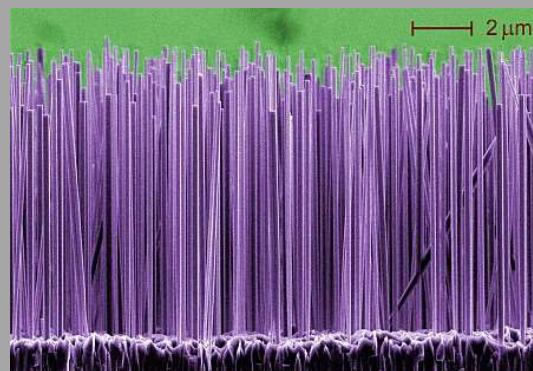
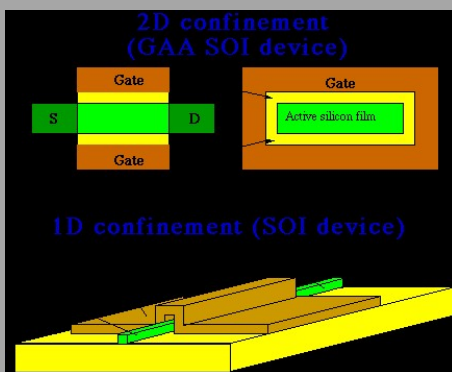
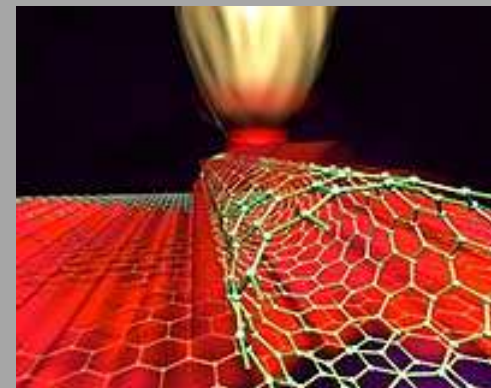
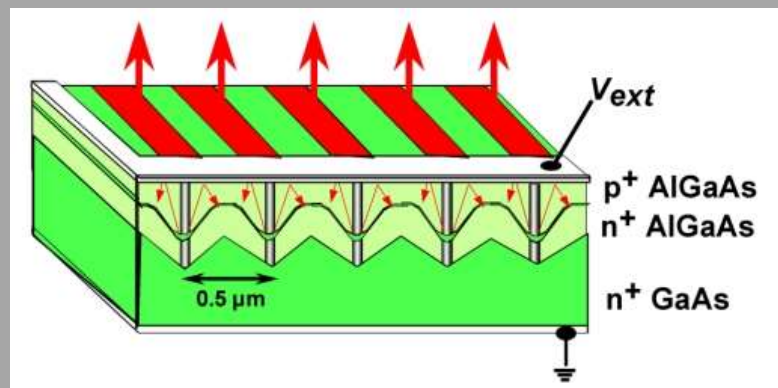
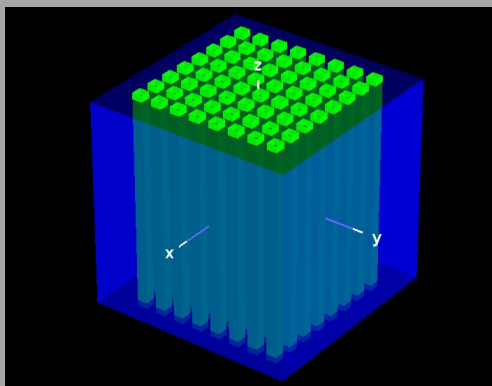


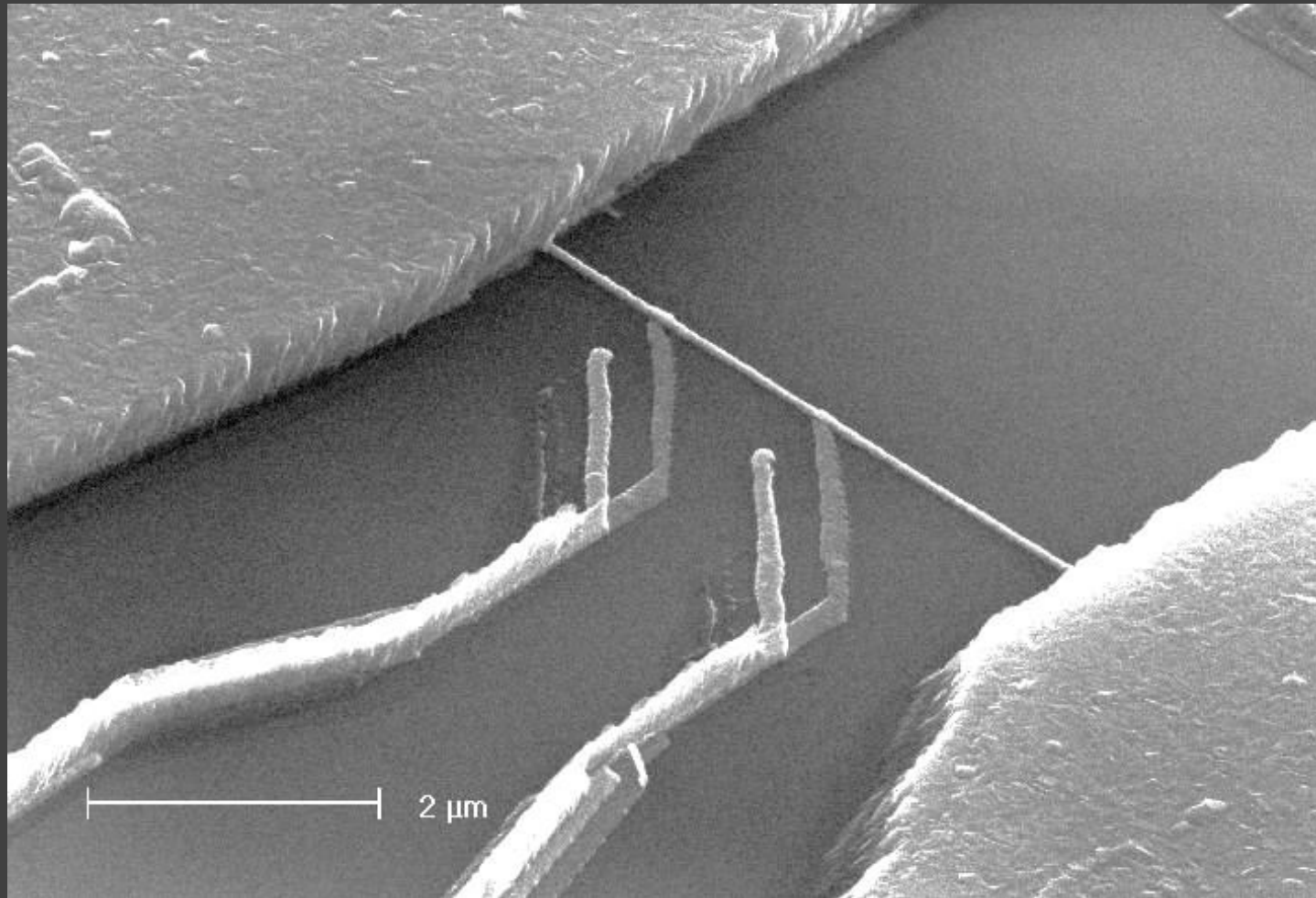
Chapter Five

One dimensional potential

در اینجا چند مساله یک بعدی را حل می کنیم تا چند پدیده غیر کلاسیکی را توضیح دهیم.

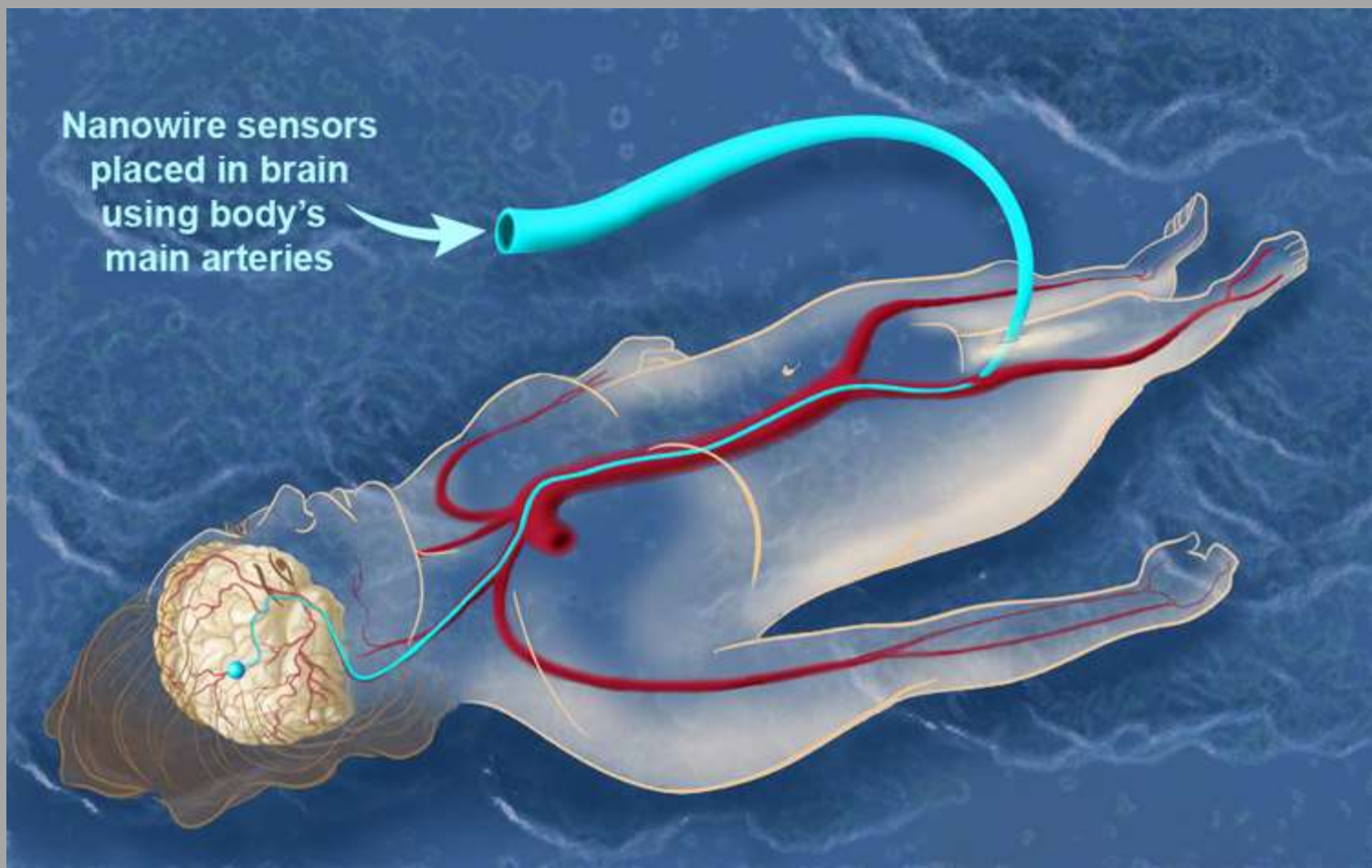
اگرچه در دنیای سه بعدی زندگی می کنیم، اما خیلی از مسایل یک بعدی هستند.



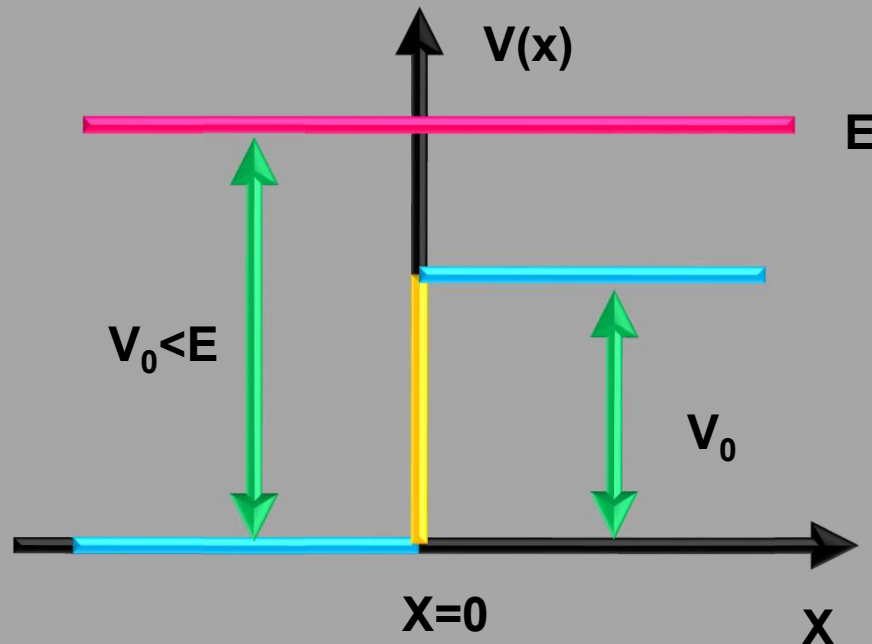


A silver wire, 100nm wide and 5μm long, is connected to two superconducting reservoirs implemented by aluminum films 400nm thick.

Nanowire sensors
placed in brain
using body's
main arteries



الف) پله پتانسیل (Potential Step)



$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) = Eu(x)$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))u(x) = 0$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) = q^2$$

$$x < 0 \rightarrow V(x) = 0 \rightarrow u(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx}$$

تمرین: شار تابع موج فوق را به دست آورید

$$j = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(u^* \frac{d}{dx} u(x) \right) = \frac{\hbar k}{m} (1 - |R|^2)$$

$$x > 0 \rightarrow V(x) = V_0 \rightarrow u(x) = T e^{iqx}$$

تمرین: شار تابع موج فوق را به دست آورید

$$j = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(u^* \frac{d}{dx} u(x) \right) = \frac{\hbar q}{m} |T|^2$$

چون مساله مستقل از زمان است پس شار باید پیوسته باشد:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b dx P(x, t) = j(a, t) - j(b, t) = 0 \quad \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

پس شار مستقل از x است

$$\frac{\hbar k}{m}(1 - |R|^2) = \frac{\hbar q}{m}|T|^2$$

از پیوستگی شار داریم که:

$$1 + R = T$$

از پیوستگی تابع موج در $x=0$ داریم که:

نکته: علی رغم آن که پتانسیل در $x = 0$ پیوسته نیست، اما مشتق تابع موج در $x=0$ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} V(x) = V_0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} V(x) = 0$$

پتانسیل پیوسته نیست زیرا:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{\varepsilon} - \left. \frac{du}{dx} \right|_{-\varepsilon} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right)$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)u(x)$$

0

اما مشتق تابع موج پیوسته است، زیرا

با استفاده از معادله شرودینگر، خواهیم داشت:

تمرین: با توجه به این که $u(x)$ پیوسته است، نشان دهید که حاصل انتگرال صفر می شود:

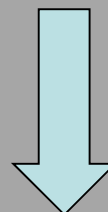
$$ik(1 - R) = iqT$$

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ k(1 - R) = qT \end{cases}$$



خلاصه آن که مشتق تابع موج نیز باید پیوسته باشد و از پیوستگی آن داریم:

$$\begin{cases} R = \frac{k - q}{k + q} \\ T = \frac{2k}{k + q} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{Reflected Flux} = \frac{\hbar k}{m} |R|^2 = \frac{\hbar k}{m} \left(\frac{k - q}{k + q} \right)^2 \\ \text{Transmitted Flux} = \frac{\hbar q}{m} |T|^2 = \frac{\hbar q}{m} \left(\frac{2k}{k + q} \right)^2 \end{cases}$$

تمرین: تحقیق کنید که قانون بقا شار صادق است

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Reflected Flux} = \frac{\hbar k}{m} |R|^2 = \frac{\hbar k}{m} \left(\frac{k - q}{k + q} \right)^2 \\ \text{Transmitted Flux} = \frac{\hbar q}{m} |T|^2 = \frac{\hbar q}{m} \left(\frac{2k}{k + q} \right)^2 \end{array} \right.$$

$$\frac{\hbar k}{m} (1 - |R|^2) = \frac{\hbar q}{m} |T|^2$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

