

Chapter Six

The General Structure of Wave Mechanics

$$H u_E(x) = E u_E(x)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

در فصل قبل معادله ویژه مقدار روبه رو را

که در آن

برای تعدادی از پتانسیلها یا هامیلتونیهای مورد علاقه حل کردیم. لفظ هامیلتونی را به جای پتانسیل مورد تاکید قرار دادیم زیرا در نهایت این هامیلتونی است که تحول زمانی دستگاه را به دست می دهد.

حالت اولیه دستگاه با یک ویژه تابع یا تابع موج معین می شود که فقط کافی است شرط زیر

$$\int dx \Psi^*(x) \Psi(x) < \infty$$

را برآورده کند، یعنی مجذورا انتگرال پذیر باشد.

چون تابع موج مجذورا انتگرال پذیر است، پس می توان بدون از دست دادن کلیت مساله تابع موج را نرمالیزه کرد (چون انتگرال تابع احتمال آن مطابق شرط بهنجارش متناهی است):

$$\int dx \Psi^*(x) \Psi(x) = 1$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x) = H \Psi(x)$$

حال تحول زمانی دستگاه از معادله وابسته به زمان روبه رو به دست می آید.

$$H u_E(x) = E u_E(x)$$

پس روند کلی به این صورت است که ابتدا معادله مستقل از زمان

$$u_E(x)$$

را حل می کنیم و از روی آن ویژه حالت را به دست می آوریم

$$\Psi(x) = \sum_E C_E u_E(x)$$

و سپس از قضیه کلی بسط استفاده می کنیم تا یک حالت دلخواه را به دست آوریم:

که در آن ضرایب بسط به صورت زیر قابل تعیین هستند:

$$\begin{aligned}\int dx u_{E'}^*(x) \Psi(x) &= \sum_E C_E \int dx u_{E'}^*(x) u_E(x) \\ &= \sum_E C_E \delta_{EE'} \\ &= C_{E'}\end{aligned}$$

$$\Psi(x, t) = \sum_E C_E e^{-iEt/\hbar} u_E(x)$$

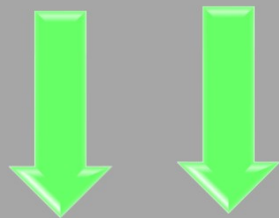
$$H u_E(x) = E u_E(x) \quad \longrightarrow \quad u_E(x) \text{ \& } E$$

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \sum_E C_E u_E(x) \\ C_E &= \int dx u_E^*(x) \Psi(x)\end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \Psi(x, t) = \sum_E C_E e^{-iEt/\hbar} u_E(x)$$

البته همان طور که دیدیم طیف ویژه مقادیر می تواند گسسته یا پیوسته باشد، پس

$$\Psi(x) = \sum_E C_E u_E(x) + \int dE C(E) u_E(x)$$

که در آن شرط تعامد به صورت:

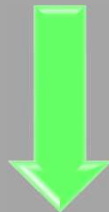


که در آن شرط تعامد به صورت:

$$\int dx u_{E_n}^*(x) u_{E_m}(x) = \delta_{mn} \quad \int dx u_E^*(x) u_{E'}(x) = \delta(E - E')$$

که البته E تنها انتخاب نیست و همان طور که قبلا گفتیم می توان بر حسب اندازه حرکت نیز کار کرد:

$$\Psi(x) = \int dp \Phi(p) u_p(x)$$



$$\int dx u_p^*(x) u_{p'}(x) = \delta(p - p')$$

ما همچنین $|C(E)|^2$ را تعبیر کردیم:

$|C(E)|^2$ احتمال آن که اندازه گیری انرژی حالت توصیف شده توسط $\Psi(x)$ ویژه مقدار خاص E را به دست بدهد.

هر اندازه گیری فقط یکی از ویژه مقادیر E را به دست می دهد و برخلاف مکانیک کلاسیک ما نمی توانیم از قبل پیش بینی کنیم که کدام ویژه مقدار انرژی به دست خواهد آمد.

