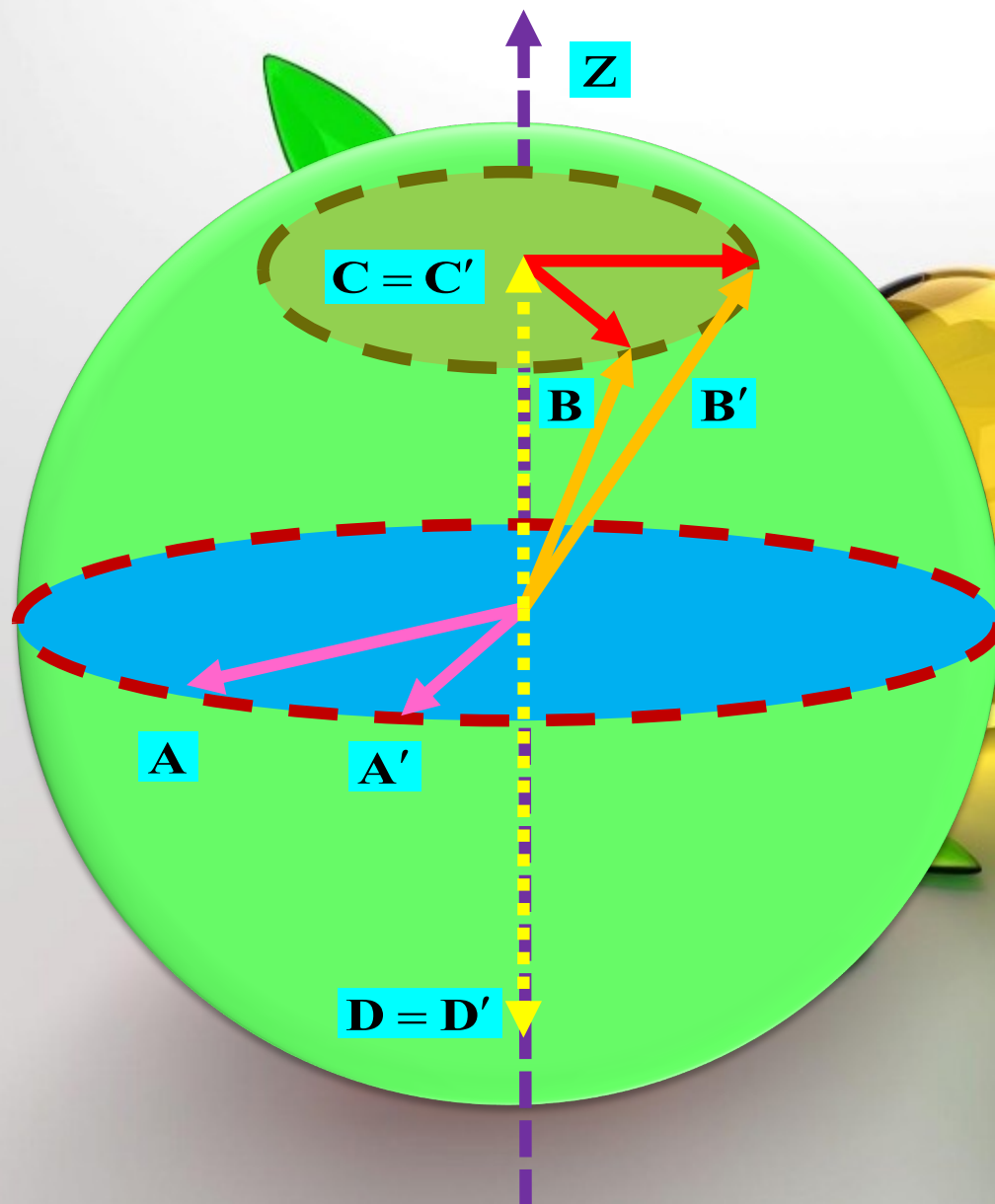
$$Lf(x) = \frac{df(x)}{dx} - 2f(x)$$

$$Lf(x) = \lambda f(x)$$

تمرین: ثابت کنید
که این دو عملگر
خطی هستند.

تعریف عملگر ضد خطی (antilinear operator):

$$Lcf(x) = c^* Lf(x)$$



اگر به توابع مانند بردارها نگریسته شود، آنگاه اثر یک عملگر تبدیل یک بردار به بردار دیگری خواهد بود. پس با مطالعه اثر یک عملگر روی یک بردار می توان از اثر آن بر روی بردارهای دیگر نیز اطلاعاتی حاصل کرد.

به عنوان مثال اگر عملگر مورد نظر عملگر دوران به اندازه زاویه 30 درجه حول محور Z-ها باشد، آنگاه:

(1) بردارهایی از قبیل B به B' تبدیل می شوند.

(2) بردارهایی از قبیل A به A' تبدیل می شوند.

(3) بردارهایی از قبیل C و D به C' و D' تبدیل می شوند.

بردارهای مثال 3 بردارهای خاصی هستند که به آنها بردارهای ویژه گویند.

معادله زیر نوع خاصی از معادله عملگری زیر است:

$$Hu_E(x) = Eu_E(x)$$

این معادله بیان می کند که دسته خاصی از توابع وجود دارند که اگر هامیلتونی روی آنها اثر کند به خودشان (با یک ضریب بزرگتر یا کوچکتر از واحد) باز می گردند.

این بدان معنی است که دسته خاصی از توابع وجود دارند که عملگر هامیلتونی قادر به چرخش آنها نیست و فقط طول آنها را می تواند تغییر دهد.

ما در مکانیک کوانتومی به چنین توابعی علاقه مند هستیم.

$$Hu_E(x) = E u_E(x)$$

مقدار ویژه (Eigenvalue)

تابع ویژه (Eigefunction)

خواهیم دید که ویژه مقادیر می توانند گسسته یا پیوسته باشند.

نکته: این تابع ویژه به مقدار E بستگی دارد و به همین دلیل اندیس E را می گذاریم.

معادله مستقل از زمان یک معادله خطی است

$$H u_E(x) = E u_E(x)$$

پس ترکیبی از هر جواب نیز یک جواب است.

لذا شکل کلی جواب را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Psi(x, t) = \left\{ \sum_E + \int dE \right\} C(E) u_E(x) e^{-iEt/\hbar}$$

مربوط به حالت های گسسته

مربوط به حالت های پیوسته

نکته: ویژه مقادیر عملگر هامیلتونی ویژه مقادیر انرژی نامیده می شوند، زیرا:

$$H = T + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

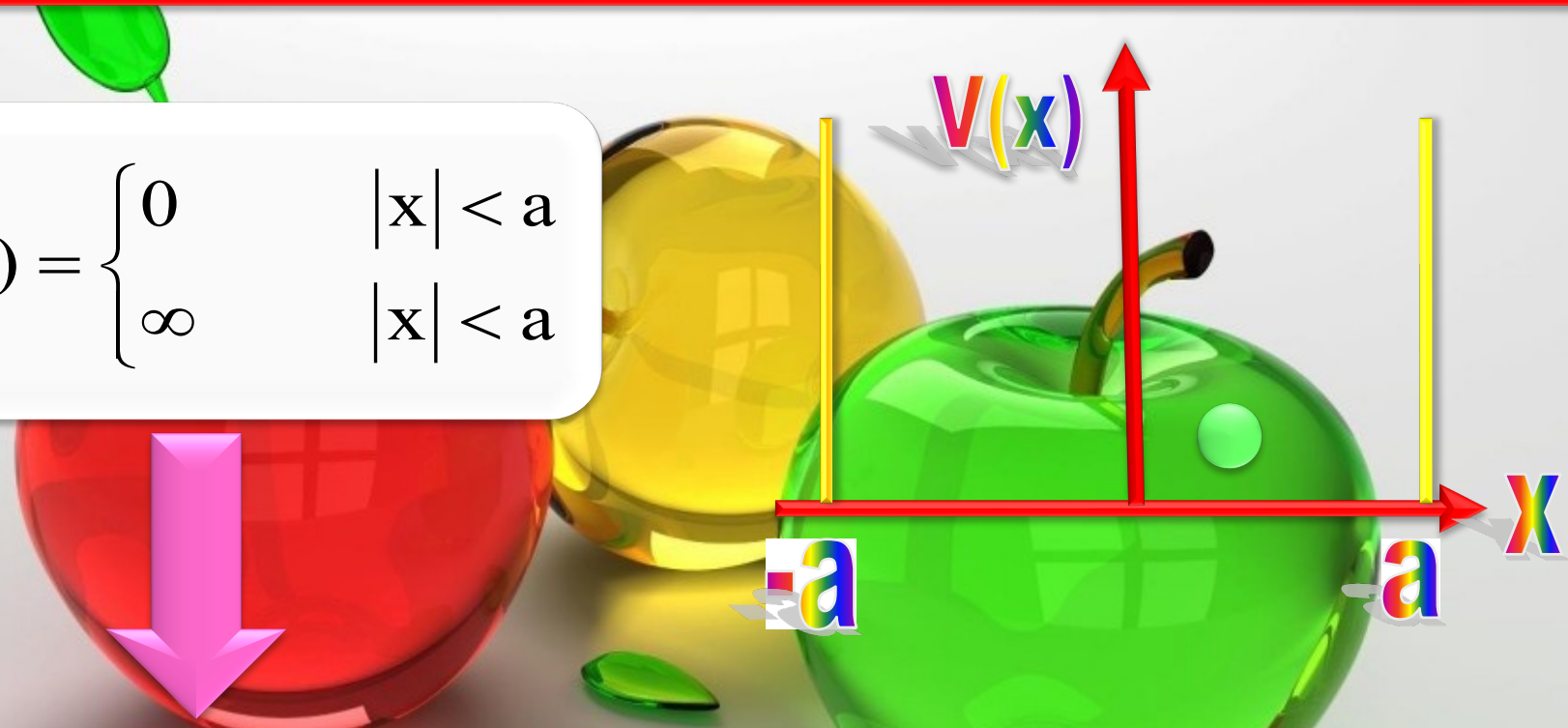
قبل از شروع یک مثال آموزنده مهم است که به نکته زیر توجه نماییم:

نکته: اگر پتانسیل تابعی از زمان باشد، آنگاه نمی توان متغیر زمانی را از متغیر مکانی جدا کرد.