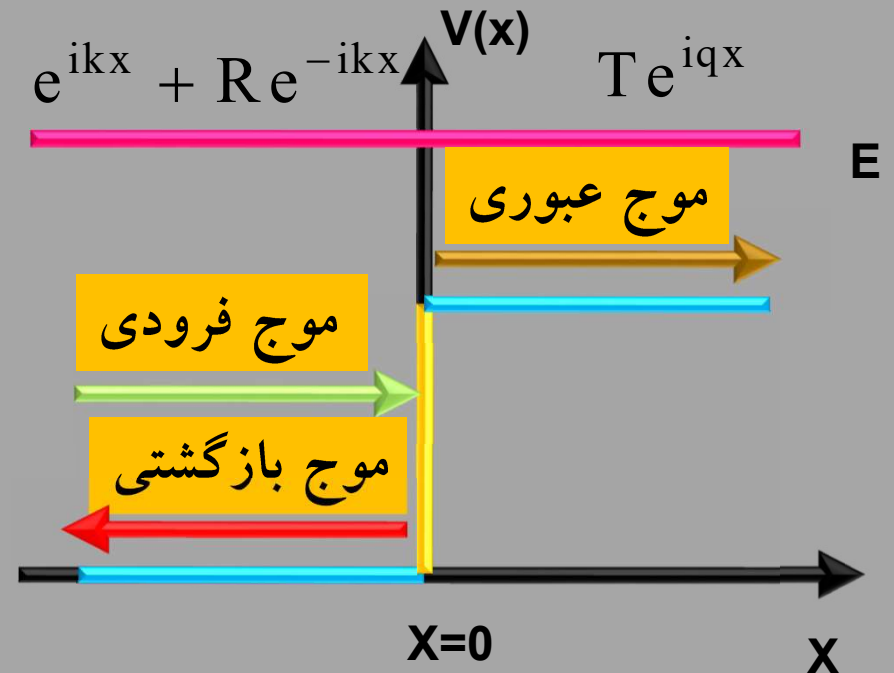
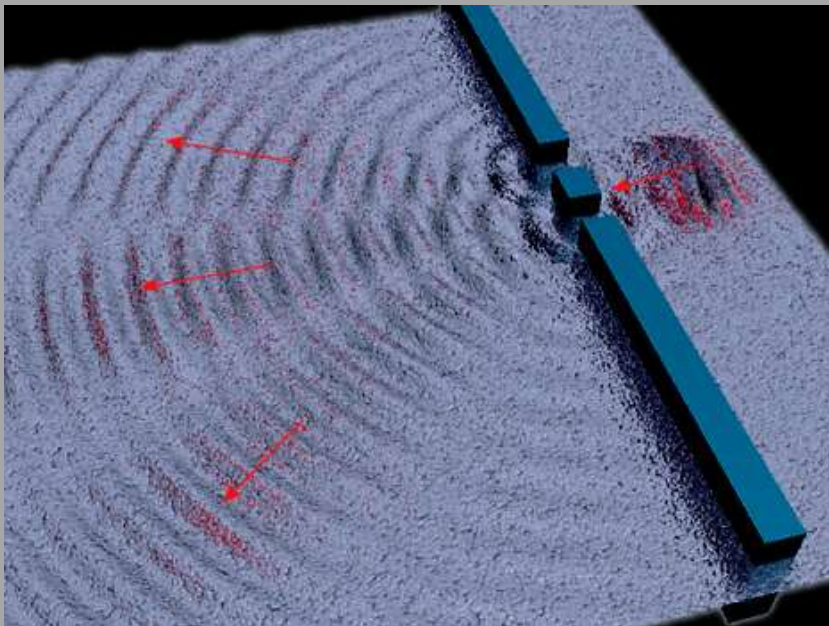
$$\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) = q^2$$

$\left\{ \begin{array}{l} R \\ T \end{array} \right.$

نتایج:

(1) اگر $E > V_0$ باشد از مکانیک کلاسیک می دانیم که ذره از سد عبور خواهد کرد ولی انرژی جنبشی آن کم خواهد شد تا قانون بقا را حفظ کند اما هرگز بازگشتی در کار نخواهد بود

در اینجا بر خلاف مکانیک کلاسیک، هم T و هم R غیر صفرند. این که ضریب بازگشت غیر صفر است نتیجه ای از خواص موجی ذره است. انعکاس جزئی نور از فصل مشترک دو محیط با ضریب شکستهای متفاوت مثال بسیار آشنایی است.



2) قانون بقاء شار برآورده می شود.

$$\frac{\hbar k}{m} (1 - |R|^2) = \frac{\hbar q}{m} |T|^2$$

(3) اگر $E \gg V_0$ باشد، یعنی $q \rightarrow k$ ، آنگاه $R \rightarrow 0$ و در نتیجه شار بازگشتی به سمت صفر میل می کند.

$$E \gg V_0$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) = q^2 \approx k^2$$

$$\begin{cases} R = \frac{k - q}{k + q} \approx 0 \\ T = \frac{2k}{k + q} \approx 1 \end{cases}$$

این نتیجه قابل درک است زیرا برای ذره ای که انرژی آن به مراتب بیشتر از سد پتانسیل روبه روی آن است، سد پتانسیل فقط می تواند یک اختلال کوچک به حساب آید و ذره گویی که سد را ندیده و از روی آن می گذرد. این پدیده از نظر کلاسیکی نیز قابل توجیه است.

(4) اگر $E < V_0$ باشد، آنگاه q موهومی می شود.

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) = q^2$$

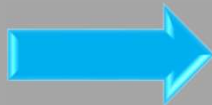


$$u(x) = T e^{-|q|x}$$

چون تابع موج برای $x > 0$ باید در x های بزرگ به سمت بینهایت میل نکند (تا مجدداً انتگرال پذیر باشد)

تمرین: نشان دهید در این صورت شار بازگشتی از رابطه زیر با تبدیل $q \rightarrow iq$ به دست می آید:

$$q \longrightarrow iq$$



$$\frac{\hbar k}{m} |R|^2 = \frac{\hbar k}{m} \left(\frac{k - i|q|}{k + i|q|} \right) \left(\frac{k - i|q|}{k + i|q|} \right)^*$$

$$\frac{\hbar k}{m} |R|^2 = \frac{\hbar k}{m} \left(\frac{k - i|q|}{k + i|q|} \right) \left(\frac{k + i|q|}{k - i|q|} \right) = \frac{\hbar k}{m}$$

$$|R|^2 = 1$$

بنابراین در این حالت نیز مانند کلاسیک توقع ما برآورده می شود.

$$T = \frac{2k}{k + i|q|}$$

یعنی همه شار وارد شده بازگشت می یابد. اما نکته درخور توجه در این حالت این است که:

این بدان معنی است که بخشی از موج به درون ناحیه ممنوعه نفوذ می کند.

این پدیده نفوذ بازهم از خاصیت موجی ناشی می شود و نشان خواهیم داد که این پدیده، تونل زنی از سد پتانسیلی که به طور کلاسیکی غیر قابل نفوذ است را امکان پذیر می سازد.

نکته: توجه کنید که در این حالت اگرچه $T \neq 0$ است ولی هنوز قانون بقاء صادق است.

گفتیم که $|R|^2$ برابر یک است. پس باید بتوانیم نشان دهیم که شار عبوری برابر صفر است.

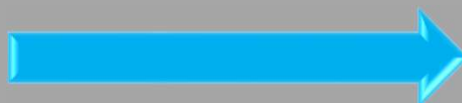
ولی $T \neq 0$ است و شار عبوری هم متناسب با $|T|^2$ است! پس چطور می توان نشان داد که شار عبوری برابر صفر است؟

پاسخ سوال مطرح شده ساده است، زیرا نباید از رابطه زیر برای محاسبه شار استفاده کنیم:

$$j = \frac{\hbar q}{m} |T|^2$$

باید از ابتدا در این حالت شار را با توجه به حقیقی بودن تابع موج مجدداً حساب کنیم:

$$u(x) = T e^{-|q|x}$$

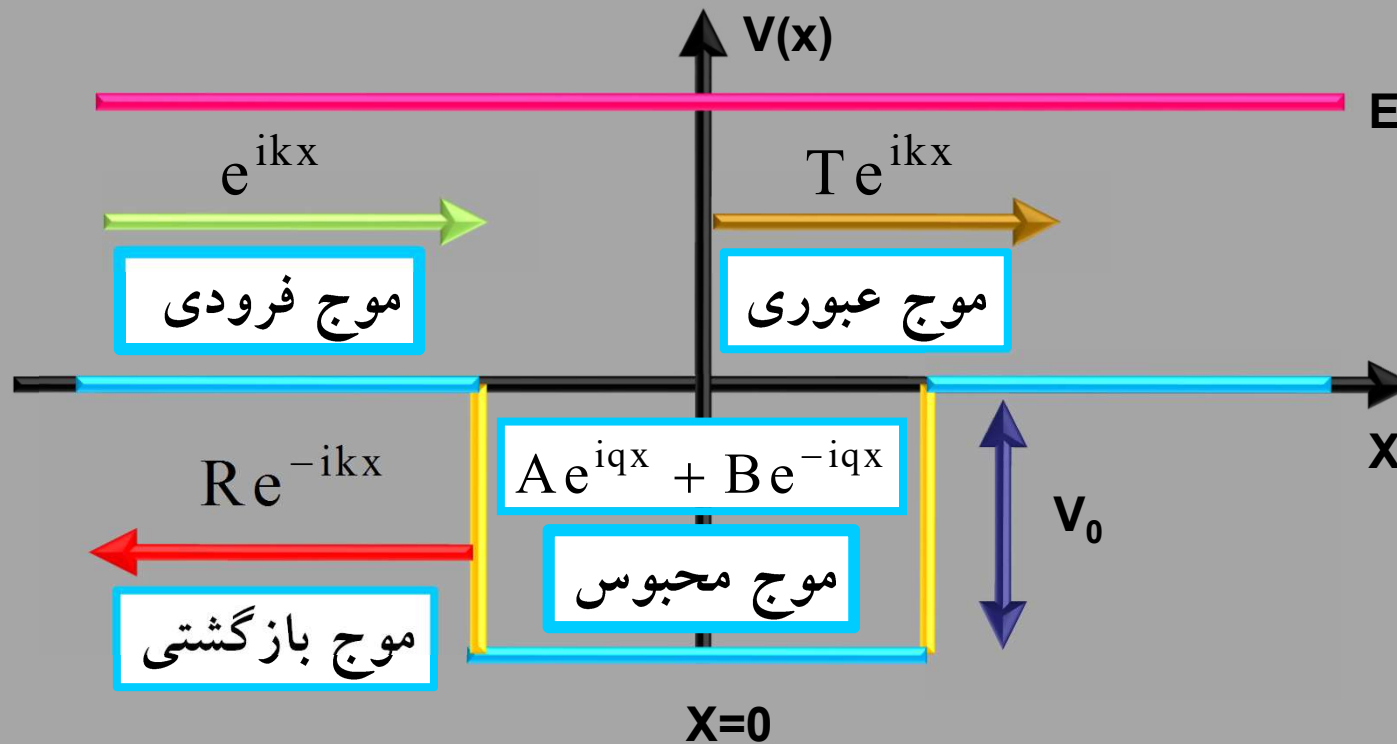


$$j_{\text{transmitted}} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}\left(u^* \frac{du}{dx}\right) = 0$$

بنابراین دقت شود که این به معنی پدیده **تونل زنی نیست**. در تونل زنی باید شار عبوری غیر صفر باشد.

پس پدیده ای که در اینجا رخ داده است از ماهیت موجی بودن ذره نشأت گرفته است، بدان معنی که ذره به عنوان موج توانسته است خود را به بالای پله برساند و سر و گوشی آب دهد، ولی دوباره برمی گردد به طوری که شار در طرف راست نداشته باشیم.

(ب) چاه پتانسیل (Potential well)



$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ -V_0 & |x| \leq a \end{cases}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) = Eu(x)$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))u(x) = 0$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) = q^2$$

$$u(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & x < -a \\ Ae^{iqx} + Be^{-iqx} & |x| \leq a \\ Te^{ikx} & x > a \end{cases}$$

تمرین: طبق قانون بقا شار

$$\frac{\hbar k}{m} (1 - |R|^2) = \frac{\hbar q}{m} (|A|^2 - |B|^2) = \frac{\hbar k}{m} |T|^2$$

از پیوستگی توابع موج و مشتق آنها در $x=a$ و $x=-a$ داریم که:

$$\begin{cases} e^{-ika} + R e^{ika} = A e^{-iqa} + B e^{iqa} \\ ik(e^{-ika} - R e^{ika}) = iq(A e^{-iqa} - B e^{iqa}) \\ A e^{iqa} + B e^{-iqa} = T e^{ika} \\ iq(A e^{iqa} - B e^{-iqa}) = ike^{ika} \end{cases}$$

تمرین: دستگاه فوق را حل کنید و جوابهای آن را به دست آورید و نشان دهید که:

$$R = ie^{-2ika} \frac{(q^2 - k^2) \sin 2qa}{2kq \cos 2qa - i(q^2 + k^2) \sin 2qa}$$

$$T = e^{-2ika} \frac{2kq}{2kq \cos 2qa - i(q^2 + k^2) \sin 2qa}$$

$$R = ie^{-2ika} \frac{(q^2 - k^2) \sin 2qa}{2kq \cos 2qa - i(q^2 + k^2) \sin 2qa}$$

$$T = e^{-2ika} \frac{2kq}{2kq \cos 2qa - i(q^2 + k^2) \sin 2qa}$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) = q^2$$

$$a) \text{ if } E \gg V_0 \Rightarrow q \longrightarrow k \Rightarrow R \longrightarrow 0 \Rightarrow T \longrightarrow 1$$

$$1) E > 0$$

$$b) \text{ if } E \longrightarrow 0 \Rightarrow k \longrightarrow 0 \Rightarrow T \longrightarrow 0 \Rightarrow R \longrightarrow -1$$

$$c) \text{ if } \sin 2qa = 0 \longrightarrow 2qa = n\pi \Rightarrow \lambda = 2\pi/q = 4a/n \Rightarrow R \longrightarrow 0 \Rightarrow |T| \longrightarrow 1$$

$$q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) \Rightarrow E + V_0 = \frac{q^2 \hbar^2}{2m} \Rightarrow E = -V_0 + \frac{q^2 \hbar^2}{2m}$$

پراکندگی الکترونیهای کم انرژی از گازهای نادر اولین بار توسط Ramsauer and Townsend مشاهده شد. الکترونیهای پراکنده شده تعدادشان بسیار زیاد و تقریباً هیچ الکترونی بازتاب نمی یابد. علت این است که در واقع چاه پتانسیل (اتم گاز نادر)، الکترونیهای فرودی کم انرژی، که دارای ویژه مقادیر انرژی اتم گاز نادر یا همان چاه است، را تشدید می کند.

$$2) E < 0, |E| < V_0$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0) = q^2$$

$$\frac{2m|E|}{\hbar^2} = -k^2 = \kappa^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - |E|) = q^2$$

$$u(x) = \begin{cases} C_1 e^{\kappa x} & x < -a \\ C_2 e^{-\kappa x} & x > a \end{cases}$$

$$u(x) = A \cos qx + B \sin qx \quad -a < x < a$$

$$-\frac{2m|E|}{\hbar^2} = k^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}(-|E| + V_0) = q^2$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = -\kappa^2 < 0$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E) = q^2 > 0$$

چون در اینجا با توابع حقیقی در خارج از چاه سر و کار داریم بهتر است که تابع موج درون چاه را هم به صورت حقیقی بنویسیم:

$$u(x) = \begin{cases} C_1 e^{\kappa x} & x < -a \\ C_2 e^{-\kappa x} & x > a \end{cases}$$

با اعمال شرایط پیوستگی بر تابع موج و مشتق آن در مرزهای چاه:

$$u(x) = A \cos qx + B \sin qx \quad -a < x < a$$

$$\begin{cases} C_1 e^{-\kappa a} = A \cos qa - B \sin qa & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa C_1 e^{-\kappa a} = q(A \sin qa + B \cos qa) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 e^{-\kappa a} = A \cos qa + B \sin qa & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa C_2 e^{-\kappa a} = q(A \sin qa - B \cos qa) & (4) \end{cases}$$

$$\frac{(4)}{(3)} \Rightarrow \kappa = q \frac{A \sin qa - B \cos qa}{A \cos qa + B \sin qa}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \kappa = q \frac{A \sin qa + B \cos qa}{A \cos qa - B \sin qa}$$

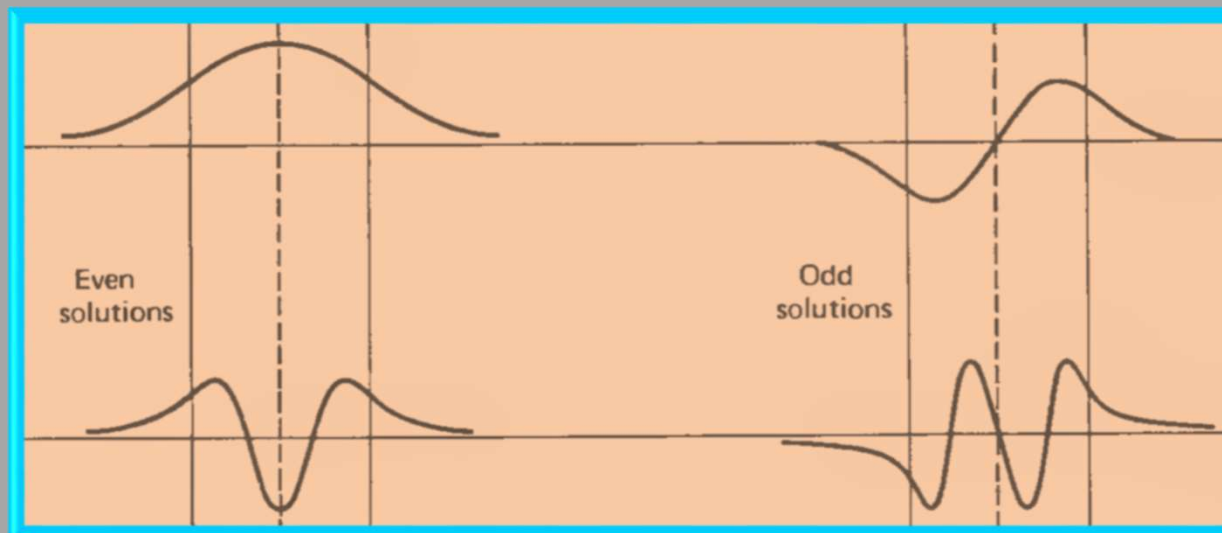
$$\kappa = q \frac{A \sin qa - B \cos qa}{A \cos qa + B \sin qa} = q \frac{A \sin qa + B \cos qa}{A \cos qa - B \sin qa}$$