اما در مکانیک کوانتومی همچون مکانیک کلاسیک اندازه گیری باید قابل تکرار باشد تا معنی پیدا کند به این صورت که اگر صد بار دیگر هم پس از اولین اندازه گیری، اندازه گیری انجام شود باید همان نتیجه اولی به دست آید. بنابراین اگر اندازه گیری اولی E_1 را به دست داد اندازه گیریهای بعدی نیز باید همین E_1 را فقط به دست بدهد.

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_E C_E u_E(\mathbf{x})$$

لذا پس از اولین اندازه گیری تابع موج

$$\Psi(\mathbf{x}) = C_{E_1} u_{E_1}(\mathbf{x})$$

به فقط یکی از توابع پایه خالص منجر می شود:

بنابراین یک اندازه گیری در مکانیک کوانتومی یک حالت $\Psi(\mathbf{x})$ را بر روی یک ویژه حالت $u_E(\mathbf{x})$ قابل مشاهده تصویر می کند.

بیاید نکته فوق را با استفاده از اطلاعات جبر خطی خود فرمول بندی کنیم:

می دانیم که یک بردار مانند $\mathbf{A}$ را می توان بر حسب بردارهای پایه آن بسط داد.

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad \& \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} \quad \& \quad A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \quad \& \quad A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k}$$

یعنی تصویر بردار $\mathbf{A}$ در راستای $\mathbf{x}$ از حاصل ضرب درونی آن بردار در بردار یکه معرف راستای $\mathbf{x}$ به دست می آید و الی آخر.

در مقایسه مکانیک کوانتمی با جبر خطی می توانیم بگوییم که:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_E C_E u_E(\mathbf{x})$$



بردار اصلی

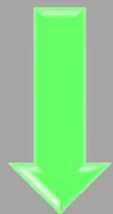


بردارهای پایه یا بردارهای یکه



ضرایب بسط یا مولفه های بردار اصلی یا تصویر بردار $\Psi(\mathbf{x})$ در امتداد بردار پایه $u_E(\mathbf{x})$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_E C_E u_E(\mathbf{x})$$



$\vec{A}$



A_x, A_y, A_z



$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

$$C_E = \int dx u_E^*(x) \Psi(x) \quad \text{C(E) تصویر } \Psi(x) \text{ در امتداد بردار پایه } u_E(x) \text{ است.}$$

حاصل ضرب درونی یا
اسکالری $\Psi(x)$ و $u_E(x)$

دیراک حاصل ضرب درونی فوق را به جای علامت “.” با نماد زیر نمایش داد:

$$\int dx \Phi^*(x) \Psi(x) = \langle \Phi | \Psi \rangle$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \langle A | B \rangle$$

در حاصل ضرب درونی بردارها به صورت:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int dx \Phi^*(x) \Psi(x)$$

و در حاصل ضرب اسکالری توابع انتگرال
پذیر مجذوری به صورت

ما در هر دو حالت یک فضای برداری خطی داریم که بنابراین از قواعد این فضاها
پیروی می کنند

تفاوت مکانیک کوانتومی با جبر خطی در این است که در مکانیک کوانتومی ما با یک فضای برداری خطی نامتناهی البعد روبه رو هستیم در حالی که در جبر خطی معمولی فضاهای ما متناهی البعد هستند.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^N a_i b_i$$

مثلا ما در جبر خطی حاصل ضرب درونی را به صورت

تعریف می کنیم که در آن اندیس شمارنده تا **N** نشان از متناهی بودن فضا دارد. حال آن که در مکانیک کوانتومی حاصل ضرب درونی را به صورت:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi^*(x) \Psi(x)$$

تعریف می کنیم که در آن متغیر پیوسته **x** نشان از نامتناهی بودن فضا دارد.