در این صورت خواهیم دید که انرژی یک ثابت حرکت باقی نخواهد ماند.

ویژه مقادیر یک ذره در یک جعبه یک بعدی تحت پتانسیل زیر را به دست آورید:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ \infty & |x| \geq a \end{cases}$$



$$\forall |x| \geq a \longrightarrow u(x) = 0 \longrightarrow u(a) = u(-a) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = Eu(x)$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} u(x) = 0$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} u(x) = 0$$

$$k^2 = \frac{2m |E|}{\hbar^2}$$

$$2m |E| = p^2 \longrightarrow \frac{2m |E|}{\hbar^2} = \frac{p^2}{\hbar^2} = k^2$$

پس k همان عدد موج است.

نکته: انرژی E نمی تواند منفی باشد.

فرض کنید که $E < 0$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$E < 0 \longrightarrow |E| = -E \longrightarrow k^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - k^2 u(x) = 0$$



$$\begin{cases} e^{kx} \\ e^{-kx} \end{cases}$$

بنابراین کلی ترین جواب را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

ولی این کلی ترین جواب نمی تواند شرایط مرزی مساله را برآورده کند.

$$u(a) = u(-a) = 0$$

تمرین: نشان دهید که نمی توان ظرایب A و B را طوری تعیین کرد که شرایط مرزی مساله تامین شود.

بنابراین ویژه مقادیر فقط می توانند مثبت باشند.

$$E > 0 \longrightarrow k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k^2 u(x) = 0$$

$$\begin{cases} e^{ikx} \\ e^{-ikx} \end{cases}$$

بنابراین کلی ترین جواب را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \longrightarrow \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases}$$

جوابهای فوق می تواند شرایط مرزی مساله را برآورده کند.

$$\begin{cases} u^{(-)}(x) = A \sin kx \\ u^{(+)}(x) = B \cos kx \end{cases}$$

این جوابها می توانند شرایط مرزی مساله را برآورده کنند.

$$\begin{cases} u^{(-)}(a) = A \sin ka = 0 \longrightarrow ka = n\pi \longrightarrow k = \frac{n\pi}{a} \\ u^{(+)}(a) = B \cos ka = 0 \longrightarrow ka = (n - \frac{1}{2})\pi \longrightarrow k = \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{a} \end{cases}$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \longrightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(-)}(x) = A \sin kx \longrightarrow E_n^{(-)} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ u^{(+)}(x) = B \cos kx \longrightarrow E_n^{(+)} = \frac{\left[n - \frac{1}{2}\right]^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

تمرین: ثابت کنید که

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\begin{cases} u^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin kx \\ u^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos kx \end{cases}$$

علامت (+) به خاصیت زوج بودن و علامت (-) به خاصیت فرد بودن تحت انعکاس $x \rightarrow -x$ اشاره دارند.

تمرین: نشان دهید که جوابها دارای خاصیت بهنجارش یا Orthonormality هستند.

$$\int_{-a}^a dx u_m^{(+)}(x)^* u_n^{(+)}(x) = \int_{-a}^a dx u_m^{(-)}(x)^* u_n^{(-)}(x) = \delta_{mn}$$

$$\int_{-a}^a dx u_m^{(+)}(x)^* u_n^{(-)}(x) = \int_{-a}^a dx u_m^{(-)}(x)^* u_n^{(+)}(x) = 0$$

چون جوابها حقیقی هستند علامت (*) هم لازم نیست، ولی برای حفظ کلیت آن را حفظ کرده ایم.

کمترین مقدار انرژی مربوط به کدام
ویژه حالت (+) یا (-) است؟

پاسخ: مربوط به حالت (+) است

$$E_1^{(+)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

که به آن انرژی حالت زمینه یا حالت پایه (ground state)
می گویند.

$$E_1^{(+)} = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

$$E_1^{(-)} = \frac{(1)^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

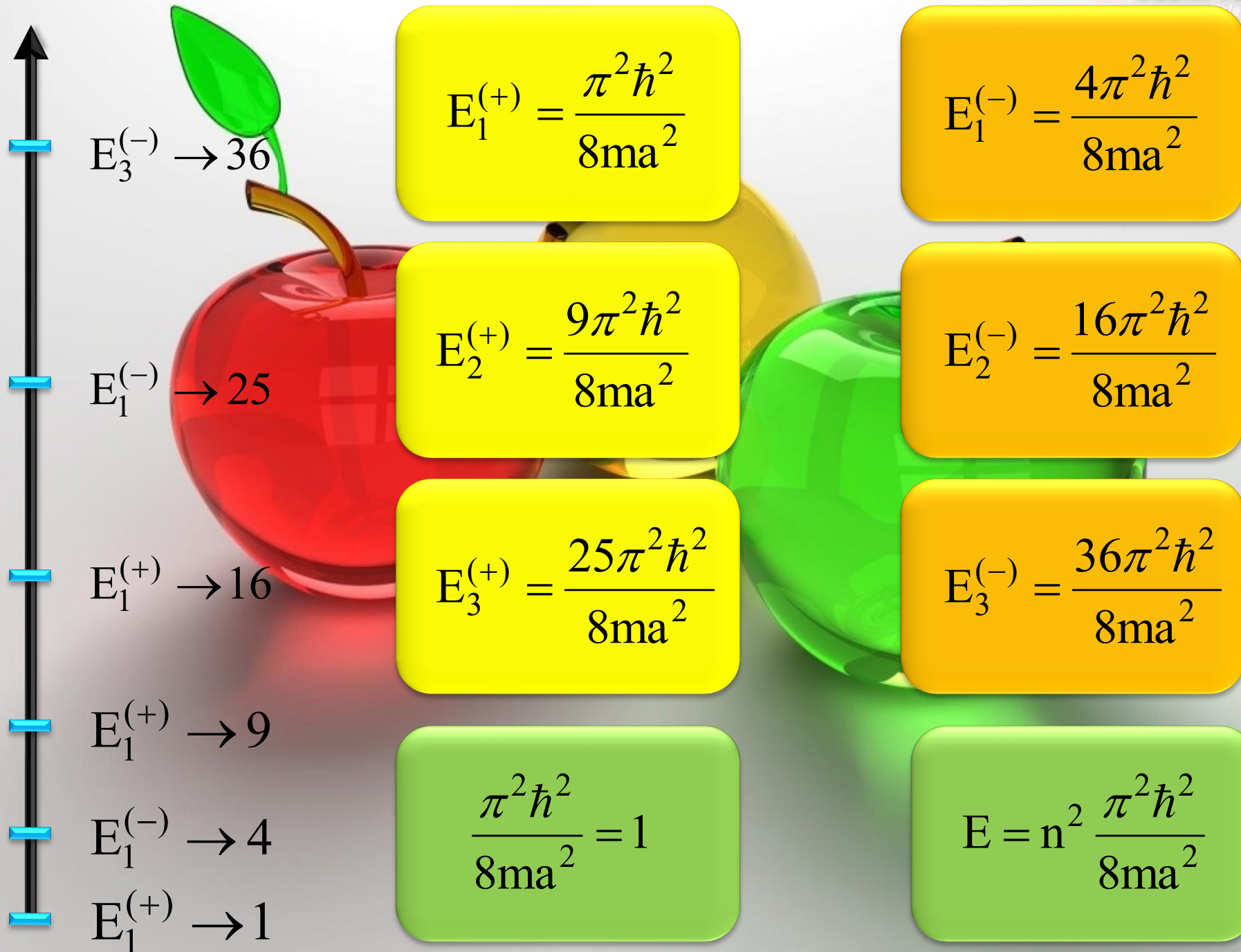
$$E_2^{(+)} = \frac{(2 - \frac{1}{2})^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