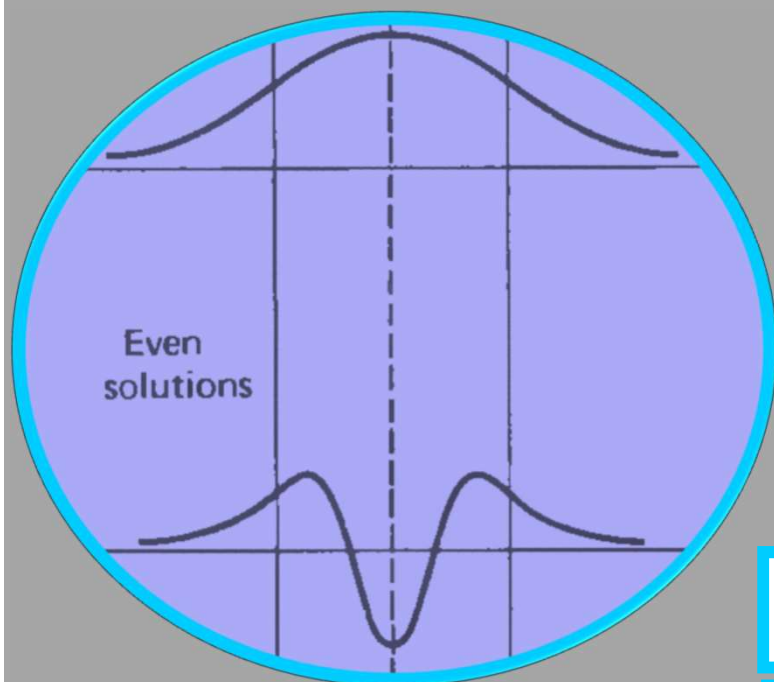
$$\frac{A \sin qa - B \cos qa}{A \cos qa + B \sin qa} = \frac{A \sin qa + B \cos qa}{A \cos qa - B \sin qa}$$

این تساوی فقط وقتی
امکان پذیر است که **A**
یا **B** یکی صفر باشد.

if $A = 0 \Rightarrow$ odd wave function $\Rightarrow u(x) = B \sin qx$

if $B = 0 \Rightarrow$ even wave function $\Rightarrow u(x) = A \cos qx$





الف) پاسخهای زوج

$$B = 0 \Rightarrow u(x) = A \cos qx$$

$$\kappa = q \frac{A \sin qa - B \cos qa}{A \cos qa + B \sin qa} = q \tan qa$$

$$y = qa$$

$$\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$$

تعریف:

تمرین: رابطه زیر را به دست آورید:

$$\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y} = \tan y$$

راهنمایی: از روابط زیر استفاده کنید:

$$\kappa = q \tan qa$$

$$y = qa$$
$$\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = -\kappa^2 < 0$$
$$\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E) = q^2 > 0$$

$$\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y} = \tan y$$

با استفاده از رابطه فوق می توان ویژه مقادیر انرژی را به دست آورد:

برای این منظور کافی است محل تلاقی دو منحنی زیر را به دست آورد:

$$f_1(y) = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}$$

$$f_2(y) = \tan y$$

در این صورت y که معرف محل تلاقی است تعیین می شود، که پس از آن با استفاده از روابط زیر به راحتی ویژه مقادیر انرژی E تعیین می شوند:

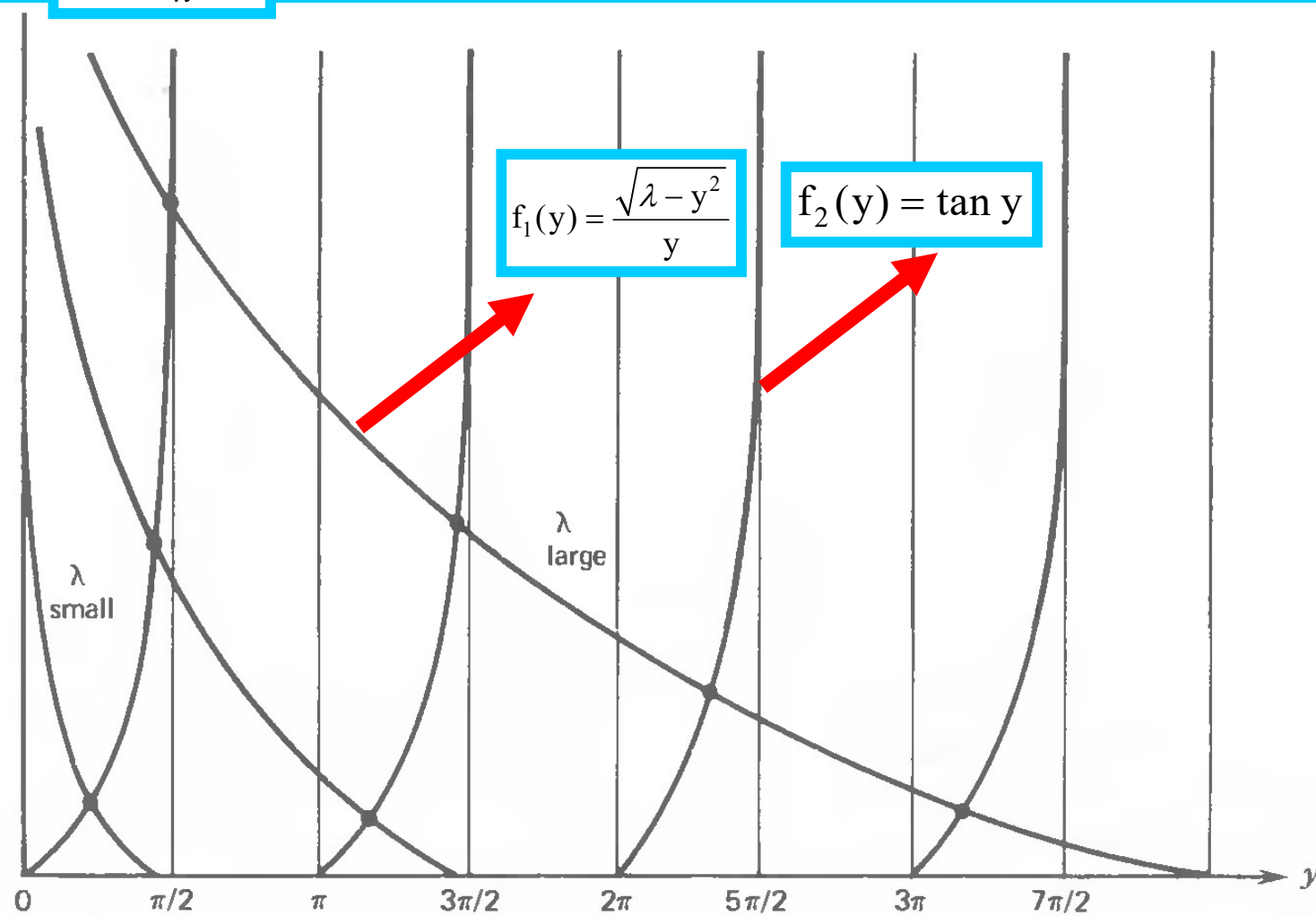
$$y = qa$$

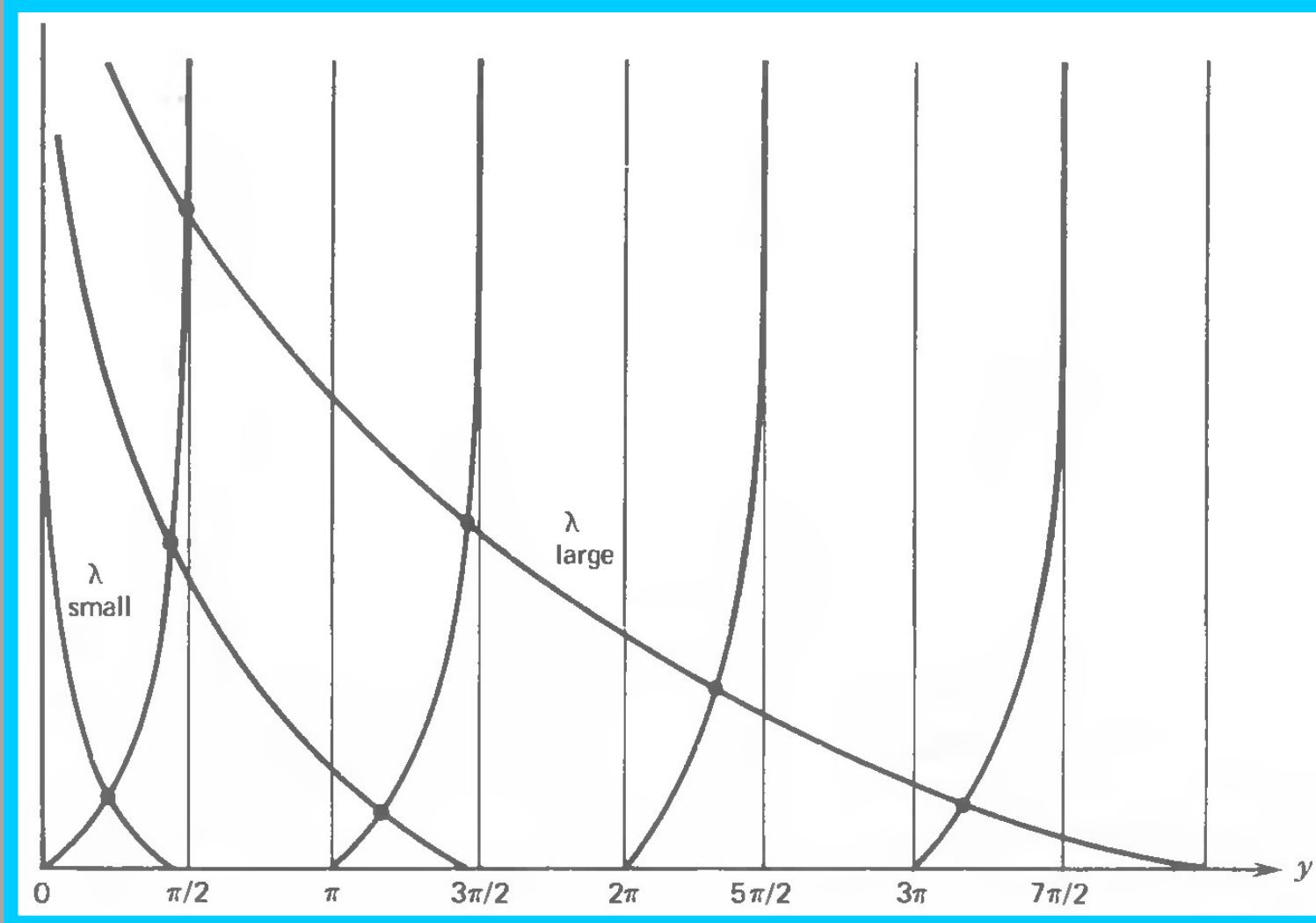
$$\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 + E) = q^2$$

هر چه λ بزرگتر باشد، V_0 هم بزرگتر می شود. V_0 بزرگتر خود معادل عمق بیشتر پتانسیل است. پس از شکل می توان گفت که چاه عمیقتر به تعداد جوابهای بیشتر یعنی ویژه بیشتری منجر می شود.

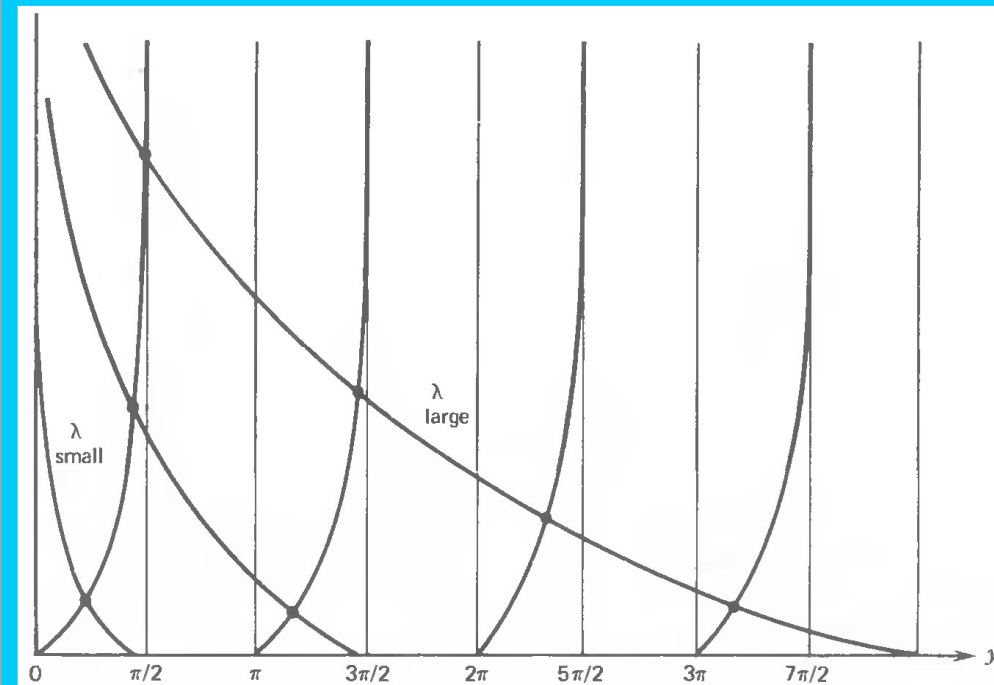
ما در اینجا محل تلاقی دو منحنی را با استفاده از رسم شکل به دست می آوریم، ولی شما به عنوان تمرین می توانید آن را با دقت بیشتر با استفاده از رایانه به دست آورید.

$$\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$$





شکل فوق همچنین نشان می دهد که هر چه قدر هم که λ کوچک باشد، حتما حداقل یک جواب وجود دارد. این ویژگی پتانسیلهای جاذب یک بعدی است و در مورد پتانسیلهای سه بعدی صادق نیست. پتانسیلهای سه بعدی بیشتر شبیه توابع فرد عمل می کنند که در آنها برای λ های به قدر کافی کوچک می تواند اصلا جوابی وجود نداشته باشد.



اگر λ خیلی بزرگ باشد آنگاه منحنی $f_1(y)$ افقی تر می شود. بنابراین فاصله صفرها از هم مساوی می شود. در این صورت از روی شکل پیداست که فاصله صفرهای متوالی از یکدیگر برابر π می شود و اولین صفر در $\pi/2$ روی می دهد، پس می توان نوشت:

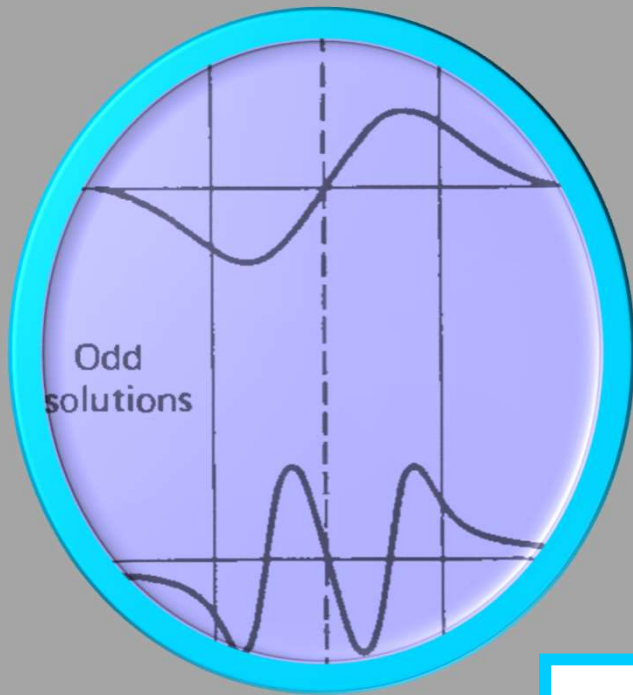
$$y \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$y = qa$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 + E) = q^2$$

$$E = -V_0 + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{a} \right)^2$$

که همان جواب چاه پتانسیل عمیق (پینهایت) برای توابع زوج آن است که قبلا به دست آورده بودیم.