پس در مکانیک کوانتومی با فضای برداری پیچیده تری روبه رو هستیم زیرا همواره این سوال مطرح است که آیا انتگرالها مجذورا انتگرال پذیر هستند یا نه. این امر همواره باید چک شود، زیرا شرط کامل بودن از روی آن به دست می آید. پس در این صورت شرط کامل بودن فضا نسبت به فضاهای جبر خطی معمولی سخت تر چک می شود.

فضای کامل فضایی است که در آن همه توابع موج انتگرال پذیر مجذوری باشند و بتوان هر تابع دیگری را بر حسب آنها بسط داد.

پس مکانیک کوانتومی هم تلاش می کند که یک فضای برداری به دست بدهد، که می توان در صورت کامل بودن فضا از آن برای بسط توابع دیگر استفاده کرد.

اما سوال مهم این است که آیا فضا کامل است؟

مثلا اگر بخواهیم یک بردار سه بعدی را در یک فضای دو بعدی نشان دهیم می گوئیم که فضای دو بعدی برای نمایش یک بردار سه بعدی ناکامل است.

ویژگی نظریه مکانیک کوانتومی این است که:

توابع مجذورا انتگرال پذیر یک فضای بینهایت بعدی به نام فضای هیلبرت تشکیل می دهند و ویژه توابع انرژی یک مجموعه پایه برداری کامل به دست می دهند.

در فضاهای برداری، چه متناهی و چه نامتناهی، یک عملگر طوری تعریف می شود که یک بردار را به یک بردار دیگر در آن فضا تبدیل کند، یا در حالات مورد علاقه ما یک تابع مجذورا انتگرال پذیر را به یک تابع مجذورا انتگرال پذیر دیگر تبدیل کند.

ما به ویژه عملگرهای خطی علاقه مند هستیم که دارای ویژگی زیر باشند (زیرا معادله ویژه مقدار مستقل از زمان شرودینگر خود یک معادله خطی است):

$$H(\alpha\Psi_1(x) + \beta\Psi_2(x)) = \alpha H\Psi_1(x) + \beta H\Psi_2(x)$$

در فصل 4 نشان دادیم که مقدار چشمداشتی H حقیقی است:

$$\langle H \rangle_{\Psi} = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) H \Psi(x)$$

$$| \Psi(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} A_n | u_n \rangle$$

$$H | \Psi(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} A_n E_n | u_n \rangle$$

$$\langle \Psi(x) | = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* E_n \langle u_n |$$

$$\langle \Psi(x) | H | \Psi(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} A_n E_n A_n^* \langle u_n | u_n \rangle$$

$$\langle \Psi(x) | H | \Psi(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 E_n$$

این باید برای هر کمیت قابل اندازه گیری فیزیکی درست باشد، یعنی می توان آن را به این صورت تعمیم داد که:

مقدار چمداشتی برای همه λ های یک عملگر به عنوان نمایش دهنده یک کمیت قابل اندازه گیری فیزیکی (یا مشاهده پذیر) باید حقیقی باشد

ما چنین عملگرهایی (عملگرهایی که مقدار چمداشتی آنها حقیقی باشد) را عملگرهای هرمیتی نام نهادیم.

قضیه: ویژه مقادیر یک عملگر هرمیتی حقیقی است و ویژه توابع یک عملگر هرمیتی متناظر با ویژه مقادیر متفاوت متعامدند.

$$A = A^\dagger$$

$$A |u_1\rangle = \lambda_1 |u_1\rangle$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2^*) \langle u_2 | u_1 \rangle = 0$$

$$\langle u_2 | A^\dagger = \langle u_2 | A = \lambda_2^* \langle u_2 |$$

$$u_2 = u_1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_1^*$$

$$\langle u_2 | A | u_1 \rangle = \lambda_1 \langle u_2 | u_1 \rangle$$



$$\langle u_2 | A^\dagger | u_1 \rangle = \langle u_2 | A | u_1 \rangle$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2^* \Rightarrow \langle u_2 | u_1 \rangle = 0$$

$$= \lambda_2^* \langle u_2 | u_1 \rangle$$



$$\langle A \rangle_{\Psi} = \langle \Psi | A | \Psi \rangle = \int \Psi^*(x) A \Psi(x) dx$$

$$\langle A \rangle_{\Psi}^* = \langle \Psi | A | \Psi \rangle^* = \int [A \Psi(x)]^* \Psi(x) dx$$