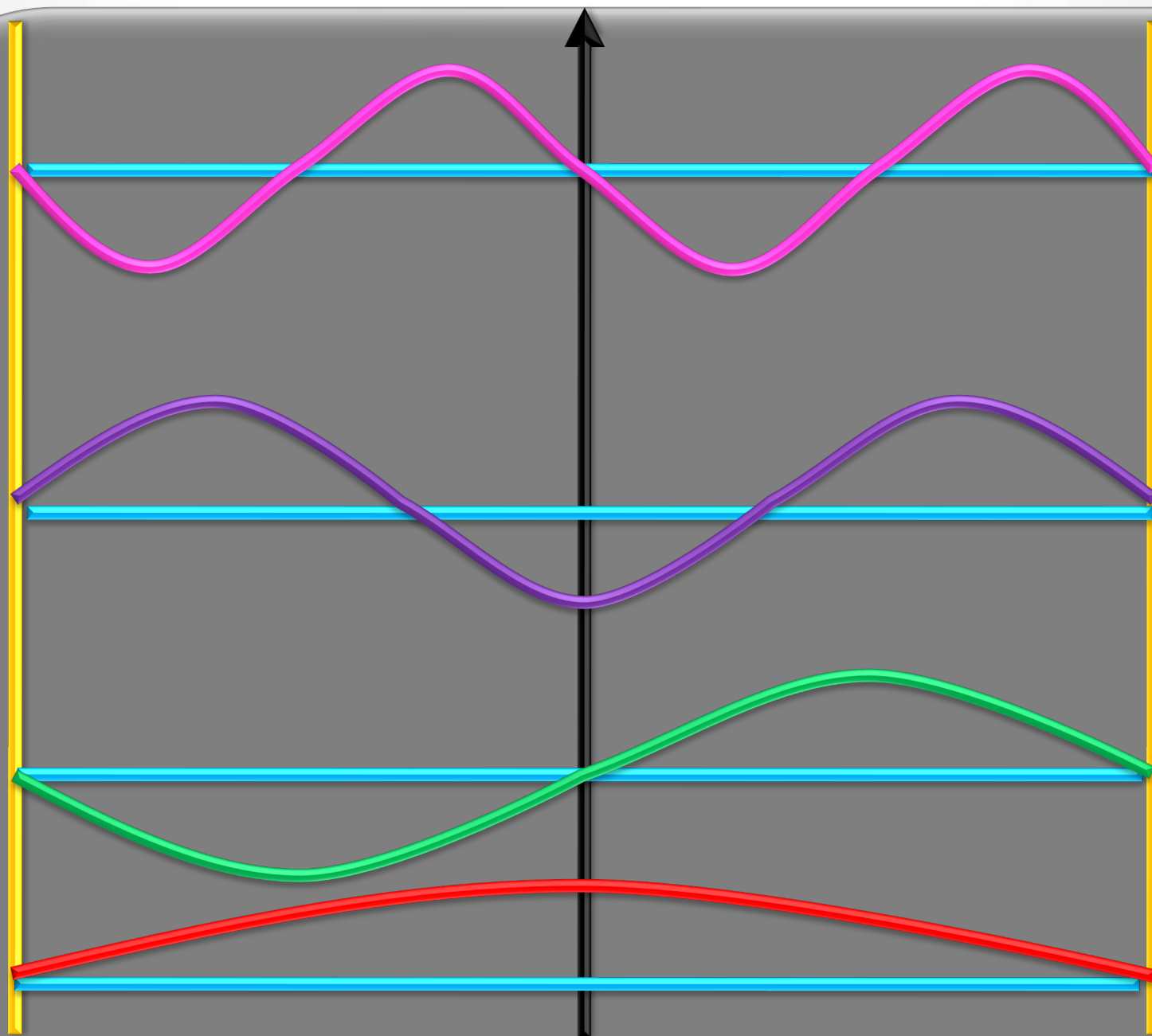
$$E_2^{(-)} = \frac{(2)^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{16\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

$$E_3^{(+)} = \frac{(3 - \frac{1}{2})^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{25\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

$$E_3^{(-)} = \frac{(3)^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{36\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} = 1$$





$x = -a$

$x = 0$

$x = a$

$$E_4 = 16 \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

$$E_3 = 9 \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

$$E_2 = 4 \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

جوابهای زوج و فرد به دست آمده حقیقی اند، پس:

$$\langle p \rangle = 0$$

تمرین: با استفاده از توابع زوج و فرد و محاسبه مستقیم درستی این رابطه را تحقیق کنید.

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dx u^{(\pm)*}(x) \frac{d}{dx} u^{(\pm)}(x)$$

انتگرال شامل توابع حقیقی

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dx u^{(\pm)*}(x) \frac{d}{dx} u^{(\pm)}(x)$$

یا هر دو زوج یا هر دو فرد هستند

لذا پس از مشتق گیری یکی فرد و دیگری زوج می شوند

$$\langle p \rangle^* = -\langle p \rangle$$

$$\langle p \rangle^* = \langle p \rangle$$

$$\langle p \rangle = -\langle p \rangle$$

$$\langle p \rangle = 0$$

تمرین: رابطه زیر را با انتگرال گیری مستقیم محاسبه کنید:

$$\langle p^2 \rangle = 2mE_n^{(\pm)}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\langle p^2 \rangle} = \sqrt{2mE_n^{(\pm)}}$$

&

$$\Delta x = 2a$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2m \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}} = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{a^2}} = \frac{n\pi\hbar}{a} \\ \sqrt{2m \frac{\left[n - \frac{1}{2}\right]^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}} = \sqrt{\frac{\left[n - \frac{1}{2}\right]^2 \pi^2 \hbar^2}{a^2}} = \frac{\left[n - \frac{1}{2}\right] \pi \hbar}{a} \end{cases}$$

$$\Delta p \Delta x = \begin{cases} 2n\pi\hbar > \hbar \\ 2\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar > \hbar \end{cases}$$

که با اصل عدم قطعیت سازگار است.

نکته: این یک خاصیت کلی است که برای ویژه توابع حالت‌های بالاتر عدم قطعیت با ویژه مقدار افزایش می‌یابد.

نکته: ملاحظه می‌شود که افزایش تعداد گره ها (n) با افزایش انرژی هم‌ارز است.

نکته فوق را می‌توان با توجه به این که انرژی جنبشی با افزایش انحنای افزایش می‌یابد درک کرد.



$$\langle H \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx u^*(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2}$$

$$\langle H \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx u^*(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du(x)}{dx} \frac{du^*(x)}{dx} dx = E$$

$$u^*(x) = u \quad \frac{d^2 u}{dx^2} dx = dv$$

$$\frac{du^*(x)}{dx} dx = du \quad \frac{du}{dx} = v$$

پس هر چه تغییرات تابع موج بیشتر باشد (که این خود معادل افزایش n یعنی تعداد گره ها است) انرژی E بزرگتر خواهد شد.

$$\langle H \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left[u^*(x) \frac{du(x)}{dx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du(x)}{dx} \frac{du^*(x)}{dx} dx \right\}$$

اصل موضوع بسط

یک جواب کلی و دلخواه $\Psi(x)$ که در شرایط مرزی $\Psi(a) = \Psi(-a) = 0$ صدق کند را می توان با استفاده از اصل برهمنهی به صورت زیر نوشت:

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{(+)} u_n^{(+)}(x) + A_n^{(-)} u_n^{(-)}(x) \right] \times u_m^{(+)*}(x)$$

$$\int dx u_m^{(+)*}(x) \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{(+)} \int dx u_m^{(+)*}(x) u_n^{(+)}(x) + A_n^{(-)} \int dx u_m^{(+)*}(x) u_n^{(-)}(x) \right]$$

$$\int dx u_m^{(+)*}(x) \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{(+)} \delta_{mn} + A_n^{(-)} (0) \right] = A_m^{(+)}$$

$$A_n^{(\pm)} = \int dx u_n^{(\pm)*}(x) \Psi(x)$$

به همین ترتیب:

جواب وابسته به زمان را اکنون می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{(+)} u_n^{(+)}(x) e^{-iE_n^{(+)}t/\hbar} + A_n^{(-)} u_n^{(-)}(x) e^{-iE_n^{(-)}t/\hbar} \right]$$

$$A_n^{(\pm)} = \int dx u_n^{(\pm)*}(x) \Psi(x, t)$$

معنی فیزیکی ضرایب بسط چیست؟

$$\langle H \rangle = \int dx \Psi^*(x) H \Psi(x)$$

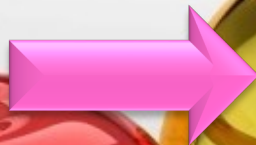
برای درک معنی فیزیکی ضرایب بسط مقدار چشمداشتی H را حساب می کنیم:

$$\langle H \rangle = \int dx \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{(+)*} u_n^{(+)*}(x) + A_n^{(-)*} u_n^{(-)*}(x) \right] \right\} \times$$

$$\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[E_m^{(+)} A_m^{(+)} u_m^{(+)}(x) + E_m^{(-)} A_m^{(-)} u_m^{(-)}(x) \right] \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[E_m^{(+)} |A_m^{(+)}|^2 + E_m^{(-)} |A_m^{(-)}|^2 \right]$$

$$\langle H \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \left[E_m^{(+)} |A_m^{(+)}|^2 + E_m^{(-)} |A_m^{(-)}|^2 \right]$$

$$\int dx \Psi^*(x) \Psi(x) = 1$$



$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[|A_m^{(+)}|^2 + |A_m^{(-)}|^2 \right] = 1$$

پس $|A_n^{(\pm)}|^2$ احتمال آن است که اندازه گیری انرژی یک حالت دلخواه مقدار $E_n^{(\pm)}$ را به دست بدهد.