ب) پاسخهای فرد

$$A = 0 \Rightarrow u(x) = B \sin qx$$

$$\kappa = q \frac{A \sin qa - B \cos qa}{A \cos qa + B \sin qa} = -q \cot qa$$

$$\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y} = \cot y$$

$$= \tan(\pi / 2 + y)$$

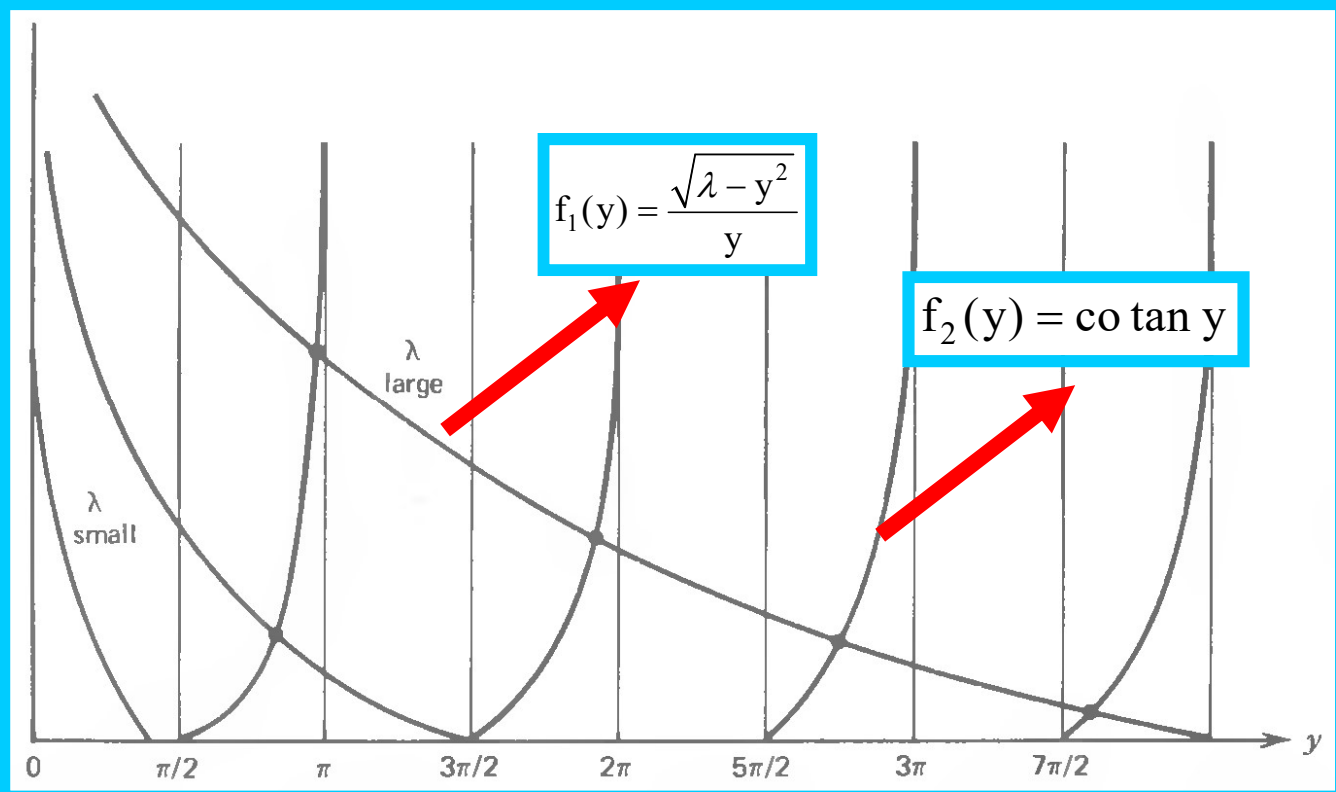
$$y = qa$$

$$\lambda = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$$

تعریف:

پس همان شکل قبلی را باید بکشیم منتها این بار منحنیهای $\tan y$ را به اندازه $\pi/2$ به سمت راست شیفت دهیم.

اگر λ خیلی بزرگ باشد آنگاه منحنی $f_1(y)$ افقی تر می شود. بنابراین فاصله صفرها از هم مساوی می شود. در این صورت از روی شکل پیدا است که فاصله صفرهای متوالی از یکدیگر برابر π می شود ولی اینبار اولین صفر در $\pi/2$ روی نمی دهد، پس می توان نوشت:



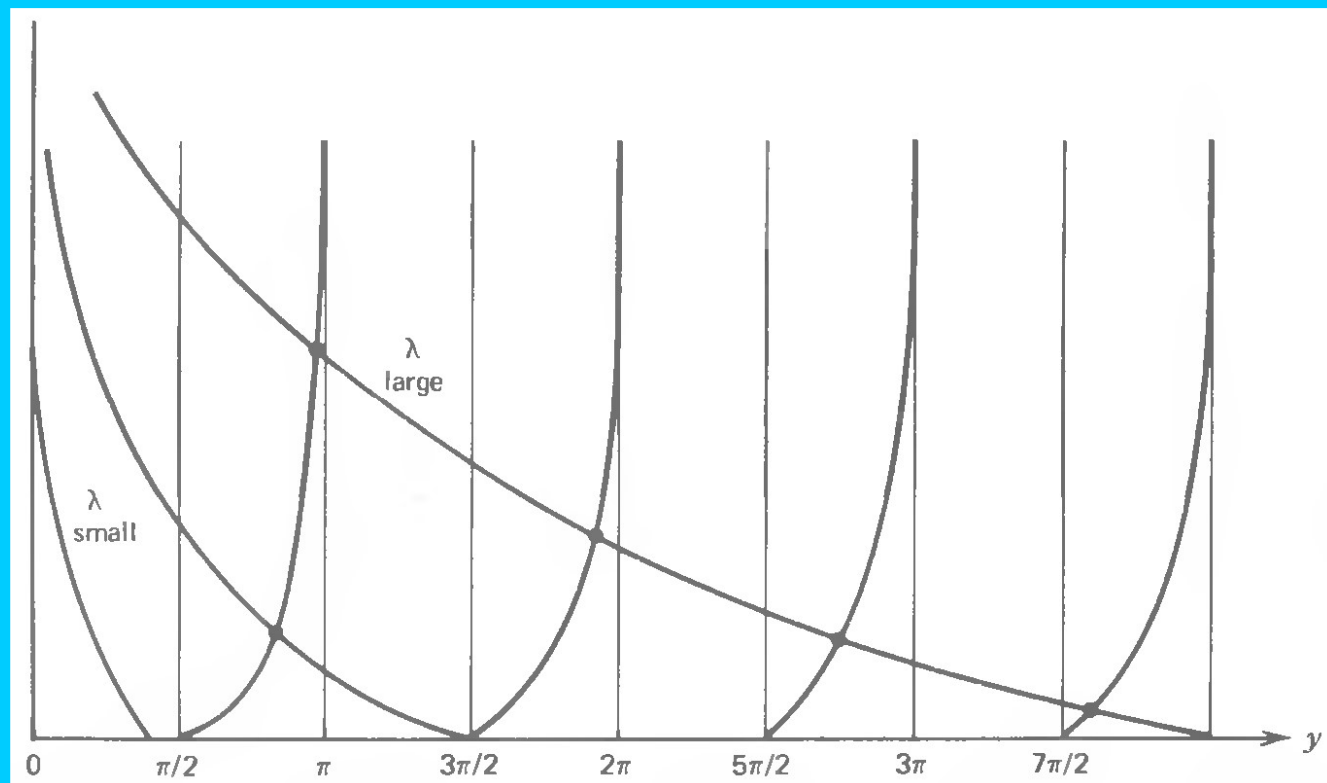
$$\lambda \gg 1$$

$$y \approx n\pi$$

$$E = -V_0 + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2$$

که همان جواب چاه پتانسیل عمیق (بینهایت) برای توابع فرد آن است که قبلا به دست آورده بودیم.

شکل فوق همچنین نشان می دهد که بر خلاف حالت زوج که هر چه قدر هم λ کوچک می بود، حتما حداقل یک جواب وجود می داشت، باید حداقل رابطه زیر وجود داشته باشد تا یک جواب داشته باشیم.



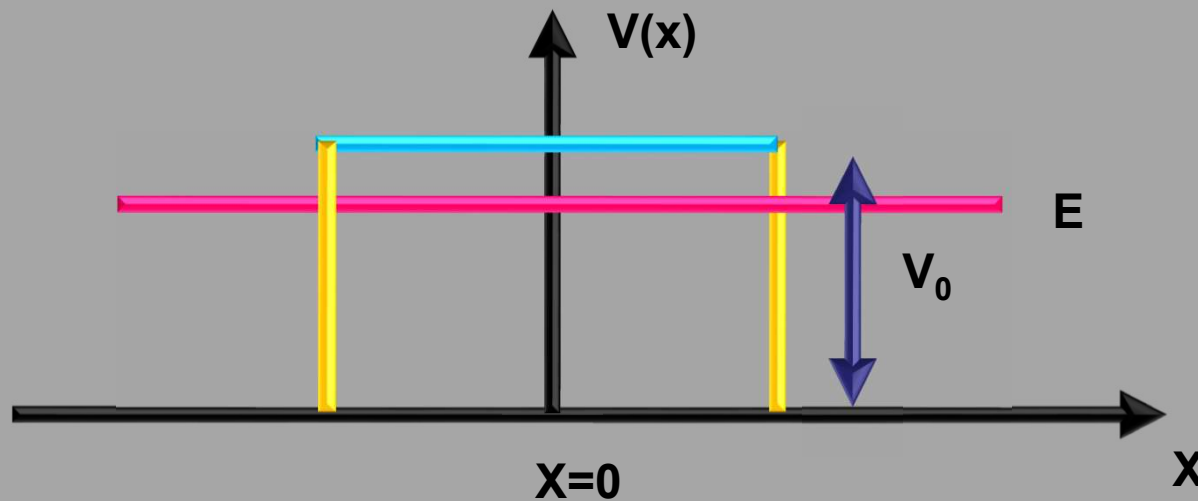
$$\sqrt{\lambda - (\pi/2)^2} > 0$$

$$\lambda > \pi^2 / 4$$



همه جوابهای فرد در $x=0$ صفر می شوند و بنابراین مساله حالت مقید برای جوابهای فرد شبیه پتانسیل زیر خواهد شد، که این پتانسیل بسیار شبیه آن چیزی است که در دنیای سه بعدی (مثلا هسته یک اتم که در مبدا یعنی محل هسته پنهان است) می بینیم.

(ج) سد پتانسیل (Potential Barrier)



$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ V_0 & |x| \leq a \end{cases}$$

در اینجا فقط حالت $E < V_0$ را بحث می کنیم تا بتوانیم پدیده تونل زنی را مورد بررسی قرار دهیم، پدیده ای که در مکانیک کلاسیک روی نمی دهد.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) = Eu(x)$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))u(x) = 0$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) = -\kappa^2$$

$$u(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & x < -a \\ Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} & |x| \leq a \\ Te^{ikx} & x > a \end{cases}$$

تمرین: شرایط پیوستگی تابع موج و مشتق آن را بنویسید و با استفاده از آنها رابطه زیر را به دست آورید:

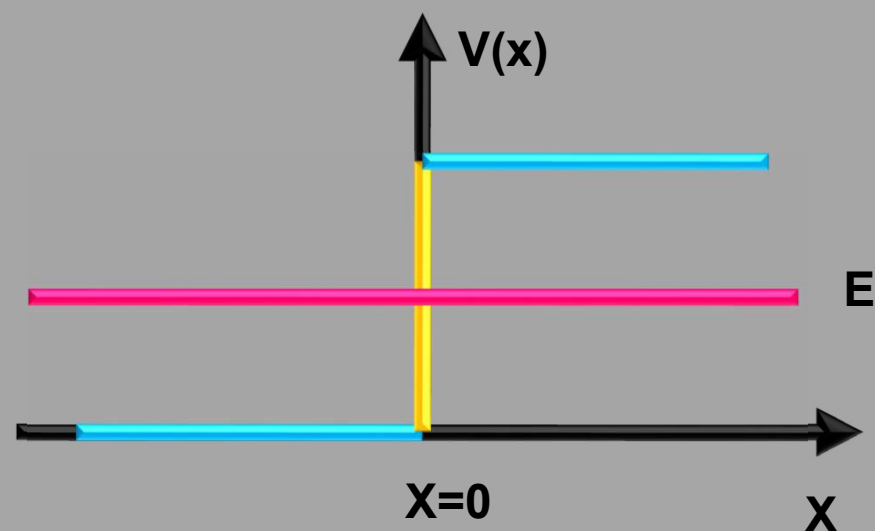
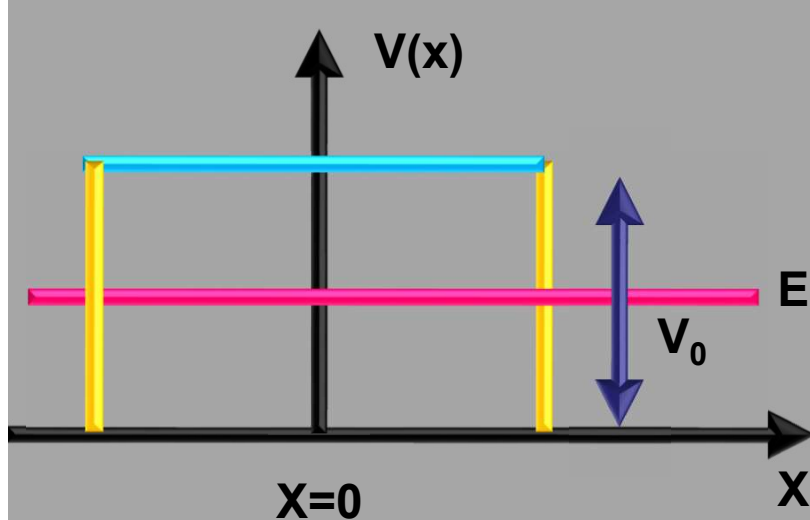
$$T = e^{-2ika} \frac{2k\kappa}{2k\kappa \cosh 2\kappa a - i(\kappa^2 - k^2) \sinh 2\kappa a}$$

تمرین: رابطه زیر را به دست آورید:

$$|T|^2 = \frac{2k\kappa}{\left(k^2 + \kappa^2\right)^2 \sinh^2 2\kappa a + (2k\kappa)^2}$$

علی رغم وجود سد با انرژی بیشتر از انرژی ذره فرودی شار عبوری وجود دارد.

توجه کنید که این مساله با حالت (4) مساله پله پتانسیل تفاوت دارد:



در اینجا بر خلاف حالت (4) مساله پله واقعا انتقال انرژی داریم (یعنی شار در سمت راست غیر صفر است)

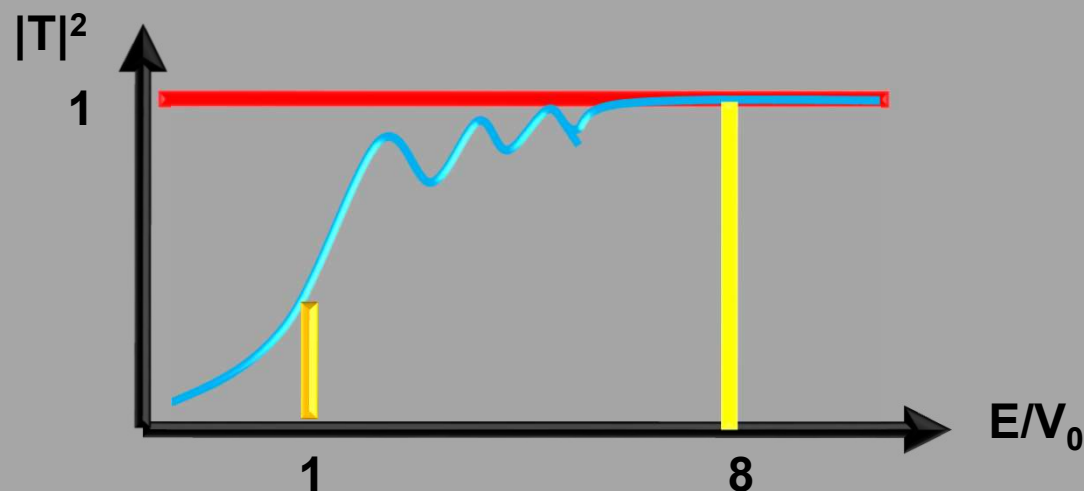
$$|T|^2 = \frac{2k\kappa}{(k^2 + \kappa^2)^2 \sinh^2 2\kappa a + (2k\kappa)^2}$$

$$\text{if } E \longrightarrow 0 \Rightarrow k \longrightarrow 0 \Rightarrow T \longrightarrow 0$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) = -\kappa^2$$

یعنی در $E = 0$ گذر امکان پذیر نیست، اما با افزایش حتی اندکی انرژی شار عبوری ذره مخالف صفر و در نتیجه از سد عبور خواهد کرد. در $E = V_0$ هم گذر و هم انعکاس داریم. در $E = 8V_0$ ضریب عبور به سمت یک و ضریب انعکاس به سمت صفر میل می کند.



تقریب Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB)

در حالت کلی سدهای فیزیکی مربعی نیستند و برای آن که بتوانیم بحث خود را به مسائل واقعی تعمیم دهیم می توانیم از تقریب **WKB** استفاده کنیم، که در آن فرض می شود سد واقعی از تعداد زیادی سد مربعی تشکیل شده است.

پهنای سد $\times$ انرژی ذره فرودی $\propto \kappa a$

$\longrightarrow \infty$

$\kappa a \gg 1$

$$\kappa a \gg 1 \Rightarrow \sinh \kappa a \approx e^{\kappa a}$$

$$\begin{aligned} |T|^2 &= \frac{2k\kappa}{\left(k^2 + \kappa^2\right)^2 \sinh^2 2\kappa a + (2k\kappa)^2} \quad 0 \\ &\approx \frac{2k\kappa}{\left(k^2 + \kappa^2\right)^2 \sinh^2 2\kappa a} \approx \frac{2k\kappa}{\left(k^2 + \kappa^2\right)^2} e^{-4\kappa a} \end{aligned}$$

$$|T|^2 \approx \frac{2k\kappa}{(k^2 + \kappa^2)^2} e^{-4\kappa a}$$

این رابطه اساس تقریب **WKB** را تشکیل می دهد، که در آن ضریب جمله نمایی از اهمیت چندانی برخوردار نخواهد بود و فقط خود تابع نمایی اهمیت دارد.