برای یک عملگر
خطی دلخواه مانند
A داریم:

$$\int [A \Psi(x)]^* \Psi(x) dx = \int \Psi^*(x) A^{\dagger} \Psi(x) dx$$

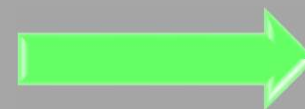
حال عملگر $A^{\dagger}$ را به
صورت زیر تعریف کنیم:

سوال: $(\frac{d}{dx})^{\dagger} = ?$

$$\langle \frac{d}{dx} \rangle_{\Psi}^* = \langle \Psi | \frac{d}{dx} | \Psi \rangle^* = \int [\frac{d\Psi(x)}{dx}]^* \Psi(x) dx$$

$$= \int dx \frac{d(\Psi^* \Psi)}{dx} - \int dx \Psi^* \frac{d\Psi}{dx} = - \int dx \Psi^* \frac{d\Psi}{dx}$$

$$= - \langle \frac{d}{dx} \rangle_{\Psi} = - \langle \Psi | \frac{d}{dx} | \Psi \rangle$$



$$(\frac{d}{dx})^{\dagger} = - \frac{d}{dx}$$

پس عملگر d/dx یک عملگر هرمیتی نیست بلکه به عکس یک عملگر پاد هرمیتی است

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - ae^{ix}\right)^\dagger = ? = \left(\frac{d^2}{dx^2} - a^* e^{-ix}\right)$$

تمرین:

$$\langle H \rangle_\Psi^* = \int [H\Psi(x)]^* \Psi(x) dx$$

اگر عملگر H هرمیتی باشد:

$$= \int \Psi^*(x) H^\dagger \Psi(x) dx$$

$$= \langle H \rangle_\Psi = \int \Psi^*(x) H \Psi(x) dx$$

$$H = H^\dagger$$

در نمایش دیراک:

$$\int \Phi^*(x) A \Psi(x) dx = \langle \Phi | A | \Psi \rangle$$

$$\langle \Phi | A | \Psi \rangle^* = \int [A \Psi(x)]^* \Phi(x) dx$$

$$= \int \Psi(x)^* A^\dagger \Phi(x) dx$$

$$= \langle \Psi | A^\dagger | \Phi \rangle$$

علت تعمیمی که به دنبال آن هستیم و تا حدودی از آن را هم اکنون دیده ایم این است که **H** تنها عملگر مورد علاقه ما نیست.

مشاهده پذیرهای فیزیکی دیگر نظیر عملگر اندازه حرکت، پاریته، مکان و غیره به وسیله عملگرهای هرمیتی نمایش داده می شوند. پس از نمادهای **A**، **B**، **C** و غیره برای نمایش عملگرها استفاده می کنیم، چون بحث ما فقط به عملگرهای هرمیتی محدود است، پس:

$$A = A^{\dagger}, B = B^{\dagger}, C = C^{\dagger}, \dots$$

هر عملگر هرمیتی ویژه توابعی دارد که در واقع مجموعه ای از بردارها را با این خاصیت تشکیل می دهند، که اگر روی آنها اثر کند خودشان را تولید خواهد کرد.

$$A u_a(x) = a u_a(x) \quad A |u_a\rangle = a |u_a\rangle$$

$$\int u_a^*(x) u_{a'}(x) dx = \begin{cases} \delta(a, a') \\ \delta(a - a') \end{cases}$$

$$\langle u_a | u_{a'} \rangle = \begin{cases} \delta(a, a') \\ \delta(a - a') \end{cases}$$