نکته: هر اندازه گیری فقط یکی از مقادیر $E_n^{(\pm)}$ را به دست می دهد.

سوال: برای چه بسته ای اندازه گیری همواره فقط یک انرژی $E_k^{(\pm)}$ (یک ویژه مقدار) را به دست می دهد؟

$$\Psi(x) = u_k^{(+)}(x)$$

یعنی وقتی
که

$$|A_n^{(+)}|^2 = \delta_{nk}$$

جواب:
وقتی که

و این بدان معنی است که ویژه تابع آن ویژه تابعی باشد که متناظر با ویژه مقدار $E_k^{(\pm)}$ است. نکته اخیر نتیجه بسیار مهمی را در پی دارد:

یک بسته موج کلی مانند $\Psi(x)$ را در نظر بگیرید.

احتمال آن که اندازه گیری انرژی یکی از ویژه مقادیر عملگر هامیلتونی H را به دست بدهد چقدر است؟

$$P(E_n) = \left| \int dx u_n^*(x) \Psi(x) \right|^2 = |A_n|^2$$

جواب:

پس از اندازه گیری ای که به انرژی E_n منجر شده باشد حالت دستگاه با ویژه تابع $u_n(x)$ توصیف می شود.

چون در غیر این صورت اگر اندازه گیری تکرار شود به نتیجه دیگری (ویژه مقدار دیگری) منجر خواهد شد و این غیر فیزیکی است.

چرا؟

چون تکرار پذیری از توقعات فیزیکی ماست.

چرا غیر فیزیکی است؟

این نتیجه کلی تر از مساله یک ذره در یک جعبه است و در قلب مکانیک کوانتومی جای دارد و برای هر عملگر هرمیتی صادق است.

اندازه گیری یک تابع مرکب سبب تصویر شدن تابع موج به یک حالت منفرد می شود، اما این نکته بدین معنی نیست که زوجیت یا فردیت هم بتوانند با اندازه گیری تغییر کند

پاریته Parity

(1) توابع زوج نسبت به x

توابع موج یک ذره در جعبه به دو دسته قابل تقسیم هستند:

(2) توابع فرد نسبت به x

اگر ما با تابع موج زیر که در ابتدا زوج است شروع کنیم:

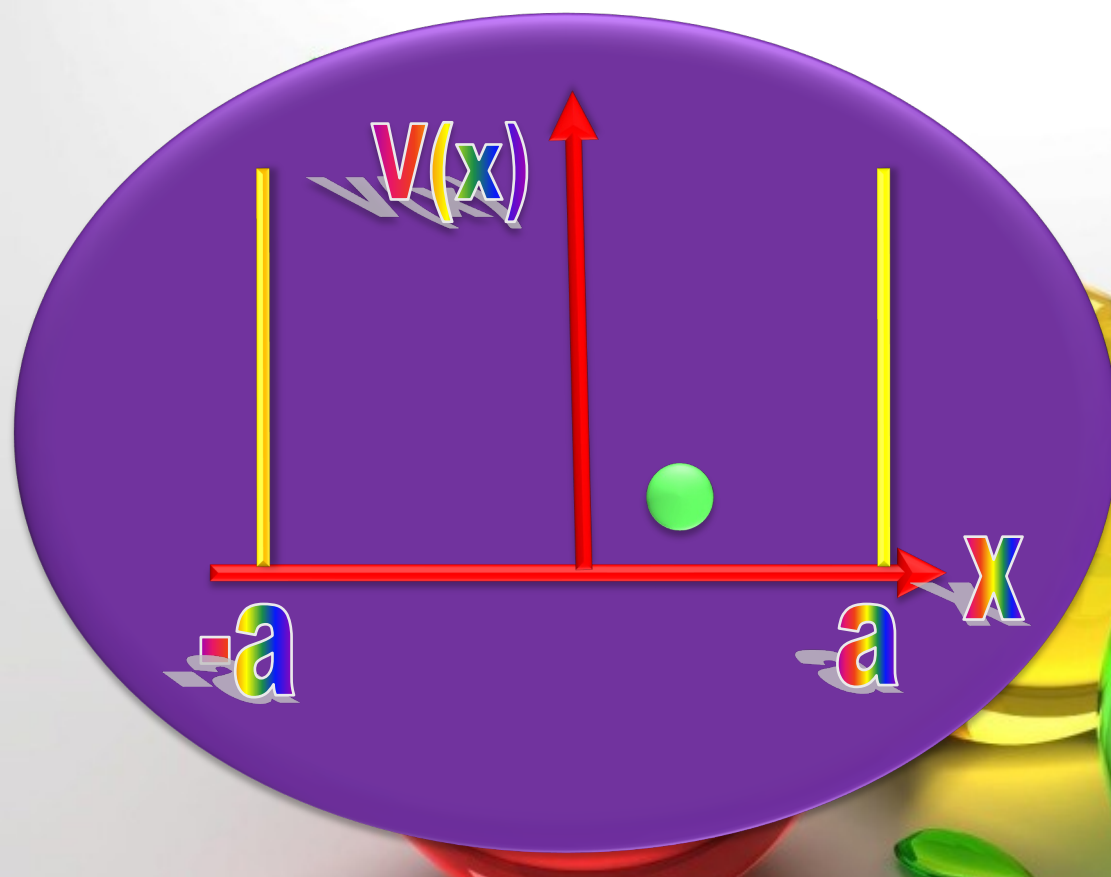
$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(+)} u_n^{(+)}(x) + 0]$$

آنگاه تابع موج ما با گذشت زمان بازهم زوج باقی خواهد ماند، یعنی

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(+)} u_n^{(+)}(x) e^{-iE_n^{(+)}t/\hbar} + 0]$$

این مطلب در مورد توابع فرد نیز صادق است.

یعنی زوجیت یا فردیت برای یک ذره در جعبه خاصیتی است که با زمان تغییر نمی کند.



دقت شود که جعبه ما
حول $x = 0$ متقارن است.

به نکه فوق بعدا باز خواهیم گشت.

چون ثابتهای حرکت از دیر باز مورد علاقه فیزیکدانان بوده است، در زیر سعی می کنیم
که ثابت ماندن زوجیت و فردیت با زمان را فرمولبندی کنیم:

برای این منظور عملگر پارته را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$P\Psi(x) = \Psi(-x)$$

اگر Ψ زوج باشد، آنگاه:

$$P\Psi^{(+)}(x) = \Psi^{(+)}(-x) = \Psi^{(+)}(x)$$

اگر Ψ فرد باشد، آنگاه:

$$P\Psi^{(-)}(x) = \Psi^{(-)}(-x) = -\Psi^{(-)}(x)$$

دو معادله فوق معادلات ویژه مقدار هستند. پس توابع زوج ویژه توابع عملگر P با ویژه مقدار $+1$ هستند. در حالی که توابع فرد و ویژه توابع عملگر P با ویژه مقدار -1 هستند.

نکته: در مساله یک ذره در جعبه $u_n^{(\pm)}$ نه تنها ویژه توابع H هستند، بلکه به طور همزمان ویژه توابع P نیز هستند. $E_n^{(\pm)}$ ویژه مقادیر H ولی ± 1 تنها ویژه مقادیر عملگر P هستند.

فرض کنید که این طور نباشد، یعنی λ هم یک ویژه مقدار عملگر P باشد:

$P \times$

$$Pu(x) = \lambda u(x)$$

$$P^2 u(x) = \lambda^2 u(x)$$

$$\pm 1 = \lambda$$

$$P^2 u(x) = P \lambda u(x)$$

$$P^2 u(x) = u(x)$$

پس ± 1 تنها ویژه مقادیر عملگر P هستند.

$$P^2 u(x) = \lambda Pu(x)$$

$$u(x) = \lambda^2 u(x)$$

$$P^2 u(x) = \lambda Pu(x)$$

$$1 = \lambda^2$$

نکته: از طرفی هر تابع کلی را می توان همواره بر حسب توابع زوج و فرد به صورت زیر بسط داد:

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}[\Psi(x) + \Psi(-x)] + \frac{1}{2}[\Psi(x) - \Psi(-x)]$$

و این بدان معنی است که مانند ویژه توابع H هر تابعی را می توان بر حسب ویژه توابع عملگر P نیز بسط داد.