اگر از طرفین رابطه فوق لگاریتم بگیریم خواهیم داشت که:

$$\ln |T|^2 \approx \ln \frac{2k\kappa}{(k^2 + \kappa^2)^2} + \ln e^{-4\kappa a}$$

$$\ln |T|^2 \approx -2\kappa(2a)$$

$$\ln |T|^2 \approx \ln \frac{2k\kappa}{(k^2 + \kappa^2)^2} - 4\kappa a$$

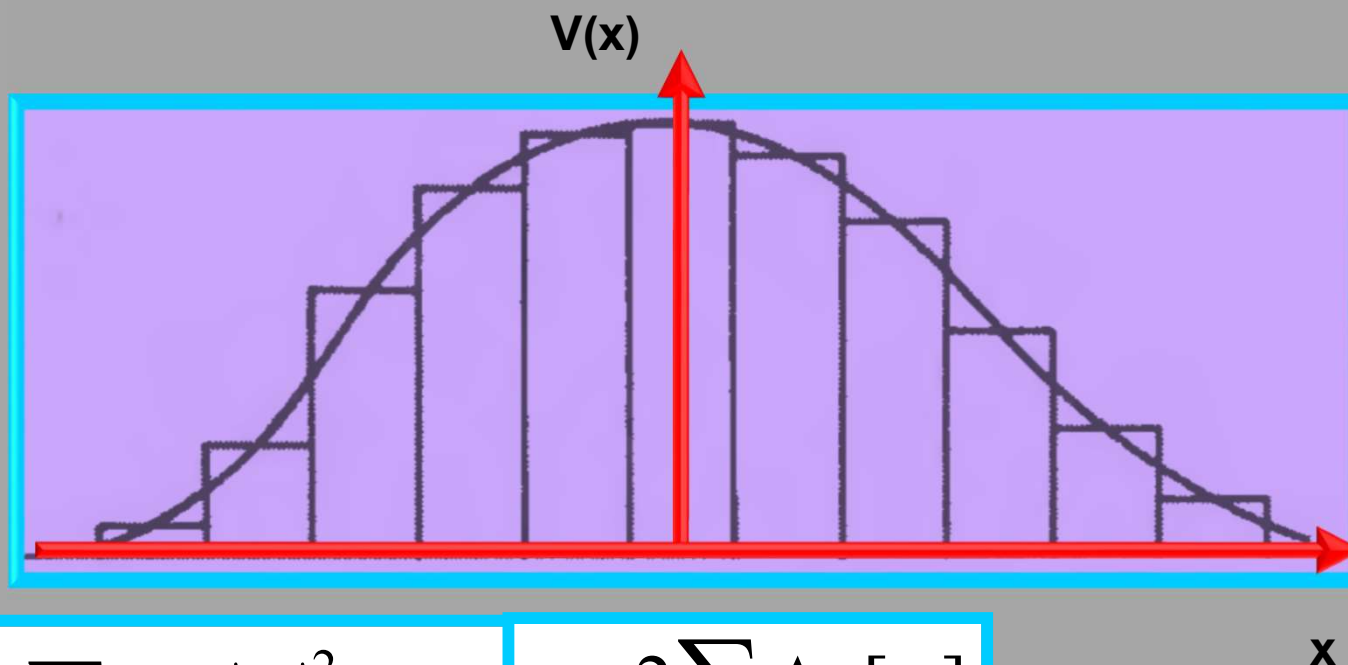
(A red arrow points from the fraction to a box containing 0, indicating its neglect.)

$$\ln |T|^2 \approx -2[\kappa \Delta x]$$

$$\kappa a \gg 1$$

$$\ln |T|^2 \approx -4\kappa a$$

در زیر یک سد غیر مربعی نمایش داده شده است، که آن را به چندین سد مربعی کوچکتر تقسیم کرده ایم.

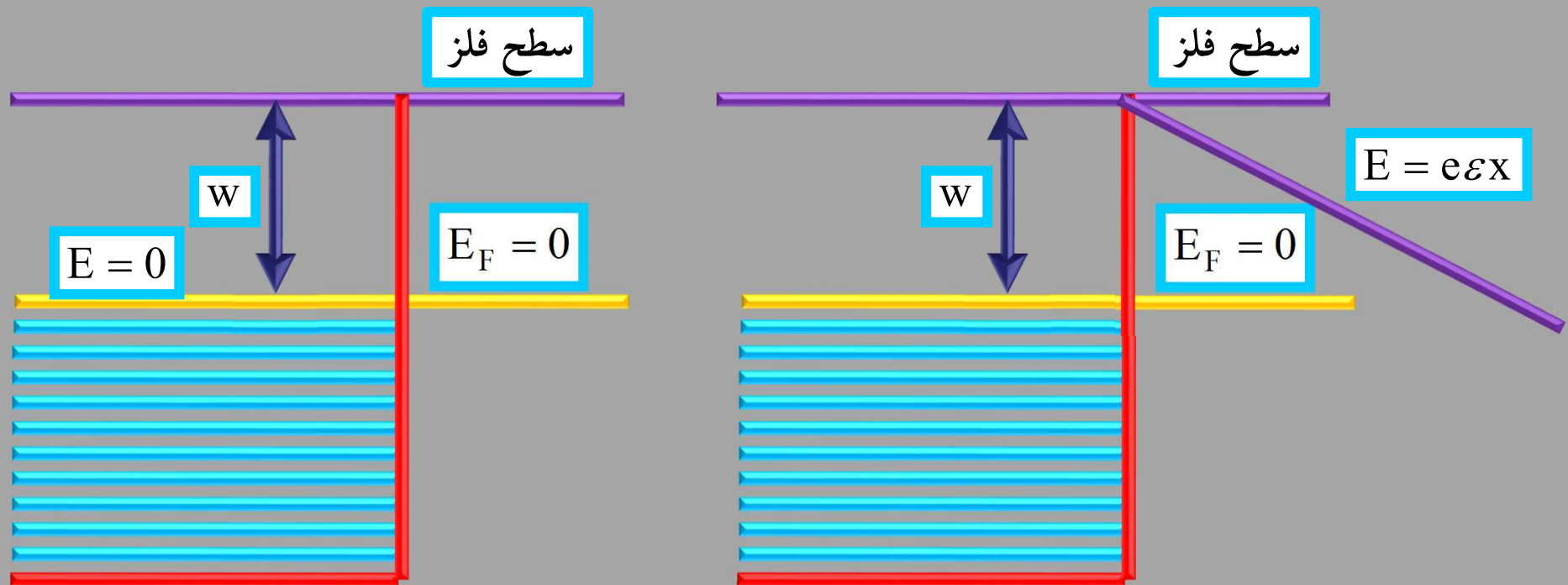


$$\ln |T|^2 = \sum_{\text{Partial Barrier}} \ln |T|^2_{\text{Partial Barrier}} \approx -2 \sum \Delta x [\kappa]$$

$$= \int_{\text{barrier}} dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E]}$$

$$|T|^2 = \exp \left\{ \int dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E]} \right\}$$

پدیده تونل زنی



الکترون در فلز در سطح فرمی با $E = 0$ در مقابل چاه به ارتفاع تابع کار W قرار دارد. اعمال میدان سبب کاهش ارتفاع سد یا افزایش انرژی الکترون متناسب با میدان اعمال شده می شود.

$$|T|^2 = \exp \left\{ \int dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E]} \right\}$$

$$V(x) = w$$

$$E = e\epsilon x$$

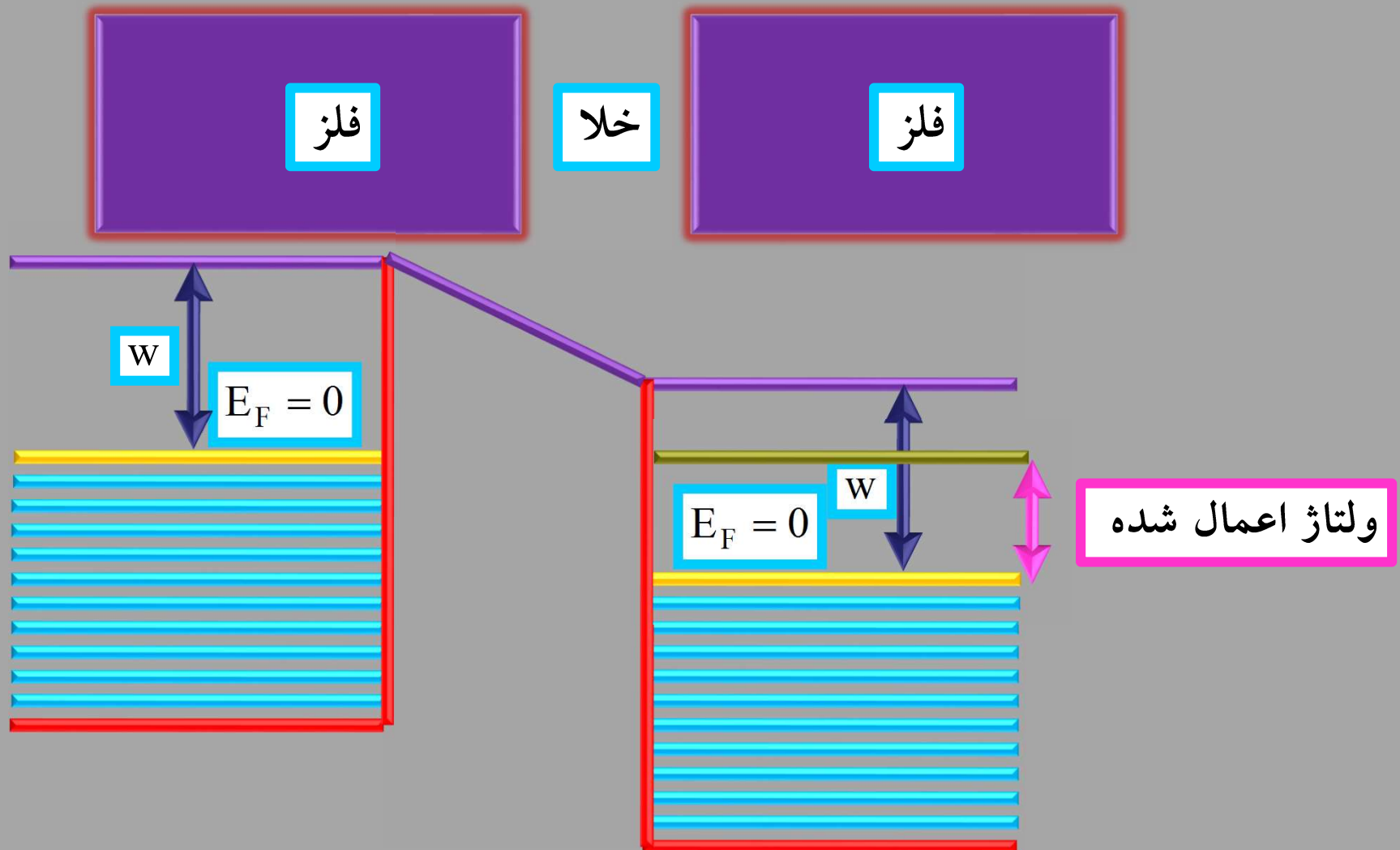
a پهنای چاه
است که قبل از
اعمال میدان
بینهایت و پس
از اعمال به
نسبت آن کاهش
می یابد

$$|T|^2 = \exp \left\{ \int_0^a dx \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [w - e\epsilon x]} \right\}$$

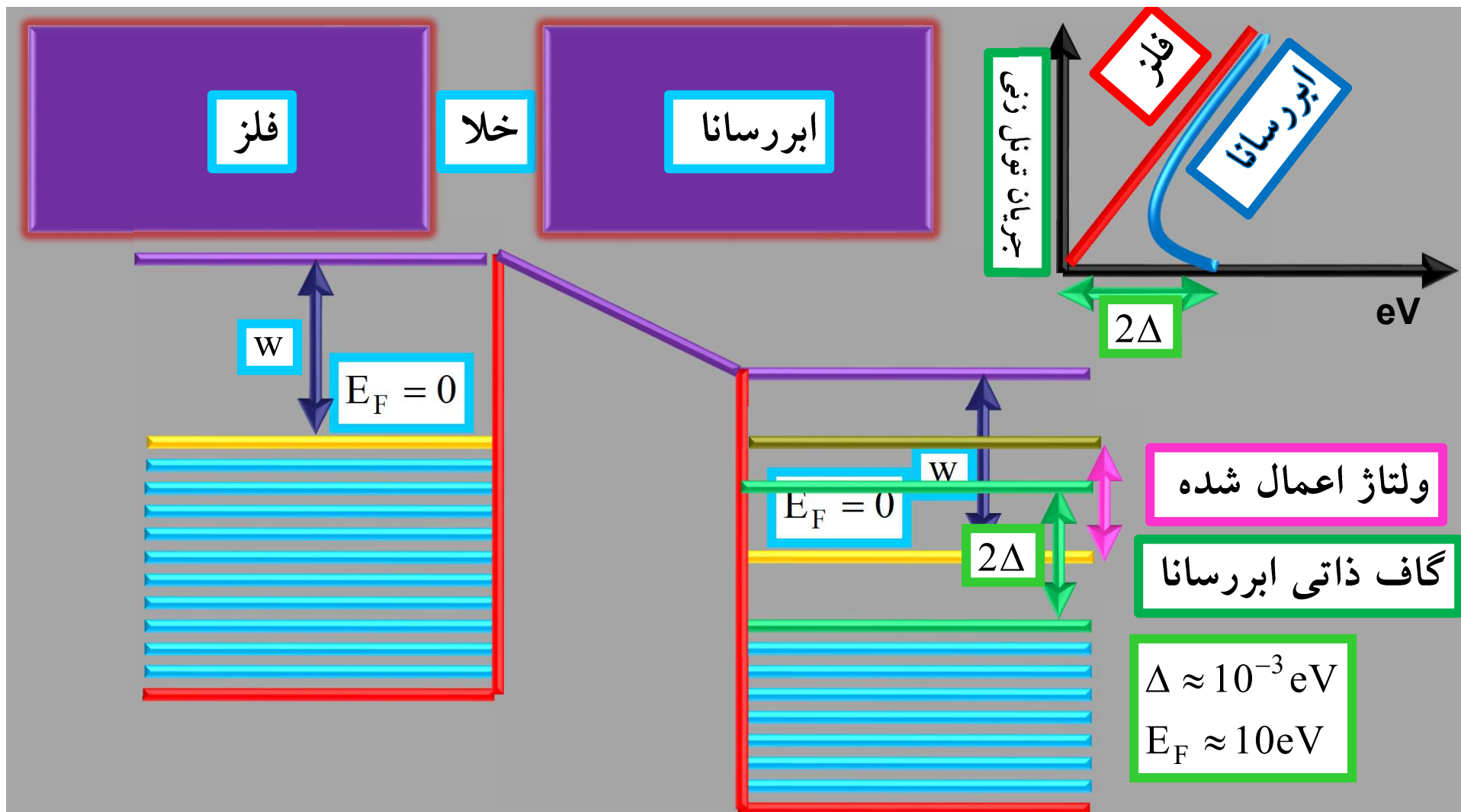
$$a = \frac{w}{e\epsilon}$$

$$\int dx (A + Bx)^{1/2} = \frac{(A + Bx)^{3/2}}{3B/2}$$

$$|T|^2 = \exp \left\{ \left(2\sqrt{2} / 3 \right) \sqrt{\frac{mw}{\hbar^2}} (w / e\epsilon) \right\}$$



قبل از اعمال میدان الکتریکی امکان انتقال الکترونها از یک فلز به فلز دیگر وجود ندارد. اما پس از اعمال میدان بر یکی از فلزها سطح فرمی آن پایین می‌رود. این بدان معنی است که تعدادی از الکترونها از زیر سطح فرمی به بالای آن انتقال می‌یابند. بنابراین ترازهای خالی زیر سطح فرمی ایجاد می‌شود. این ترازها آمادگی جذب الکترونها را دارند. بنابراین پس از اعمال میدان الکترونها فلز مجاور به درون الکترونها فلزی که بر آن میدان اعمال شده است سر می‌خورند یا به عبارت بهتر تونل زنی می‌کنند.



در اتصال فلز به ابر رسانا باید حداقل به اندازه گاف ابرسانا 2Δ که ویژگی ذاتی ابرساناست میدان اعمال کنیم تا جریان الکترونی از فلز به ابرسانا (تونل زنی از فلز به ابرسانا) آغاز شود. ویژگی ابرسانا این است که بین $E_F - \Delta$ تا $E_F + \Delta$ هیچ حالتی برای اشغال شدن وجود ندارد. یعنی اگر $a\varepsilon < \Delta/e$ باشد که در آن $a\varepsilon = w/e$ پدیده تونل زنی نداریم.