حالت گسسته

حالت پیوسته

حالت گسسته

حالت پیوسته

$$\int u_a^*(x) A u_{a'}(x) dx = a' \int u_a^*(x) u_{a'}(x) dx = a' \delta(a - a') = a$$

$$\langle u_a | A | u_{a'} \rangle = a' \langle u_a | u_{a'} \rangle = a' \delta(a - a') = a$$

$$a = \langle u_a | A | u_{a'} \rangle$$

$$A = A^\dagger$$

عملگر A هرمیتی است، لذا:

پس:

$$\begin{aligned} a &= \langle u_a | A | u_a \rangle = \langle u_a | A^\dagger | u_a \rangle \\ &= \int (A u_a)^* u_a dx = \int a^* u_a^* u_a dx = a^* \end{aligned}$$

پس ویژه مقادیر یک عملگر هرمیتی حقیقی است.

یا به طور فیزیکی چون نتیجه یک اندازه گیری یکی از ویژه مقادیر خواهد بود و چون عملگر A یک مشاهده پذیر است پس باید اندازه گیری آن یک مقدار حقیقی را به دست بدهد.

دقیقا مانند هامیلتونی ویژه توابع یک عملگر هرمیتی یک پایه کامل تشکیل می دهند به طوری که قضیه بسط بازهم صادق است:

$$\Psi(x) = \sum_a C_a u_a(x)$$

$$C_a = \int u_a^*(x) \Psi(x) dx = \langle u_a | \Psi \rangle$$

$$|C_a|^2 =$$

احتمال یافتن ویژه مقدار **a** در اندازه گیری **A** روی دستگاه توصیف شده با $\Psi(x)$

بازهم بعد از اندازه گیری باز تولیدی ایجاب می کند که دستگاه در ویژه حالت $u_a(x)$ برای همیشه قرار گیرد.

در فصل 4 بحث ذره در جعبه و ذره آزاد مشاهده کردیم که ویژه توابع به طور همزمان ویژه توابع **H** و پاریته در حالت اول و **H** و مومنتوم در حالت دوم بودند و دیدیم که در هر دو حالت عملگرهای اضافی با **H** جابه جا می شوند.

در فصل 4 بدون اثبات دیدیم که:

چطور دو تابع تبهگن را از هم تشخیص دهیم؟

$$P_{op} e^{\pm i k x} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} e^{\pm i k x} = \pm \hbar k e^{\pm i k x}$$

$$H e^{\pm i k x} = E e^{\pm i k x}$$

پس می توان تبهگنی را از طریق یک عملگر دیگر مثلاً به صورت فوق به وسیله تکانه یا مانند زیر از طریق پارینه متوجه شد.

$$P \begin{pmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \cos kx \\ - \sin kx \end{pmatrix}$$

$$H \begin{pmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{pmatrix}$$

پس تفاوت از آن جا معلوم خواهد شد که توابع دیجنره توابع ویژه همزمان عملگرهای دیگری نیز هستند.

نکته مهم: عملگرهایی که با هم
جا به جا می شوند می توانند ویژه توابع
مشترک داشته باشند.

$$[P_{op}, H] = 0$$

$$[P, H] = 0$$

پس H و P و H و P_{op} می توانند ویژه توابع
مشترک به طور همزمان داشته باشند.

$$[P_{op}, P] \neq 0$$

$$P\left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\right) \rightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$$

بنابراین P و P_{op} نمی توانند به طور همزمان
ویژه توابع مشترک داشته باشند.

اکنون بیایید بحث را تعمیم دهیم، یعنی چه وقت دو عملگر می توانند ویژه توابع مشترک داشته باشند؟

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن که دو اپراتور هرمیتی دارای ویژه توابع مشترک باشند آن است که با یکدیگر جابه جا شوند.