**این خاصیت کلی همه امواج
هرمیتی است که:**

ویژه توابع هر عملگر هرمیتی یک پایه کامل تشکیل می دهند که می توان هر تابع دیگری را بر حسب آنها بسط داد.

$$\langle P \rangle = \langle P \rangle^*$$

پس توقع داریم که عملگر پاریته هرمیتی باشد:

اثبات هر میتی بودن عملگر پاریته:

$$\langle P \rangle = \langle P \rangle^*$$

$$P\Psi(x) = E(x) - O(x)$$

$$\langle P \rangle = \int dx \Psi^*(x) P\Psi(x)$$

$$\langle P \rangle = \int dx [E^*(x) + O^*(x)] [E(x) - O(x)]$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}[\Psi(x) + \Psi(-x)] + \frac{1}{2}[\Psi(x) - \Psi(-x)]$$

$$\langle P \rangle = \int dx [|E(x)|^2 - |O(x)|^2]$$

$$\Psi(x) = E(x) + O(x)$$

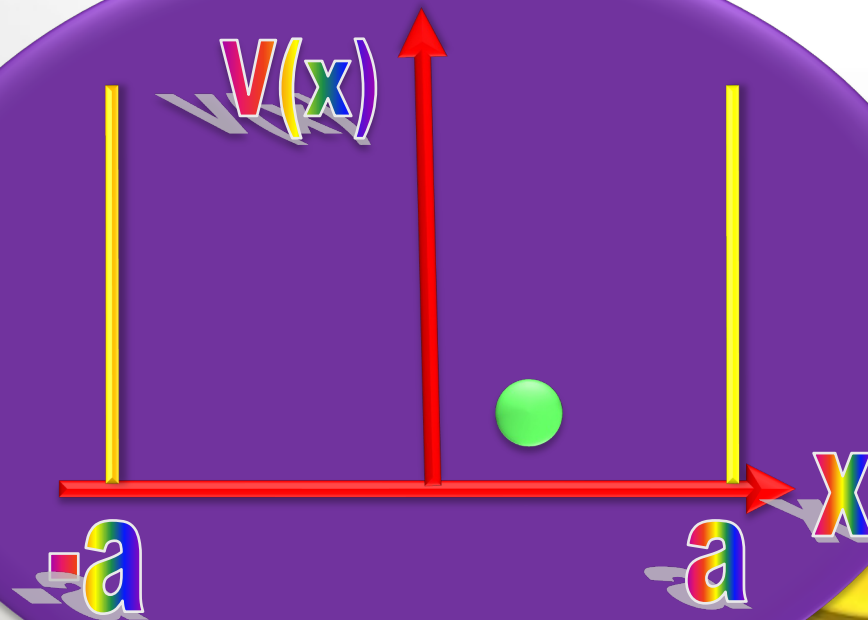
$$\langle P \rangle^* = \int dx \Psi(x) P\Psi^*(x)$$

$$\langle P \rangle^* = \int dx [E(x) + O(x)] [E^*(x) - O^*(x)]$$

$$P\Psi(x) = PE(x) + PO(x)$$

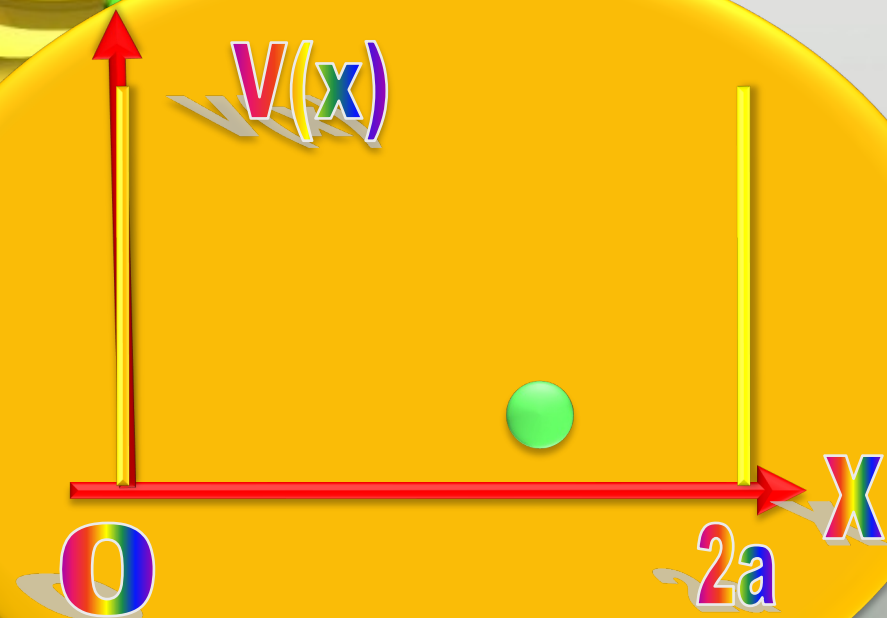
$$\langle P \rangle^* = \int dx [|E(x)|^2 - |O(x)|^2] = \langle P \rangle$$

به نظر می رسد که بحث زوج و فرد بودن توابع ذره در چاه یک بعدی از تقارن پتانسیل ناشی شد، که در آن پتانسیل حول $x = 0$ متقارن در نظر گرفته شده بود:



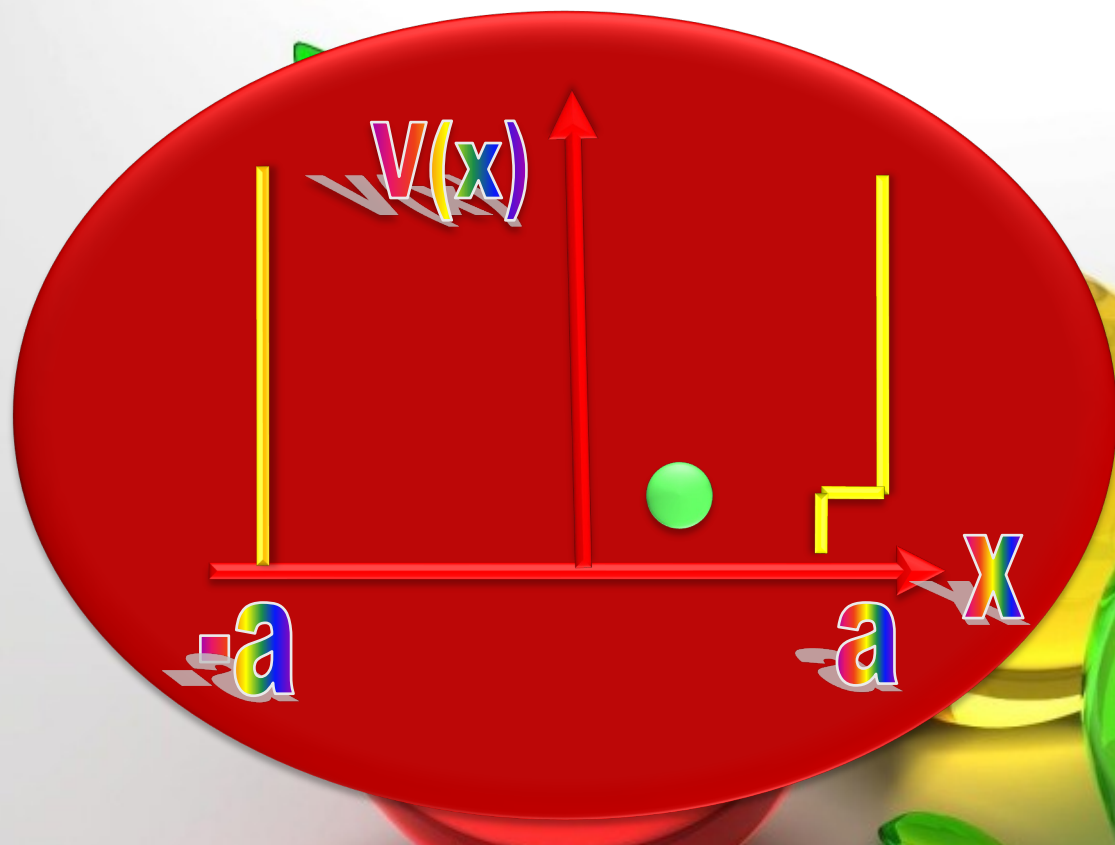
اما اگر پتانسیل را حتی به شکل اخیر نیز انتخاب می کردیم، باز هم به توابع زوج و فرد می رسیدیم، زیرا از نظر فیزیکی اتفاق خاصی هنوز رخ نداده است.

ولی با این وجود بهتر است که پتانسیل طوری انتخاب شود که تقارن را با وضوح بیشتری نشان دهد.



اما اگر جعبه ما غیر متقارن باشد،
مانند:

هر تلاشی بی فایده است تا بتوان
تقارن را نمایش داد.



پس نکته مهم در اینجا است که تقارن در واقع در خود هامیلتونی نهفته است. اگر هامیلتونی متقارن باشد، البته امکان دارد با انتخاب بد دستگاه مختصات آن را از نظر دور داشت و با انتخاب خوب آن را واضح تر کرد، ولی اگر هامیلتونی از ابتدا نامتقارن باشد هیچ کاری برای متقارن ساختن آن نمی توان انجام داد. تقارن هامیلتونی در واقع در تقارن پتانسیل نهفته است که می توان بنابراین به جای صحبت از شرایط مرزی فقط از پتانسیل صحبت کرد.

تحت چه شرایطی اگر یک تابع زوج (فرد) باشد با گذشت زمان زوج (فرد) باقی خواهد

دیدیم در حالت یک بعدی با پتانسیل مربعی زوجیت یا فردیت با زمان تغییر نکرد، اما سوال فوق کلی است و منحصر به پتانسیل مربعی نمی شود.