نوسانگر هماهنگ

The Harmonic Oscillator

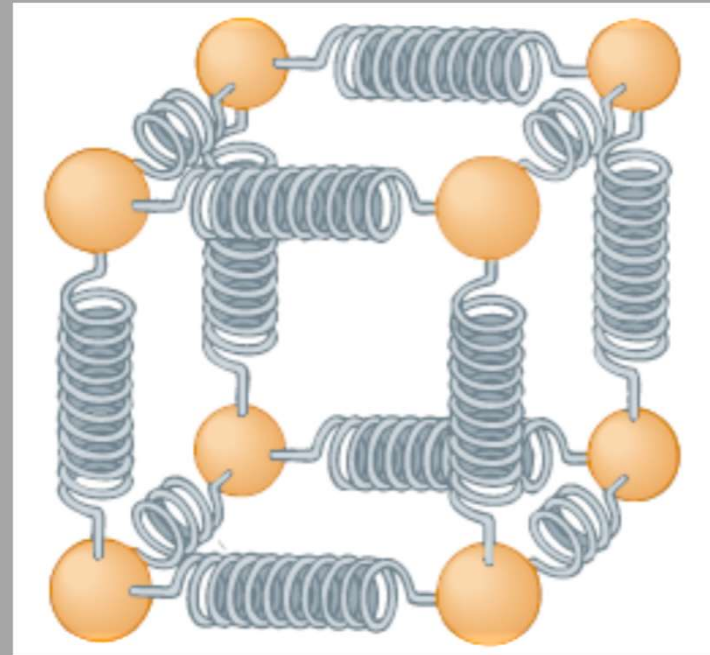
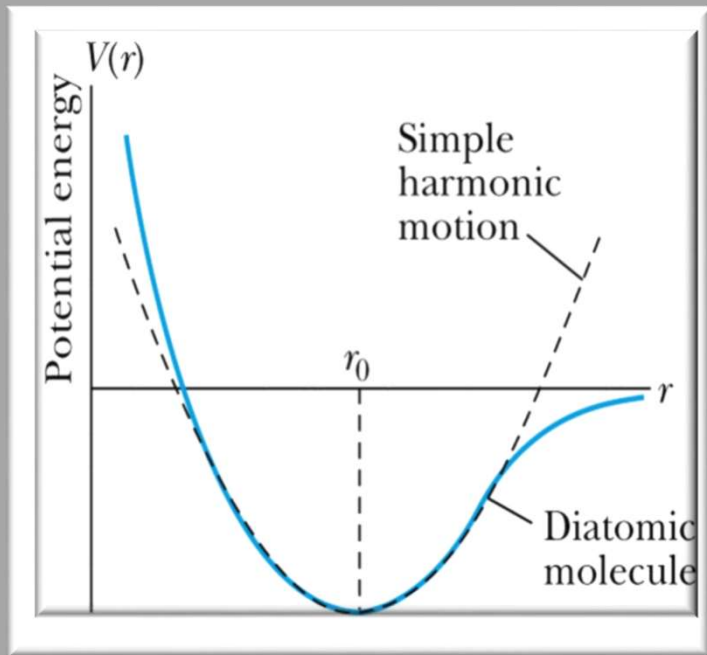
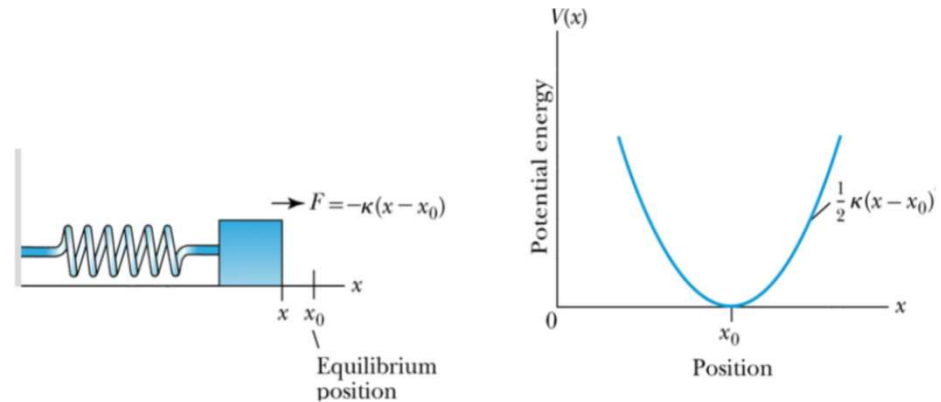
در مثالهای قبلی پتانسیل یا صفر بود یا حداکثر یک مقدار ثابت بود، که به همین دلیل حل معادله مستقل از زمان شرودینگر به سادگی قابل انجام بود.

در اینجا پتانسیل وابسته به مکان یک بعدی نوسانگر هماهنگ ساده یعنی $\frac{1}{2}kx^2$ را در نظر می گیریم تا با یکی از تکنیکهای حل معادله دیفرانسیل در حالت پتانسیل غیر صفر آشنا شویم.

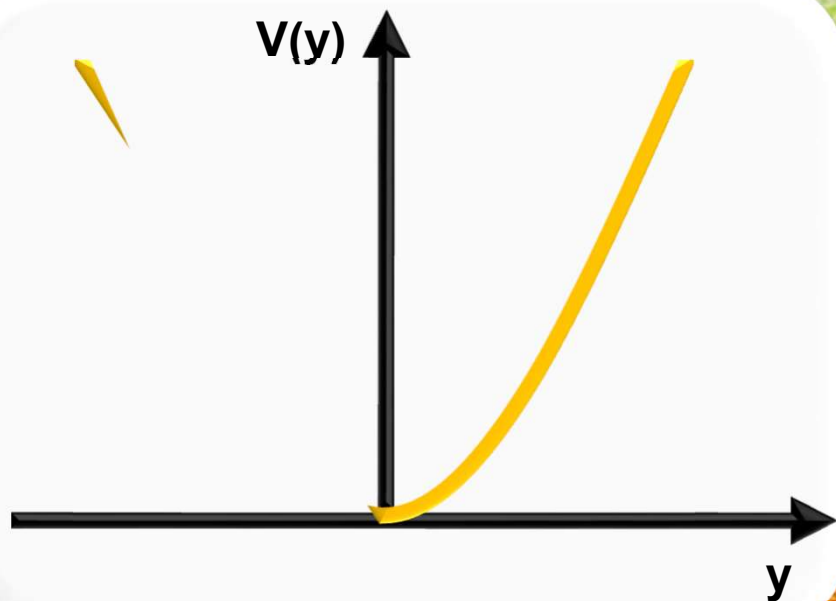
پتانسیل نوسانگر هماهنگ را بعداً به روش دیگری مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

Simple Harmonic Oscillator

- Simple harmonic oscillators describe many physical situations: springs, diatomic molecules and atomic lattices.



Consider the Taylor expansion of a potential function: $V(x) = V_0 + V_1(x - x_0) + \frac{1}{2}V_2(x - x_0)^2 + \dots$



$$\omega^2 = k / m$$

$$\varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

$$x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} y$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(y)}{dy^2} + \left(\frac{1}{2}ky^2 - E \right) u(y) = 0$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left(\varepsilon - x^2 \right) u(x) = 0$$

تمرین: با تعریف
متغیرهای جدید
داده شده نشان
دهید که معادله
شرودینگر مستقل از
زمان نوسانگر
هماهنگ به معادله
زیر تبدیل می
شود:

دقت کنید که ε و
 x متغیرهایی
بدون بعد هستند.

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon - x^2 \rightarrow -x^2 \Rightarrow \frac{d^2 u_0}{dx^2} - x^2 u_0 = 0$$

که در آن $u_0(x)$ ویژه تابع مجانبی $u(x)$ است وقتی که x به سمت بینهایت میل می کند.

تمرین: نشان دهید که اگر طرفین معادله مجانبی را در $2du_0/dx$ ضرب کنیم، آنگاه:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 - x^2 \frac{d}{dx} (u_0^2) = 0$$

که می توان آن را به صورت زیر هم نوشت:

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 - x^2 (u_0^2) \right] = -2xu_0^2$$

حال ادعا می کنیم که طرف راست این معادله برای x های بزرگ قابل صرف نظر کردن است. اثبات ادعا را به بعد موکول می کنیم.

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 - x^2 (u_0^2) \right] = 0$$

$$\left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 - x^2 (u_0^2) = C = \text{cte.}$$

$$\frac{du_0}{dx} = \pm \sqrt{C + x^2 u_0^2}$$

$$\ln u_0(x) = \pm 1 / 2x^2$$

ضریب C صفر است زیرا u_0 و du_0/dx باید در بینهایت صفر شوند.

علامت مثبت قابل قبول نیست زیرا تابع موج باید مجذورا انتگرال پذیر باشد.

$$\frac{du_0}{dx} = \pm x u_0$$

$$\ln u_0(x) = -\frac{1}{2} x^2$$

$$\frac{du_0}{u_0} = \pm x dx$$

$$u_0(x) = e^{-x^2/2}$$

اثبات ادعا:

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 - x^2 (u_0^2) \right] = -2xu_0^2$$

جمله اول
طرف چپ =

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 = \frac{d}{dx} (x^2 u_0^2) = \frac{d}{dx} (x^2 e^{-x^2})$$

$$= 2xe^{-x^2/2} - 2x^3 e^{-x^2} \approx -2x^3 e^{-x^2} \quad \text{for } x \gg 1$$

جمله دوم
طرف چپ =

$$\frac{d}{dx} (-x^2 u_0^2) = -\frac{d}{dx} (x^2 e^{-x^2}) = | \text{جمله اول طرف چپ} |$$

$$= -2xe^{-x^2/2} + 2x^3 e^{-x^2} \approx 2x^3 e^{-x^2} \quad \text{for } x \gg 1$$

جمله طرف
راست =

$$-2xu_0^2 = -2xe^{-x^2}$$

$x \exp(-x^2)$ نسبت به $x^3 \exp(-x^2)$ در x های بزرگ واقعا کوچک و قابل صرف نظر کردن است.

تمرین: نشان دهید که اگر متغیر
زیر را انجام دهیم:

و آن را در معادله اصلی
زیر قرار دهیم:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + (\varepsilon - x^2) u(x) = 0$$

$$u(x) = H(x) e^{-x^2/2}$$

آنگاه خواهیم
داشت که:

$$\frac{d^2 H(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH(x)}{dx} + (\varepsilon - 1) H(x) = 0$$

توضیح: روش کلی ما تا اینجا این بوده است که ابتدا حالت مجانبی جواب را به صورت $\exp(-x^2/2)$ حدس زدیم و سپس جواب حالت‌های کلی را به صورت $H(x) \exp(-x^2/2)$ معرفی کردیم و به معادله فوق رسیدیم که به آن معادله هرمیت گویند. تمرین: تابع هرمیت یک تابع خاص ریاضی فیزیک است. این تابع خاص را مورد مطالعه قرار دهید و خواص آن را بررسی کنید. **راهنمایی:** برای حل این تمرین می‌توانید به **جلد دوم کتاب ریاضی فیزیک آرفکن** مراجعه نمایید و فصل مربوط به توابع خاص هرمیت را خلاصه نمایید.

چند جمله ایهای هرمیت

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

چند جمله ای مرتبه n -ام هرمیت
جواب معادله رو به رو است:

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

تابع مولد چند جمله ایهای
هرمیت عبارت است از:

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} nH_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!}$$

تابع مولد آن را می توان به این
صورت به دست آورد:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x) \frac{t^n}{n!}$$

از طرفی ثابت خواهیم
کرد که رابطه بازگشتی
زیر بین توابع هرمیت
برقرار است:

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$$

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x) \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2xH_n - 2nH_{n-1}) \frac{t^n}{n!}$$

$$g(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{0^n}{n!}$$

$$= 2x \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{t^n}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} nH_{n-1} \frac{t^n}{n!}$$

$$= 2xg(x, t) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} nH_{n-1} \frac{t^n}{n!}$$

$$= H_0(x)$$

$$= 2xg(x, t) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1} \frac{t^n}{(n-1)!}$$

$$= 2xg(x, t) - 2t \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{t^n}{n!}$$

$$c(x) = H_0(x)$$

$$= 2xg(x, t) - 2tg(x, t)$$

$$= (2x - 2t)g(x, t)$$

از معادله اصلی هرمیت به ازای $n=0$ داریم:

$$H_0'' = 2xH_0' \Rightarrow H_0(x) = cte. = 1$$

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = (2x - 2t)g(x, t)$$

$$\frac{dg(x, t)}{g(x, t)} = (2x - 2t)dt$$

$$c(x) = H_0(x) = 1$$

$$g(x, t) = c(x)e^{2xt-t^2}$$

$$g(x, 0) = c(x)$$

$$g(x, t) = e^{2xt-t^2}$$

با n بار مشتق گیری از تابع مولد نسبت به t و سپس ارزیابی آن در $t=0$ می توان $H_n(x)$ را به دست آورد:

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

$$\frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial t^2} = e^{x^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{-(t-x)^2}$$

$$\frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} = H_n(x)$$

.....
.....
.....

$$g(x, t) = e^{2xt-t^2}$$

$$\frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} = e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(t-x)^2}$$

$$g(x, t) = e^{x^2} e^{-(t-x)^2}$$

$$= e^{x^2} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(t-x)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-(t-x)^2} = -\frac{\partial}{\partial x} e^{-(t-x)^2}$$

$$\left. \frac{\partial^n g(x, t)}{\partial t^n} \right|_{t=0} = e^{x^2} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$$

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = e^{x^2} \frac{\partial}{\partial t} e^{-(t-x)^2}$$

$$H_n(x) = e^{x^2} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$$

تمرین: با استفاده از فرمول به دست آمده برای توابع هرمیت که به فرمول رودریگرس شهرت دارد چند جمله ایهای زیر را به ازای n های مختلف محاسبه نمایید:

$$H_n(x) = e^{x^2} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$$

$$H_0(x) = 1$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} + \dots$$

روابط بازگشتی و به دست آوردن رابطه بازگشتی ای که قبلاً وعده داده بودیم:

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

از معادله هرمیت نسبت به x مشتق می گیریم:

$$(H_n')'' - 2H_n' - 2x(H_n')' + 2nH_n' = 0$$

n را در معادله هرمیت به $n-1$ تبدیل می کنیم:

$$(H_n')'' - 2x(H_n')' + 2(n-1)H_n' = 0$$

$$H_{n-1}'' - 2xH_{n-1}' + 2(n-1)H_{n-1} = 0$$

از مقایسه دو رابطه زرد رنگ اخیر نتیجه می گیریم که H_n' و H_{n-1} در معادله ای یکسان صدق می کنند، پس:

$$H_n' = CH_{n-1}$$

ضریب C را می توان از مقایسه جملات x^{n-1} به دست آورد.

$$H_n'' = 2nH_{n-1}'$$

اکنون اثبات آنچه که وعده داده بودیم با قرار دادن دو رابطه اخیر در معادله اصلی هر میت:

$$H_n' = n(2)(2x)^{n-1} + \dots$$

$$H_n' = n2^n x^{n-1} + \dots$$

$$H_{n-1} = (2x)^{n-1} + \dots$$

$$n2^n x^{n-1} = C2^{n-1} x^{n-1}$$

$$2n = C$$

$$n \rightarrow n+1$$

$$H_n' = 2nH_{n-1}$$

$$2nH_{n-1}' - 2x2nH_{n-1} + 2nH_n = 0$$

$$H_{n-1}' - 2xH_{n-1} + H_n = 0$$

$$2(n-1)H_{n-2} - 2xH_{n-1} + H_n = 0$$

$$2nH_{n-1} - 2xH_n + H_{n+1} = 0$$

$$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$$

$$\frac{d^2 H(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH(x)}{dx} + (\varepsilon - 1)H(x) = 0$$

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x) u_n(x) dx = 1$$

$$|A_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 1$$

$$u_n(x) = A_n H_n(x) e^{-x^2/2}$$

$$\varepsilon - 1 = 2n$$

$$e^{-x^2} g^2(x, t) = \sum_{m,n} e^{-x^2} H_m H_n \frac{t^{m+n}}{m!n!}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} g^2(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x^2 - 4xt + 2t^2)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-2t)^2} e^{2t^2} = e^{2t^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-2t)^2} = \sqrt{\pi} e^{2t^2}$$

$$= \int dx \sum_{m,n} e^{-x^2} H_m H_n \frac{t^{m+n}}{m!n!}$$

$$= \sum_{m,n} \frac{t^{m+n}}{m!n!} \int dx e^{-x^2} H_m H_n$$

$$\sqrt{\pi} e^{2t^2} = \sum_{m,n} \frac{t^{m+n}}{m!n!} \int dx e^{-x^2} H_m H_n$$

$$\sqrt{\pi} \sum_n \frac{2^n t^{2n}}{n!} = \sum_{m,n} \frac{t^{m+n}}{m!n!} \int dx e^{-x^2} H_m H_n$$

اگر
 $m = n$

$$\sqrt{\pi} \sum_n \frac{2^n t^{2n}}{n!} = \sum_n \frac{t^{2n}}{n! n!} \int dx e^{-x^2} H_n^2(x)$$

$$\int dx e^{-x^2} H_n^2(x) = n! \sqrt{\pi} 2^n$$

$$|A_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 1$$

$$|A_n|^2 n! \sqrt{\pi} 2^n = 1$$

$$|A_n| = \frac{1}{\sqrt{n! \sqrt{\pi} 2^n}}$$

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n! \sqrt{\pi} 2^n}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

$$\varepsilon - 1 = 2n$$

$$\varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

$$\frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1$$

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}(2n + 1)$$

$$E = \hbar\omega(n + 1/2)$$

تمرین: با استفاده از روابط بازگشتی روابط زیر را اثبات کنید:

$$\sqrt{n+1}u_{n+1} - \sqrt{2}xu_n + \sqrt{n}u_{n-1} = 0$$

$$xu_n + u'_n = \sqrt{2n}u_{n-1}$$

$$xu_n + u'_n = \sqrt{2(n+1)}u_{n+1}$$

رابطه نخست (سبز رنگ) در تعیین قواعد گزینش و شدت تابش نوسانگر اهمیت اساسی دارد که بعداً با آن روبه رو خواهیم شد.