$$A u_a(x) = a u_a(x)$$

$$B u_a(x) = b u_a(x)$$

برهان شرط
لازم:

$$A B u_a(x) = A b u_a(x) = b A u_a(x) = b a u_a(x)$$

$$= a b u_a(x) = a B u_a(x) = B a u_a(x) = B A u_a(x)$$

$$A B u_a(x) = B A u_a(x)$$

$$(A B - B A) u_a(x) = 0$$

البته اگر رابطه فوق فقط برای یک $u_a(x)$ برقرار باشد نمی تواند خیلی جالب باشد، اما اگر برای یک مجموعه پایه کامل $u_a(x)$ صادق باشد یعنی برای همه توابع مجذورا انتگرال پذیر از نوع:

$$\Psi(x) = \sum_a C_a u_a(x)$$

$$\sum_a (AB - BA) u_a(x) = (AB - BA) \sum_a C_a u_a(x) = 0$$

آنگاه:

$$[A, B] = 0$$

برهان شرط کافی:

به عکس اگر دو عملگر A و B با هم جا به جا شوند، یعنی:

$$ABu_a(x) = BAu_a(x) = aBu_a(x)$$

$$A(Bu_a(x)) = a(Bu_a(x))$$

یعنی $Bu_a(x)$ هم یک ویژه تابع عملگر A است (علاوه بر خود $u_a(x)$ با همان ویژه مقدار a)

حال دو حالت تبهگن و غیر تبهگن را جداگانه بحث می کنیم تا ببینیم که از رابطه زیر:

$$A(Bu_a(x)) = a(Bu_a(x))$$

آیا می توان نتیجه گرفت که **A** و **B** ویژه توابع مشترک دارند.

حالت 1) حالت غیر تبهگن: اگر **A** تبهگن نباشد آنگاه فقط یک ویژه تابع $u_a(x)$ متناظر با ویژه مقدار **a** خواهد بود، پس:

$$A(Bu_a(x)) = a(Bu_a(x))$$

$$Au_a(x) = au_a(x)$$



$$Bu_a(x) = bu_a(x)$$

و این بدان معنی است که **A** و **B** ویژه توابع مشترک $u_a(x)$ را دارند.

و این یعنی این که ویژه توابع **B** به دست آمد.

حالت 2) حالت تبهگن:

.....m

تعداد حالت‌های غیر تبهگن

m + 1 m + n

تعداد حالت‌های تبهگن

در بعد غیر تبهگن مشکلی نیست اما در زیر فضای تبهگن چگونه می توان ویژه بردارهای عملگر **B** را به طور همزمان ویژه بردارهای عملگر **A** نیز بتوانند باشند یافت؟

در این حالت نمی توان به راحتی رابطه زیر را به کار برد:

$$B u_a(x) = b u_a(x)$$

Bu_a(x) باید ویژه تابع **A** باشد زیرا
A(Bu_a(x))=a(Bu_a(x)) ولی به دلیل تبهگنی یک
ترکیب خطی از آنها را می گیریم:

$$B u^{(i)}_a(x) = \sum_{k=m+1}^{m+n} b_{ki} u^{(k)}_a(x)$$

در زیر فضای تبهگن $(m+1 \text{ to } m+n)$ بردار ویژه B را به صورت زیر داریم:

$$v^{(j)}_a(x) = \sum_{l=m+1}^{m+n} d_{jl} u^{(1)}_a(x)$$

$$\sum_{l=m+1}^{m+n} (d_{jl} b_{kl} - \lambda_j d_{jl} \delta_{kl}) = 0$$

$$B v^{(j)}_a(x) = \lambda_j v^{(j)}_a(x)$$

$$\sum_{l=m+1}^{m+n} (b_{kl} - \lambda_j \delta_{kl}) d_{jl} = 0$$

$$B \sum_{l=m+1}^{m+n} d_{jl} u^{(1)}_a(x) = \lambda_j \sum_{l=m+1}^{m+n} d_{jl} u^{(1)}_a(x)$$

$$\sum_{\substack{l=m+1 \\ k=m+1}}^{m+n} d_{jl} b_{kl} u^{(k)}_a(x) = \lambda_j \sum_{l=m+1}^{m+n} d_{jl} u^{(1)}_a(x) = \lambda_j \sum_{k=m+1}^{m+n} d_{jk} u^{(k)}_a(x)$$