اثبات

در لحظه اولیه:

$$\Psi(x, 0) = \Psi(-x, 0) = \Psi^{(+)}(x)$$

تحول زمانی با معادله وابسته به زمان داده می شود:

$P \times$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = H\Psi(x, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial P\Psi(x, t)}{\partial t} = PH\Psi(x, t)$$

$$i\hbar P \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = PH\Psi(x, t)$$

چون P پاریته نسبت به مکان است نه زمان، لذا همواره از زماه و مشتقات زمانی عبور می کند.

$$i\hbar \frac{\partial P\Psi(x,t)}{\partial t} = H P\Psi(x,t)$$

اگر $PH=HP$ باشد، آنگاه

اما این یک فرض خاص است.

چه وقت این فرض خاص مجاز است؟

اگر پتانسیل با تبدیل x به $-x$ زوج باقی بماند، H نیز زوج باقی خواهد ماند زیرا d^2/dx^2 زوج است.

پس هم Ψ و هم $P\Psi$ به طور همزمان در معادله شرودینگر وابسته به زمان صدق می کنند.

بنابراین هر ترکیب خطی از آنها از جمله ترکیب خطی زیر نیز در معادله صدق می کند:

$$(\Psi(x,t) + P\Psi(x,t)) / 2$$

اما به راحتی می توان نشان داد که تابع فوق مستقل از آن که Ψ زوج باشد یا نه همواره یک تابع زوج است.

$$\Psi^{(+)}(x, t) = \frac{1}{2}(1 + P)\Psi(x, t)$$

$$P\Psi^{(+)}(x, t) = (P\Psi(x, t) + P^2\Psi(x, t)) / 2$$

$$P\Psi^{(+)}(x, t) = (P\Psi(x, t) + \Psi(x, t)) / 2$$

$$P\Psi^{(+)}(x, t) = \frac{1}{2}(P + 1)\Psi(x, t) = \Psi^{(+)}(x, t)$$

بنابراین اگر $\Psi(x, 0)$ از ابتدا زوج باشد، آنگاه چون پس از گذشت زمان t ، $\Psi(x, t)$ و $P\Psi(x, t)$ در معادله صدق می کنند (مشروط بر جابه جایی عملگر پاریته با هامیلتونی دستگاه) و همواره یک ترکیب خطی مناسب به صورت یک تابع زوج از آنها وجود دارد (خواه $\Psi(x, t)$ زوج باشد یا نباشد) که در معادله صدق کند، لذا تحول زمانی موجب تغییر زوجیت نمی شود.

یعنی چون قادریم که یک تابع موج زوج وابسته به زمان بسازیم که در معادله شرودینگر وابسته به زمان صدق می کند، پس تحول زمانی نمی تواند زوجیت را تغییر بدهد.

نکته: علت توانایی فوق از رابطه $HP=PH$ ایجاد شد.

به همین ترتیب می توان در مورد بقا فردیت صحبت کرد، زیرا همواره می توان تابع فرد زیر را ساخت:

$$\Psi^{(-)}(x, t) = \frac{1}{2}(1 - P)\Psi(x, t)$$

پس شرط مستقل بودن پاریته از زمان تنها وقتی برآورده می شود که:

$$P\Psi^{(-)}(x, t) = (P\Psi(x, t) - P^2\Psi(x, t)) / 2$$

$$(PH - HP)\Psi(x, t) = 0$$

$$P\Psi^{(-)}(x, t) = (P\Psi(x, t) - \Psi(x, t)) / 2$$

$$[P, H] = 0$$

$$P\Psi^{(-)}(x, t) = \frac{1}{2}(P - 1)\Psi(x, t) = -\Psi^{(-)}(x, t)$$

این نتیجه بعدا خواهیم دید که یک نتیجه کلی است:

هر عملگری که به طور صریح به زمان بستگی ندارد و با H جابه جا شود یک ثابت حرکت

عدم وابستگی پاریته به زمان را قبلا دیده بودیم:

$$i\hbar P \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial P\Psi(x,t)}{\partial t}$$

اگر $V=V(x,t)$ آنگاه حتی انرژی نیز ثابت حرکت نمی تواند باشد. در این صورت جداسازی متغیرهای زمانی و مکانی ابتدا امکان پذیر نیست.

مقدار ویژه حرکت ذره آزاد اندازه

$$Hu_E(x) = Eu_E(x)$$

همان طور که دیدیم فقط H نیست که مقدار ویژه و بردار ویژه دارد، بلکه عملگر پارینه نیز به عنوان مثال یک معادله ویژه مقدار دارد.

$$Pu_E(x) = \pm u_E(x)$$

$$P_{op}u_p(x) = pu_p(x)$$

معادله ویژه مقدار دیگری که در اینجا با آن آشنا می شویم، معادله ویژه مقدار اندازه حرکت خطی است:

$$P_{op} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$$

نکته: عملگر P یک طیف پیوسته دارد.

$$\frac{du_p(x)}{dx} = \frac{ip}{\hbar} u_p(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx u_{p'}(x)^* u_p(x) &= \\ &= |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(p-p')x/\hbar} = 2\pi |C|^2 \hbar \delta(p' - p) \end{aligned}$$

$$\frac{du_p(x)}{u_p(x)} = \frac{ip}{\hbar} dx$$

$$u_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

پس با انتخاب:

$$u_p(x) = C e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx u_{p'}(x)^* u_p(x) &= \\ &= \delta(p' - p) \end{aligned}$$

خواهیم داشت:

C ثابت و p حقیقی است
 $\langle p \rangle = \langle p \rangle^* = p$ تا ویژه تابع
 $u_p(x)$ در فواصل خیلی دور
بینهایت نشود.

که روابط فوق فقط در پیوسته بودن تابع دلتا نسبت به تابع
دلتای گسسته در چاه یک بعدی تفاوت دارد.

روابط مربوط به چاه

$$\int_{-a}^a dx u_m^{(+)}(x)^* u_n^{(+)}(x) = \int_{-a}^a dx u_m^{(-)}(x)^* u_n^{(-)}(x) = \delta_{mn}$$

$$\int_{-a}^a dx u_m^{(+)}(x)^* u_n^{(-)}(x) = \int_{-a}^a dx u_m^{(-)}(x)^* u_n^{(+)}(x) = 0$$

رابطه مربوط اندازه حرکت

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx u_{p'}(x)^* u_p(x) = \delta(p' - p)$$

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \Phi(p) \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

می دانیم که همواره می توان هر بسته موجی را بر حسب یک مجموعه کامل از ویژه توابع بسط داد، پس:

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{(+)} u_n^{(+)}(x) + A_n^{(-)} u_n^{(-)}(x) \right]$$

مثلا در مورد یک ذره در جعبه به صورت گسسته داشتیم:

$$\langle H \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \left[E_m^{(+)} |A_m^{(+)}|^2 + E_m^{(-)} |A_m^{(-)}|^2 \right]$$

پس $|A_n^{(\pm)}|^2$ احتمال آن است که اندازه گیری انرژی یک حالت دلخواه مقدار $E_n^{(\pm)}$ را به دست بدهد.

$$\Phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right)^* \Psi(x)$$

پس اکنون به طور مشابه می توانیم بگوییم که $|\Phi(p)|^2$ احتمال آن است که اندازه گیری اندازه حرکت یک حالت دلخواه مقدار p را به دست بدهد.

حال بیایید به هامیلتونی یک ذره آزاد بیندیشیم

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k^2 u(x) = 0$$

$$\begin{cases} e^{ikx} \\ e^{-ikx} \end{cases} \text{ or } \begin{cases} \cos kx \\ \sin kx \end{cases}$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \longrightarrow \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases}$$

بنابراین کلی ترین جواب را
می توان به این صورت
نوشت:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx |Ae^{ikx} + Be^{-ikx}|^2$$

اما یک مشکل اساسی وجود
دارد و آن این است که تابع
فوق مجذورا انتگرال پذیر نمی
باشد.

سه راه حل برای رفع مشکل مجذورا انتگرال پذیر نبودن توابع تناوبی سینوسی و کسینوسی وجود دارد

$$a \longrightarrow \infty$$

الف) ذره آزاد را معادل با یک ذره محبوس در یک جعبه با ابعاد بینهایت فرض می کنیم:

$$\begin{cases} u^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ u^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{[n-1/2]\pi x}{a} \end{cases}$$

برای آن که آرگومان توابع پس از میل دادن ابعاد جعبه به سمت بینهایت هنوز با معنی باشد باید n نیز به سمت بینهایت میل داده شود، تا در این صورت $n\pi x/a$ به سمت یک مقدار متناهی میل کند.

$$n \longrightarrow \infty \Rightarrow n-1/2 \longrightarrow n \Rightarrow n\pi/a = k \quad \text{for both cases}$$

$$\begin{cases} u^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin kx \\ u^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos kx \end{cases}$$

ضریب نرمالیزاسیون در هر دو تابع را بهتر است که نگاه داریم و از خود نپرسیم که ابعاد چاه بینهایت است یا نه. یعنی با آن مانند یک عدد متناهی رفتار کنیم. حفظ کردن آن این امتیاز را دارد که همواره یادآوری می کند که ما با یک خطا در حال کار هستیم.