توابع هرمیت به عنوان پاسخ نوسانگر کوانتومی پایه های کاملی را تشکیل می دهند و می توان از آنها برای بسط توابع دیگر به عنوان پایه استفاده کرد:

$$f(x) = A_0 H_0(x) + A_1 H_1(x) + A_2 H_2(x) + \dots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k H_k(x)$$

$$A_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx$$

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

یک
مفید:
رابطه

The Parabolic Potential Well

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!} \sqrt{\pi} 2^n} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

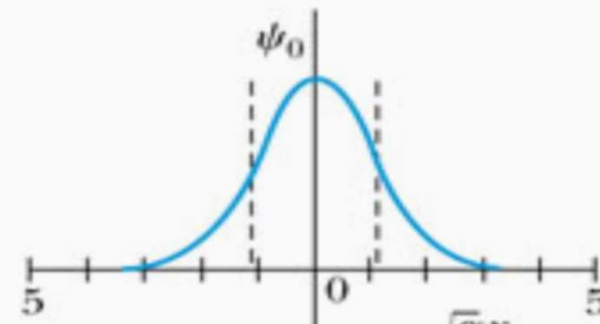
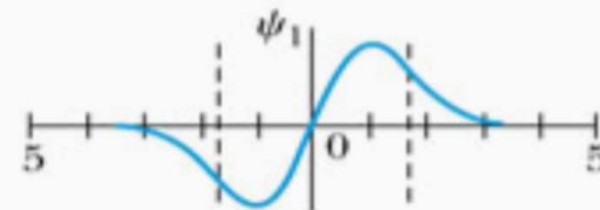
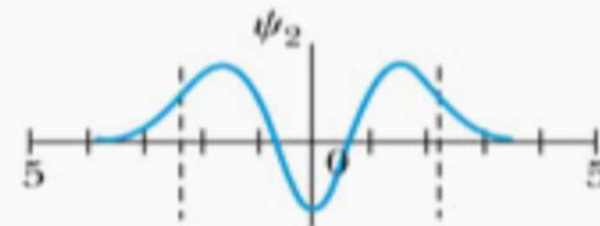
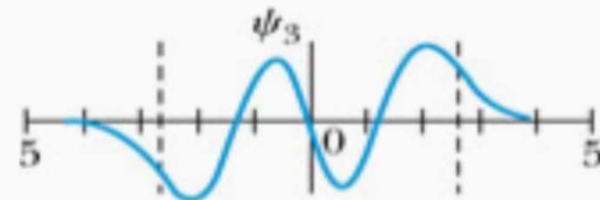
Wave functions

$$\psi_3(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{\alpha} x) (2\alpha x^2 - 3) e^{-\alpha x^2/2}$$

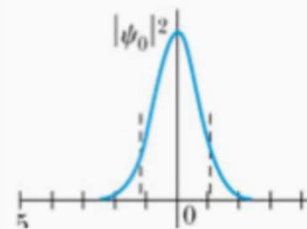
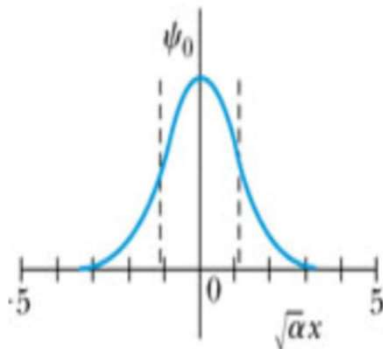
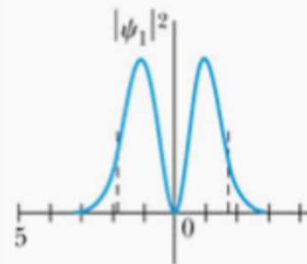
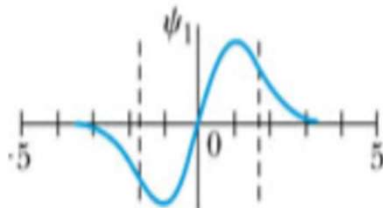
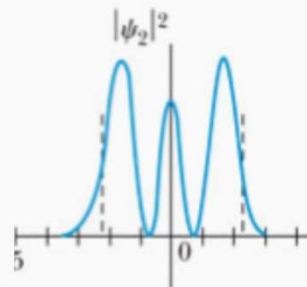
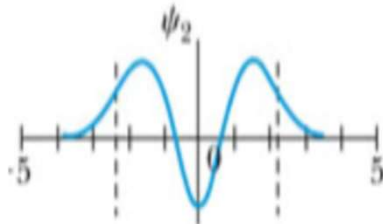
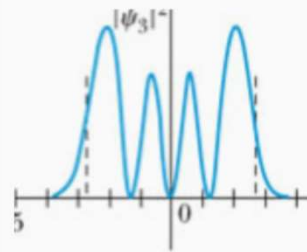
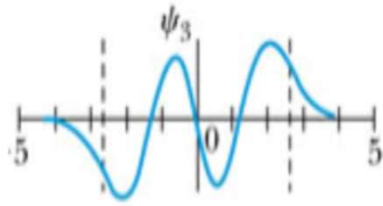
$$\psi_2(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2\alpha x^2 - 1) e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{2\alpha} x e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2}$$



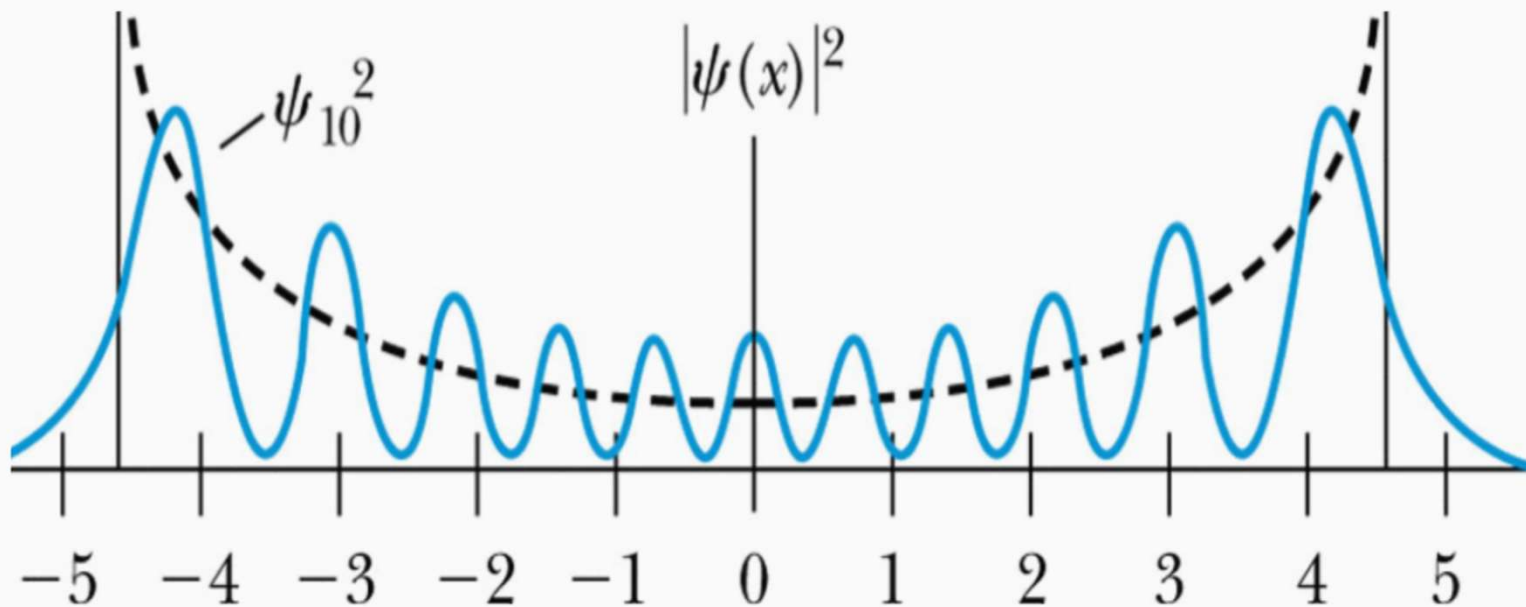
The Parabolic Potential Well



- Classically, the probability of finding the mass is greatest at the ends of motion and smallest at the center.
- Contrary to the classical one, the largest probability for this lowest energy state is for the particle to be at the center.

Analysis of the Parabolic Potential Well

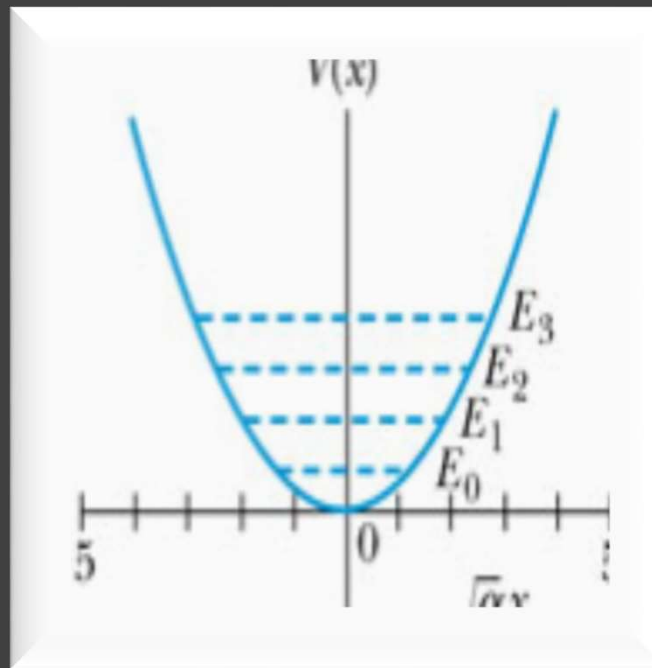
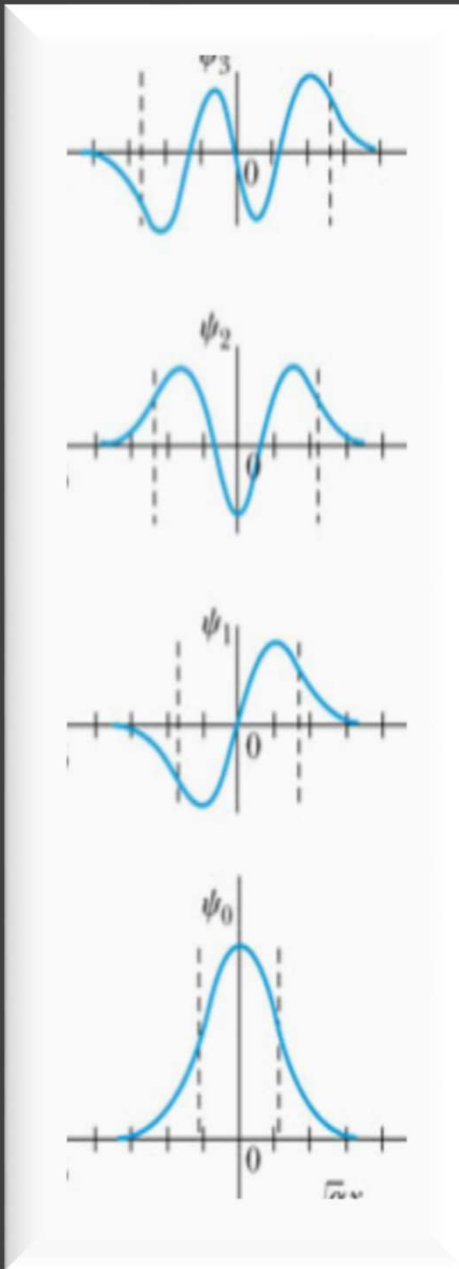
As the quantum number increases, however, the solution approaches the classical result.



The Parabolic Potential Well

- The energy levels are given by:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{\kappa / m} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$



The zero point energy is called the Heisenberg limit:

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

تست 1 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1379):

ذره ای به جرم m در پتانسیل $V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{elsewhere} \end{cases}$ در امتداد محور x حرکت می کند.

در لحظه $t=0$ تابع حالت ذره به صورت مقابل است: $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\frac{3}{5} \sin \frac{2\pi x}{a} + \frac{4}{5} \sin \frac{\pi x}{a} \right)$

احتمال یافتن ذره در حالت پایه و اولین حالت برانگیخته به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

1) $\frac{18}{25a}, \frac{32}{25a}$ 2) $\frac{9}{25}, \frac{16}{25}$ 3) $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ 4) $\frac{3}{5} \sqrt{\frac{2}{a}}, \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2}{a}}$

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\Psi(x) = \frac{4}{5} \Psi_1(x) + \frac{3}{5} \Psi_2(x)$$

$$\Psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

$$P(E_1) = \left| \frac{4}{5} \right|^2$$

$$P(E_2) = \left| \frac{3}{5} \right|^2$$

تست 2 (کنکور کارشناسی ارشد سال 13؟؟):

ذره ای با انرژی E ، در چاه پتانسیل نیمه بینهایت $V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$ مقید است.

با توجه به این که $k_1^2 = \frac{2m(V_0 - |E|)}{\hbar^2}$ و $k_2^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ شرطی که مقدار انرژی ذره را تعیین می کند چیست؟

4) $k_1 = -k_2 \cot(k_2 a)$ 3) $k_2 = k_1 \tan(k_1 a)$ 2) $k_2 = -k_1 \cot(k_1 a)$ 1) $k_1 = k_2 \cos(k_2 a)$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A \sin k_1 x + B \cos k_1 x & 0 < x < a \\ T e^{-k_2 x} & x \geq a \end{cases}$$

پیوستگی تابع موج:

$$x = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$x = a \longrightarrow A \sin k_1 a = T e^{-k_2 a}$$

پیوستگی مشتق تابع موج:

$$x = a \longrightarrow A k_1 \cos k_1 a = -T k_2 e^{-k_2 a}$$

$$k_1 \cot k_1 a = -k_2$$

تست 3 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1399): فرض کنید که احتمال عبور یک ذره از یک سد پتانسیل به صورت e^{-2ka} باشد که در آن a عرض سد و $k_1 = \frac{[2m(E_1 - V)]^{1/2}}{\hbar}$ باشد.

احتمال عبور برای این که ذره ای از N سد مجاور عبور کند عبارت است از:

$$1) \exp(-2 \sum_{i=1}^N k_i a_i) \quad 2) \sum_{i=1}^N \exp(-2k_i a_i) / N \quad 3) \sum_{i=1}^N \exp(-2k_i a_i) \quad 4) N \exp(-\sum_{i=1}^N k_i a_i)$$

چون احتمال عبور از هر سد مستقل از سدهای دیگر است

$$|T|^2 = e^{-2k_1 a_1} e^{-2k_2 a_2} \dots$$

$$|T|^2 = e^{-2(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots)}$$

$$|T|^2 = e^{-2 \sum_{i=1}^N k_i a_i}$$

$$|T|^2 = \exp(-2 \sum_{i=1}^N k_i a_i)$$

$$V = -V_0\delta(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi - V_0\delta(x)\Psi = -E \Psi$$

حالت مقید یعنی حالتی با انرژی منفی، که آن را با $-E$ نمایش داده ایم که در آن $E > 0$. در نتیجه از توابع موج نمایی (حقیقی) استفاده می کنیم.

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{-kx} & x > 0 \\ Ae^{kx} & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) dx - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) \Psi(x) dx = -E \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Psi(x) dx$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left. \frac{d\Psi(x)}{dx} \right|_{\varepsilon} - \left. \frac{d\Psi(x)}{dx} \right|_{-\varepsilon} \right] - V_0 \Psi(0) = 0$$

تابع موج پیوسته و مشتق آن ناپیوسته است.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-kAe^{\varepsilon} - kAe^{-\varepsilon}] = \frac{2mV_0}{\hbar^2} A$$

$$-2kA = \frac{2mV_0}{\hbar^2} A \quad k = -\frac{mV_0}{\hbar^2}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{mV_0}{\hbar^2} \right)^2 = \frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$$

تست 4 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1376):

پرتویی از ذرات با تابع موج $\Psi = e^{ikx}$ با مانع پتانسیل یک بعدی $V(x) = V_0\delta(x)$ برخورد می کند. احتمال انعکاس این پرتو کدام است؟

4) $\frac{mV_0}{mV_0 + \hbar^2 k}$

3) $\frac{\hbar^2 k^2}{m^2 V_0^2}$

2) $\frac{m^2 V_0^2}{m^2 V_0^2 + \hbar^2 k^2}$

1) 1

گزینه 4 اشکال ابعادی دارد.

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Te^{ikx} & x > 0 \end{cases}$$

$$\left| \frac{B}{A} \right|^2 = |R|^2 = ? = \frac{m^2 V_0^2}{m^2 V_0^2 + \hbar^2 k^2}$$

پیوستگی تابع موج:

$$A + B = T$$

نا پیوستگی تابع موج:

$$ik(T - A + B) = \frac{2mV_0}{\hbar^2} T$$

تست 5 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1382): کدامیک از عبارتهای زیر برای تبهگنی (واگنی) ویژه مقادیر انرژی در یک بعد درست است؟

1) برای حالات مقید و غیر مقید تبهگنی وجود ندارد.

2) برای حالات مقید و غیر مقید امکان تبهگنی وجود دارد.

3) برای حالات مقید تبهگنی وجود ندارد.

4) برای حالات غیر مقید تبهگنی وجود ندارد.

در تمامی حالات مقید یک بعدی به دلیل عدم وجود تقارن در سیستم تبهگنی وجود ندارد ولی حالات غیر مقید یک بعدی (ذره آزاد) دارای تبهگنی دو گانه است.

تست 6 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1375):

در چاه پتانسیل $V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{elsewhere} \end{cases}$ کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟

- 1) $\langle x \rangle = 0$ 2) $\langle x^2 \rangle = 0$ 3) $\langle p \rangle = 0$ 4) $\langle p^2 \rangle = 0$

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

تابع موج حقیقی است، پس:

$$\langle p \rangle = 0$$

تست 7 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1378): اگر $U_n^{(+)}(x)$ ویژه توابع با پاریته زوج و $U_n^{(-)}(x)$ ویژه توابع با پاریته فرد هامیلتونی ذره ای در چاه پتانسیل متقارن یک بعدی باشند، کدامیک از کمیات زیر صفر نیست؟

$$2) \langle u_n^{(-)} | x^2 p | u_n^{(-)} \rangle$$

$$1) \langle u_n^{(+)} | x^3 p | u_n^{(+)} \rangle$$

$$4) \langle u_n^{(+)} | xp | u_n^{(-)} \rangle$$

$$3) \langle u_n^{(+)} | xp^2 | u_n^{(+)} \rangle$$

$$\int f(\text{odd}) dx = 0$$

$$\langle u_n^{(+)} | x^3 p | u_n^{(+)} \rangle \longrightarrow \text{even} \longrightarrow \neq 0$$

$$\langle u_n^{(-)} | x^2 p | u_n^{(-)} \rangle \longrightarrow \text{odd} \longrightarrow 0$$

$$\langle u_n^{(+)} | xp^2 | u_n^{(+)} \rangle \longrightarrow \text{odd} \longrightarrow 0$$

$$\langle u_n^{(+)} | xp | u_n^{(-)} \rangle \longrightarrow \text{odd} \longrightarrow 0$$

تست 8 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1380): ذره ای به جم m در چاه پتانسیل یک بعدی نامتناهی که دیواره های آن در $x=0$ و $x=a$ است قرار دارد. تابع حالت این ذره

تابع بهنجار $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi x}{a} \right]$ است. ارزش انتظاری انرژی این ذره در این

حالت چقدر است؟

4) $\frac{17\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

3) $\frac{17\hbar^2\pi^2}{4ma^2}$

2) $\frac{5\hbar^2\pi^2}{16ma^2}$

1) $\frac{5\hbar^2\pi^2}{4ma^2}$

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi x}{a} \right]$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_2$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} + \sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{2} E_2$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} + \frac{1}{2} \frac{4\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \\ &= \frac{5\hbar^2 \pi^2}{4ma^2} \end{aligned}$$

تست 9 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1381): تابع موج ذره ای در یک جعبه یک بعدی

به طول $2a$ به شکل $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{2\pi x}{a} \right]$ است. ارزش انتظاری عملگر

پارینه در این حالت کدام است؟

4) 1

3) $\frac{1}{a}$

2) 0

1) -1

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{2\pi x}{a} \right] \quad \langle \Pi \rangle = \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_2 \right) \Pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_2 \right) dx$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{2\pi x}{a} \quad \langle \Pi \rangle = \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_2 \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_2 \right) dx$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_2 \quad \langle \Pi \rangle = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

تست 10 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1381): ذره ای در چاه بینهایت یک بعدی که دیواره های آن در $x=0$ و $x=2L$ قرار دارد حرکت می کند. کدامیک از توابع زیر نمی تواند تابع حالت موج ذره باشد؟

$$2) \Psi(x) = \begin{cases} x(x-2L) & 0 < x < 2L \\ 0 & \text{elsewher} \end{cases}$$

$$1) \Psi(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{L} & 0 < x < 2L \\ 0 & \text{elsewher} \end{cases}$$

$$4) \Psi(x) = \begin{cases} 1 - \cos \frac{\pi x}{L} & 0 < x < 2L \\ 0 & \text{elsewher} \end{cases}$$

$$3) \Psi(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi x}{L} & 0 < x < 2L \\ 0 & \text{elsewher} \end{cases}$$

$$\Psi(x=0) = \Psi(x=2L) = 0$$

تابع موج باید در مرزها صفر شود، یعنی:

تست 11 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1377):

تابع موج دستگاهی به صورت $\Psi(x) = \frac{1}{4}u_0 + \frac{i}{2}u_1 + \frac{i\sqrt{11}}{4}u_2$ نوشته می شود، u_n ها ویژه حالت های ($n=1, 2, 3$) نوسانگر هماهنگ ساده اند. مقدار چشم داشتی انرژی این دستگاه کدام است؟

4) $\frac{17}{8}\hbar\omega$

3) $\frac{13}{2}\hbar\omega$

2) $\frac{3}{2}\hbar\omega$

1) $\frac{3}{4}\hbar\omega$

$$\langle H \rangle = \int \Psi^* H \Psi dx = \int \left(\frac{1}{4}u_0 - \frac{i}{2}u_1 - \frac{i\sqrt{11}}{4}u_2 \right) H \left(\frac{1}{4}u_0 + \frac{i}{2}u_1 + \frac{i\sqrt{11}}{4}u_2 \right) dx$$

$$\langle H \rangle = \int \left(\frac{1}{4}u_0 - \frac{i}{2}u_1 - \frac{i\sqrt{11}}{4}u_2 \right) \left(\frac{1}{4}\frac{\hbar\omega}{2}u_0 + \frac{i}{2}\frac{3\hbar\omega}{2}u_1 + \frac{i\sqrt{11}}{4}\frac{5\hbar\omega}{2}u_2 \right) dx$$

$$\langle H \rangle = \frac{1}{16}\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{1}{4}\frac{3\hbar\omega}{2} + \frac{11}{16}\frac{5\hbar\omega}{2} = \frac{17}{8}\hbar\omega$$

تست 12 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1399): تابع حالت نوسانگر هماهنگ ساده ای در لحظه $t=0$ به صورت $\Psi(x,0) = A \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \Phi_n(x) \right]$ تابع موج بهنجار تراز n ام نوسانگر هماهنگ یک بعدی است. در اندازه گیری انرژی احتمال یافتن ذره در تراز پایه کدام است؟ (**A** مقدار ثابتی است)



1) 1

2) $\frac{1}{2}$

1) 0

$$\Psi(x,0) = A \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \Phi_n(x) \right] = A \left[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_1 + \frac{1}{2} \Phi_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \Phi_3 + \dots \right]$$

$|A|^2 =$ در اندازه گیری انرژی احتمال یافتن ذره در تراز پایه

پس کافی است که **A** را پیدا کنیم:

$$\int \Psi \Psi^* dx = 1 = A^2 \int \left[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_1 + \frac{1}{2} \Phi_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \Phi_3 + \dots \right] \left[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_1 + \frac{1}{2} \Phi_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \Phi_3 + \dots \right] dx$$

$$\int \Psi \Psi^* dx = 1 = A^2 \left\{ \int |\Phi_0|^2 dx + \frac{1}{2} \int |\Phi_1|^2 dx + \frac{1}{4} \int |\Phi_2|^2 dx + \frac{1}{8} \int |\Phi_3|^2 dx + \dots \right\}$$

$$1 = A^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right\}$$

$$1 = A^2 \times 2$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تست 13 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1374): ذره ای با انرژی مثبت $E < V_0$ با پله پتانسیل روبرو می شود. می توانیم بگوییم:

1) شار عبوری صفر است.

2) تابع موج ذره در سمت راست سینوسی است.

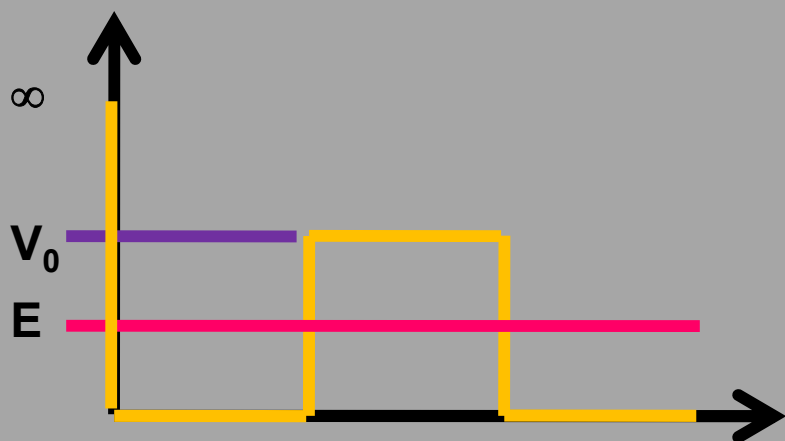
3) احتمال وجود ذره در $x > 0$ صفر است.

4) انرژی ذره در سمت راست بیشتر از تعداد آن در سمت چپ است.

تست 14 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1381): ذره ای با انرژی $E < V_0$ در پتانسیل
 شکل زیر قرار دارد. کدامیک از توابع موج می تواند ذره را به درستی در فاصله بین
 $0 < x < a$ توصیف کند؟ c_1 و c_2 اعداد ثابتی غیر صفری هستند.

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

- 4) $c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$ 3) $c_1 (\sin kx + \cos kx)$ 2) $c_1 \sin kx$ 1) $c_1 \cos kx$



$$x < 0 \longrightarrow \Psi(x) = 0$$

$$\Psi(x = 0) = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$0 < x < a \longrightarrow \Psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \longrightarrow \Psi(x) = A \sin kx$$

تست 15 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1375): احتمال انعکاس یک ذره با انرژی **100MeV** از یک سد پتانسیل به ارتفاع **19MeV** برابر است با:

- 1) $\frac{1}{(91)^2}$ 2) $\frac{1}{(19)^2}$ 3) $\frac{1}{9^2}$ 4) $\frac{1}{9}$

احتمال انعکاس پله وسد در این حالت با هم برابرند:

$$|R|^2 = \left(\frac{k - q}{k + q} \right)^2 = \left| \frac{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} - \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} + \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}} \right|^2$$

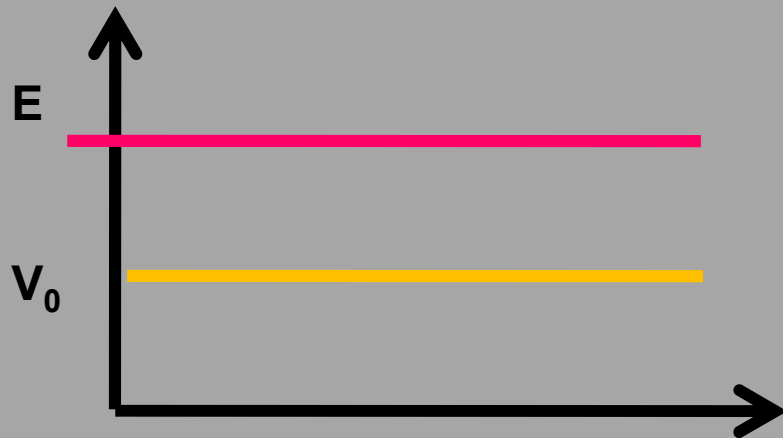
$$|R|^2 = \left| \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}} \right|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 - V_0 / E}}{1 + \sqrt{1 - V_0 / E}} \right|^2 = \frac{1}{19}$$

تست 16 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1381): ذره ای به جرم m در یک بعد به یک پتانسیل به ارتفاع V_0 برخورد می کند. اگر انرژی ذره $2V_0$ باشد، احتمال انعکاس ذره از این سد تقریباً چقدر است؟

4) 16.6

3) 11

2) 3.4



$$|R|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 - V_0 / E}}{1 + \sqrt{1 - V_0 / E}} \right|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{2} / 2}{1 + \sqrt{2} / 2} \right|^2 \approx 0.029 = 2.9\%$$

پس جواب 2 درست است چون نزدیکتر است.

تست 17 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1376): ذره ای در پتانسیل یک بعدی دلتای دیراک $V(x) = -V_0\delta(x)$ قرار دارد، که در آن V_0 عدد مثبتی است. تعداد حالات مقید این ذره کدام است؟

1) ∞

3) 2

2) 1

1) 0

ذره تحت پتانسیل یک بعدی دلتای دیراک $V(x) = -V_0\delta(x)$ تنها یک حالت مقید دارد زیرا رابطه انرژی تابعیتی از n ندارد. انرژی این حالت مقید برابر است با:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{mV_0}{\hbar^2} \right)^2 = \frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$$

تست 18 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1379): ذره ای را در پتانسیل $V(x) = -V_0 \delta(x)$ در نظر بگیرید، که در آن V_0 عدد مثبتی است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(1) تابع حالت این ذره در $x=0$ پیوسته نیست.

(2) مشتق تابع حالت ذره تابع پیوسته ای از مکان x است.

(3) همواره عدم قطعیت در مکان ذره صفر است.

(4) اندازه حرکت خطی ذره تابع ناپیوسته ای از مکان x است.

با توجه به ناپیوسته بودن مشتق تابع موج، اندازه حرکت خطی $\hbar / i \partial / \partial x$ نیز ناپیوسته است.

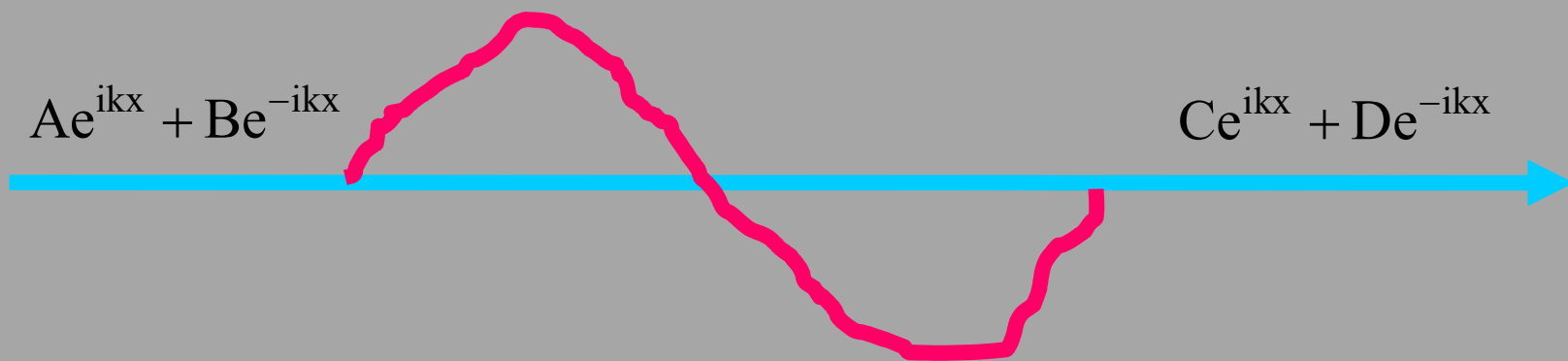
تست 19 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1380): ذره ای به جرم m در یک بعد تحت پتانسیل $V(x) = -V_0\delta(x)$ قرار دارد، $-V_0$ مقدار ثابتی است. رفتار تابع موج ذره با انرژی منفی در ناحیه $x > 0$ کدام است؟

1) $e^{-mV_0/2\hbar^2 x}$ 2) $e^{-mV_0/2\hbar^2 x^2}$ 3) $e^{-mV_0/4\hbar^2 x}$ 4) $e^{-mV_0/\hbar^2 x}$

$$V(x) = -V_0\delta(x) \longrightarrow \Psi(x) = \begin{cases} Ae^{-kx} & x > 0 \\ Ae^{-kx} & x < 0 \end{cases}$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \& \quad E = \frac{mV_0^2}{2\hbar^2} \Rightarrow k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{mV_0^2}{2\hbar^2} = \frac{m^2 V_0^2}{\hbar^2} \Rightarrow k = \frac{mV_0}{\hbar}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{-mV_0/\hbar^2 x} & x > 0 \\ Ae^{mV_0/\hbar^2 x} & x < 0 \end{cases}$$



$$C = S_{11}A + S_{12}D$$

$$B = S_{21}A + S_{22}D$$

یک پتانسیل دلخواه جایگزیده در
یک ناحیه متناهی از محور x -ها

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1$$

$$|S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 = 1$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* = 0$$



$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

S ماتریس پراکندگی
یک ماتریس یکانی
(یونیتاری) است.

$$S_{11}(-k) = S_{11}^*(k)$$

$$S_{22}(-k) = S_{21}^*(k)$$

$$S_{12}(-k) = S_{21}^*(k)$$

تست 20 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1379): شاری از ذرات به یک سد پتانسیل یک

بعدی می تابد. اگر ماتریس پراکندگی به صورت $S = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & y \end{pmatrix}$ باشد، که در آن x

و y حقیقی و $i^2 = -1$ مقادیر x و y به ترتیب از راست به چپ عبارتند از:

$$1) -1, \sqrt{2} \quad 2) -1, 1/\sqrt{2} \quad 3) 1, \sqrt{2} \quad 4) 1, 1/\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & y \end{pmatrix}$$

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1$$



$$S = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$|S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 = 1$$



$$S = \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = 1 \xrightarrow{x=\sqrt{2}} y = \pm 1$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* = 0$$



$$\frac{1}{x} [1 \times (-i) + i \times y] = 0 \longrightarrow y = 1$$