معادل قرار دادن ذره آزاد با یک ذره محبوس در یک چاه چگونه مشکل مجذروا انتگرال پذیری را حل می کند؟

تابع موج ذره محبوس در یک چاه مجذروا انتگرال پذیر است زیرا روی دیواره ها و خارج آن برابر صفر است. تابع موج ذره آزاد تا بینهایت گسترش دارد. پس یک چاه با ابعاد بینهایت می تواند شبیه سازی خوبی از یک ذره آزاد باشد. لذا ذره آزاد در چاه با ابعاد بزرگ مجذروا انتگرال پذیر می شود.

نرمالیزاسیون ذره آزاد در چاه بینهایت

$$\Psi(x) = e^{ikx}$$

ب) به جای این که تابع را دقیقا به صورت یک موج تخت به صورت:

$$\Phi(p) = \sqrt{2\pi\hbar}\delta(p - \hbar k)$$

در نظر بگیریم، که این خود معادل این است که بگوییم:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \Phi(p) e^{ipx/\hbar}$$

چون:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \sqrt{2\pi\hbar} \delta(p - \hbar k) e^{ipx/\hbar}$$

$$= e^{ikx}$$

$$\delta(p - \hbar k) \longrightarrow g(p - \hbar k)$$

بهتر است که از تابعی مانند $g(p - \hbar k)$ استفاده کنیم:

دقت شود که g یک تابع خیلی تیز است اما نه به اندازه تابع دلتا.

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \sqrt{2\pi\hbar} g(p - \hbar k) e^{ipx/\hbar}$$

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp g(p - \hbar k) e^{ipx/\hbar}$$

$$p - \hbar k = q \Rightarrow dp = dq$$

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dq g(q) e^{iqx/\hbar} e^{ikx}$$

$$\Psi(x) = e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dq g(q) e^{iqx/\hbar}$$

که یک تابع خیلی پهن است، چون g تیز است پس تبدیل فوریه آن باید پهن باشد.

$$\Psi(x) = e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dq g(q) e^{iqx/\hbar}$$

معرفی g به جای تابع دلتای دیراک چگونه مشکل مجذروا انتگرال پذیری را حل می کند؟

پهنای انتگرال فوق که تابع موج تخت را مدوله کرده است در اختیار ماست و می توانیم با آن گسترش فضایی تابع موج تخت را کنترل کنیم و بدین وسیله از گسترش تابع موج تا بینهایت جلوگیری کنیم. اگر به جای g از تابع دلتا استفاده کنیم تابع موج تا بینهایت گسترش خواهد یافت که مطلوب نیست.

ج) یکی دیگر از راه هایی که می توان با آن مشکل بهنجارش توابع تناوبی را حل کرد استفاده از مفهوم چگالی جریان است.

مشکل از اینجا ناشی می شود که برای توابع نوسانی ذره در همه جا گسترده است. بنابراین احتمال یافتن آن در یک ناحیه خاص ممکن است صفر باشد. یعنی چون $\exp(ikx)$ یک بسته موج نیست پس در یک ناحیه از فضا جایگزیده نشده است. پس حتما باید در سرتاسر فضا دنبال آن گشت و اگر ما در یک ناحیه خاص دنبال آن نگردیم مشکلی هم پیش نمی آید.

$$Ce^{ikx} \longrightarrow j(x) = |C|^2 \frac{p}{m}$$

$$j(x) = \rho v$$

$$\Psi(x)\Psi^*(x) = |C|^2$$

چگالی ذرات

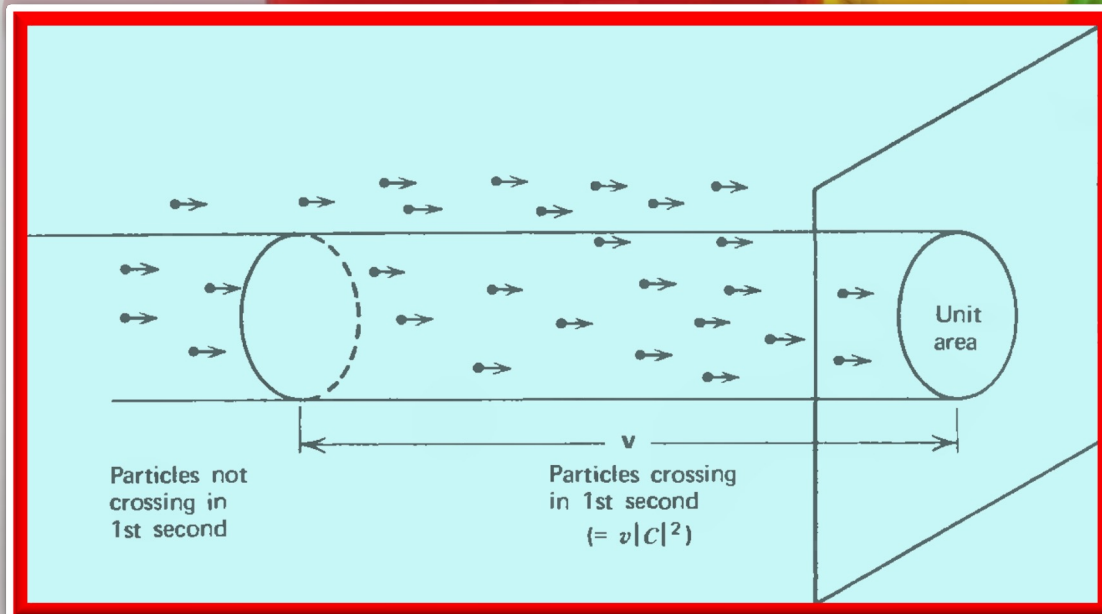
$$j(x) = |C|^2 v = |C|^2 \frac{p}{m}$$

نمایش ذراتی با چگالی $1/2\pi\hbar$ بر سانتی متر است.

$$u_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

نمایش ذراتی با چگالی $|C|^2$ بر سانتی متر مکعب است که با سرعت $p/m=v$ و شار $|C|^2 p/m$ است که در حال حرکتند.

$$u_p(x) = C e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar}$$



می گوئیم که یک ذره در فضا با چگالی $|C|^2$ توزیع شده است که با شار $|C|^2 p/m$ در حال حرکت است. پس ذره ما در فضا با یک چگالی معین توزیع شده است و احتمال یافتنش در کل فضا برابر یک است. یعنی نرمالیزاسیون فیزیکی با تقسیم یک ذره در کل فضا به تعداد خیلی زیادی ذرات کوچکتر فرضی (علی رغم آن که می دانیم الکترون یک ذره بنیادی غیر قابل تجزیه است) با چگالی معین انجام می شود.

معادله ویژه مقدار

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + k^2 u(x) = 0$$

برای یک ذره آزاد دو جواب

$$\begin{cases} e^{ikx} \\ e^{-ikx} \end{cases} \text{ or } \begin{cases} \cos kx \\ \sin kx \end{cases}$$

دارد. اگر چه آنها مستقل از هم هستند ولی بر خلاف مساله چاه یک بعدی به انرژیهای یکسانی منجر می شوند:

به این حالتها دو حالت
دیجذره یا تبهگن گویند.

$$H\Psi_1 = E\Psi_1$$

$$H\Psi_2 = E\Psi_2$$

Ψ_1 & Ψ_2 are degenerate

چطور دو تابع تبهگن را از هم تشخیص دهیم؟

$$P_{op} e^{\pm ikx} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} e^{\pm ikx} = \pm \hbar k e^{\pm ikx}$$

$$H e^{\pm ikx} = E e^{\pm ikx}$$

پس می توان تبهگنی را از طریق یک عملگر دیگر مثلا به صورت فوق به وسیله تکانه یا مانند زیر از طریق پارینه متوجه شد.

$$P \begin{pmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \cos kx \\ - \sin kx \end{pmatrix}$$

$$H \begin{pmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{pmatrix}$$

پس تفاوت از آن جا معلوم خواهد شد که توابع دیجنره توابع ویژه همزمان عملگرهای دیگری نیز هستند.

نکته مهم: عملگرهایی که با هم جا به جا می شوند می توانند ویژه توابع مشترک داشته باشند.

$$[P_{op}, H] = 0$$

$$[P, H] = 0$$

پس H و P و H و P_{op} می توانند ویژه توابع مشترک به طور همزمان داشته باشند.

$$[P_{op}, P] \neq 0$$

$$P\left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\right) \rightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$$

بنابراین P و P_{op} نمی توانند به طور همزمان ویژه توابع مشترک داشته باشند.

تست 1 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1374):

اگر عملگر $\hat{O}$ به صورت $\hat{O}\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\Psi(x)} dx' \Psi(x') x'$ تعریف شود، ویژه توابع آن با توجه به معادله ویژه مقادری $\hat{O}\Psi(x) = \lambda\Psi(x)$ کدام است؟

2) $\Psi(x) = e^{-\lambda x^2/2}, \quad \lambda \neq 0$

1) $\Psi(x) = e^{\lambda x^2/2}, \quad \lambda \neq 0$

4) $\Psi(x) = e^{x^2/2\lambda}, \quad \lambda < 0$

3) $\Psi(x) = e^{\lambda x^2}, \quad \lambda < 0$

$$\hat{O}\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\Psi(x)} dx' \Psi(x') x' = \lambda\Psi(x)$$

$$\Psi(x) x = \lambda \frac{d\Psi(x)}{dx} \quad \frac{1}{2} \lambda x^2 = \ln \Psi(x) \quad \Psi(x) = e^{\frac{\lambda x^2}{2}}$$

$$\frac{x dx}{\lambda} = \frac{d\Psi(x)}{\Psi(x)}$$

$$\Psi(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda < 0$$

تست 2 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1374): اگر کوچکترین ویژه مقدار عملگر **A** برابر **a** و کوچکترین ویژه مقدار عملگر **B** برابر **b** باشد، در این صورت کوچکترین ویژه مقدار عملگر **C=A+B** برابر است با **c** به طوری که:

$$2) \quad c > a + b$$

$$1) \quad c = a + b$$

$$4) \quad c < a + b$$

$$3) \quad c \geq a + b$$

$$A|a\rangle = a|a\rangle$$

$$B|b\rangle = b|b\rangle$$

$$C|c\rangle = c|c\rangle$$

$$C|c\rangle =$$

$$= (A + B)|c\rangle =$$

$$= A|c\rangle + B|c\rangle$$

$$\text{if } |c\rangle = |a\rangle \Rightarrow C|c\rangle = A|a\rangle + B|a\rangle = \\ = a|a\rangle + b'|a\rangle = (a + b')|a\rangle \Rightarrow (a + b') > a + b$$

$$\text{if } |c\rangle = |b\rangle \Rightarrow C|c\rangle = A|b\rangle + B|b\rangle = \\ = a'|a\rangle + b|b\rangle = (a' + b)|b\rangle \Rightarrow (a' + b) > a + b$$

$$\text{if } |a\rangle = |b\rangle \& |c\rangle = |a\rangle = |b\rangle \Rightarrow C|c\rangle = A|a\rangle + B|b\rangle = \\ = a|a\rangle + b|b\rangle = (a + b)|b\rangle \Rightarrow (a + b) = a + b$$

تست 3 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1376): در اندازه گیری یک عملگر، تنها مقادیر ...
عملگر اندازه گیری می شود.



تست 4 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1377): چنانچه o_i ها $i=1,2,\dots,n$ ویژه مقادیر

هرمیتی O باشند، در این صورت عملگر $\prod_{i=1}^n (O - o_i I)$ برابر است با:

4) O^2

3) O

2) 1

1) 0

$$\prod_{i=1}^n (O - o_i I) = (O - o_1 I)(O - o_2 I) \dots (O - o_n I)$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (O - o_i I) |o_1\rangle &= (O - o_1 I)(O - o_2 I) \dots (O - o_n I) |o_1\rangle \\ &= (o_1 - o_1) \dots = 0 \end{aligned}$$

و به همین ترتیب برای هر ویژه بردار دیگری غیر از $|o_1\rangle$ پس گزینه یک درست است.

تست 5 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1377): چنانچه کلیه حالت‌های دستگاهی دارای پاریته مشخص باشند، مقدار چمداشتی عملگر اندازه حرکت p برابر است با:

$\hbar$ (4)

(3) نامشخص

(2) غیر صفر

(1) صفر

if $\Psi(x)$ is even $\longrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d\Psi(x)}{dx}$ is odd $\longrightarrow \langle p \rangle = 0$

if $\Psi(x)$ is odd $\longrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d\Psi(x)}{dx}$ is even $\longrightarrow \langle p \rangle = 0$

تست 6 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1378): در مسایل یک بعدی که ذره در راستای محور x -ها حرکت می کند، اگر تابع حالت ذره علاوه بر آن که ویژه حالت H هامیلتونی است، ویژه حالت پاریته، P ، نیز باشد در این صورت:

(1) بسته به آن که پاریته تابع سیستم زوج یا فرد باشد پتانسیل نسبت به x تابعی زوج یا فرد است.

(2) پتانسیلی که این سیستم در آن قرار دارد تابعی زوج از مختصه x است.

(3) پتانسیلی که این سیستم در آن قرار دارد تابعی فرد از مختصه x است.

(4) پتانسیلی که این سیستم در آن قرار دارد نه تابعی فرد و نه تابعی زوج از مختصه x است.

$$[P, H] = 0$$

$$[P, T + V] = 0$$

$$[P, T] + [P, V] = 0$$

$$[P, T] = 0$$

$$(PV - VP)\Psi(x) = 0$$

$$V(-x)\Psi(-x) - V(x)\Psi(-x) = 0$$

$$(V(-x) - V(x))\Psi(-x) = 0$$

$$[P, V] = 0$$

$$V(x) = V(-x)$$

تست 7 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1379): ویژه تابع عملگر اندازه حرکت خطی، ویژه حالت عملگر پاریته با چه ویژه مقداری است؟

(1) با ویژه مقدار -1

(3) با ویژه مقدار $+1$

(2) ویژه تابع پاریته نیست

(1) با ویژه مقدار ± 1

**نکته مهم: عملگرهایی که
با هم جا به جا می شوند می توانند
ویژه توابع مشترک داشته باشند.**

$$[P, P_{op}] \neq 0$$

تست 8 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1381):

عملگر L در ناحیه $-a < x < a$ به صورت $Lf(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f(x) - \beta x f(x)$

تعریف شده است و توابع f در شرط مرزی $f(a) = f(-a)$ صدق می کنند. ویژه مقادیر این عملگر کدام است؟ (n عددی صحیح است.)

4) $\frac{n\pi\hbar}{2a}$

3) $\frac{n\pi\hbar}{a}$

2) $\frac{n\pi}{2a}$

1) $\frac{2n\pi}{a}$

$$Lf(x) = \lambda f(x)$$

$$Lf(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f(x) - \beta x f(x)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f(x) = (\lambda + \beta x) f(x)$$

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{i}{\hbar} (\lambda + \beta x) dx$$

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{i}{\hbar} (\lambda + \beta x) dx$$

$$f(x) = C e^{\frac{i}{\hbar} (\lambda x + \beta x^2 / 2)}$$

$$f(a) = f(-a)$$

$$C e^{\frac{i}{\hbar} (\lambda a + \beta a^2 / 2)} = C e^{\frac{i}{\hbar} (-\lambda a + \beta a^2 / 2)}$$

$$e^{\frac{i 2 \lambda a}{\hbar}} = 1$$

$$\frac{2 \lambda a}{\hbar} = n \pi \Rightarrow \lambda = \frac{n \pi \hbar}{2a}$$

تست 9 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1381): پتانسیل $V(x)$ یک تابع زوج است. کدام گزینه در مورد ویژه توابع انرژی ذره ای در این پتانسیل درست است؟

(1) حتما حقیقی است

(2) حتما مختلط است

(3) حتما زوج است

(4) توابع زوج و فرد امکان پذیر است



تست 10 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1382): عملگر B بر حسب عملگر A به صورت $B = \exp(iA)$ تعریف شده است. شرط خطی و یکانی بودن عملگر B کدام است؟

(2) عملگر A باید پاد خطی و متقارن باشد

(1) عملگر A باید خطی و هرمیتی باشد

(4) عملگر A باید پاد خطی و متعامد باشد

(3) عملگر A باید خطی و یکانی باشد

تعریف عملگر یونیتاری یا یکانی: $UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \Rightarrow U^\dagger = U^{-1}$

$$BB^\dagger = 1$$

$$e^{iA} e^{-iA^\dagger} = 1$$

$$e^{i(A-A^\dagger)} = 1$$

$$A - A^\dagger = 0$$

$$A = A^\dagger$$

پس شرط یکانی بودن B
هرمیتی بودن A است

$$B(c_1 f_1 + c_2 f_2) = e^{iA} (c_1 f_1 + c_2 f_2)$$

$$= \sum_n \frac{(iA)^n}{n!} (c_1 f_1 + c_2 f_2) = \sum_n \frac{i^n}{n!} (A^n (c_1 f_1 + c_2 f_2))$$

$$= \sum_n \frac{i^n}{n!} (c_1 A^n f_1 + c_2 A^n f_2)$$

اگر عملگر A خطی باشد

$$= \sum_n \frac{i^n}{n!} (c_1 A^n f_1) + \sum_n \frac{i^n}{n!} (c_2 A^n f_2) = c_1 B_1 + c_2 B_2$$

پس شرط خطی بودن B خطی بودن A است

تست 11 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1382): اگر $|\Psi\rangle$ معرف یک حالت دستگاه و U عملگر یکانی و $|\Phi\rangle = U|\Psi\rangle$ کدام گزینه همواره درست است؟

2) $\langle \Psi | \Phi \rangle$ is a real value

1) $\langle \Phi | \Psi \rangle = 0$

4) $\langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Phi | \Phi \rangle$

3) $\langle \Psi | \Phi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle$

$$|\Phi\rangle = U|\Psi\rangle$$

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \langle \Psi | U^\dagger U | \Psi \rangle$$

$$\langle \Phi | = \langle \Psi | U^\dagger$$

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle$$