$$\sum_{l=m+1}^{m+n} d_{jl} b_{kl} u^{(k)}_a(x) = \lambda_j d_{jk} u^{(k)}_a(x)$$

$$\sum_{l=m+1}^{m+n} d_{jl} b_{kl} = \lambda_j d_{jk}$$

شرط وجود جواب غیر بدیهی:

$$\det(b_{kl} - \lambda_j \delta_{kl}) = 0$$

که از حل آن λ_j ها و سپس d_j به دست می آیند. در نتیجه $v_a^{(j)}(x)$ ها معلوم می شوند. بنابراین بردارهای ویژه B معلوم شده اند.

حتی پس از یافتن ویژه توابع A و سپس ترکیب آنها و به دست آوردن ویژه توابع عملگر جابه جا شونده با A ، یعنی B ، هنوز ممکن است تبهگنی وجود داشته باشد، یعنی چندین ویژه تابع A و B به طور همزمان وجود داشته باشند که ویژه توابع عملگر دیگری مانند C باشند که با عملگرهای A و B جابه جا شوند و توابع می توانند باز ترکیب شوند تا ویژه توابع مشترک A ، B و C باشند که ویژه مقادیر آنها تبهگنی A و B را روشن سازد. این کار را می توان تا آنجا ادامه داد که دیگر تبهگنی ای وجود نداشته باشد.

مجموعه عملگرهایی که با هم جابه جا می شوند و ویژه توابع مشترک دارند یک مجموعه کامل تشکیل می دهند که به آنها مشاهده پذیرهای جابه جا شونده گویند.

$$[A, B] = [A, C] = \dots = [A, M] = 0$$

$$A u_{ab\dots m}(x) = a u_{ab\dots m}(x)$$

$$[B, C] = [B, D] = \dots = [B, M] = 0$$

$$B u_{ab\dots m}(x) = b u_{ab\dots m}(x)$$

.....

.....

.....

$$M u_{ab\dots m}(x) = m u_{ab\dots m}(x)$$

اما اگر دو عملگر با هم جابه جا نشوند، آنگاه بین آن دو یک عدم قطعیت وجود دارد:

تعریف:

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

$$\Delta A = A - \langle A \rangle$$

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$$

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 + \langle A \rangle^2 - 2A \langle A \rangle \rangle$$

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle + \langle A \rangle^2 - 2 \langle A \rangle \langle A \rangle$$

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle + \langle A \rangle^2 - 2 \langle A \rangle^2$$

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

$$U = A - \langle A \rangle$$

$$V = B - \langle B \rangle$$

$$\Phi = U\Psi + i\lambda V\Psi$$

اگر A و B و در نتیجه U و V هرمیتی

$$I(\lambda) = \int dx \Phi^* \Phi \geq 0$$

$$I(\lambda) = \int dx (U\Psi + i\lambda V\Psi)^* (U\Psi + i\lambda V\Psi)$$

تمرین:

$$I(\lambda) = (\Delta A)^2 + \lambda^2 (\Delta B)^2 + i\lambda \langle [A, B] \rangle$$

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = 0$$



$$2\lambda (\Delta B)^2 + i \langle [A, B] \rangle = 0$$

$$\lambda = -i \frac{\langle [A, B] \rangle}{2(\Delta B)^2}$$

$$I(\lambda) = (\Delta A)^2 + \frac{\langle i[A, B] \rangle^2}{4(\Delta B)^2} - \frac{\langle i[A, B] \rangle^2}{2(\Delta B)^2} \geq 0$$

$$I(\lambda) = (\Delta A)^2 - \frac{\langle i[A, B] \rangle^2}{4(\Delta B)^2} \geq 0$$

$$(\Delta p)^2 (\Delta x)^2 \geq \frac{1}{4} \langle i \frac{\hbar}{i} \rangle^2$$

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} \langle i[A, B] \rangle^2$$

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$A \rightarrow p \text{ \& } B \rightarrow x$$

که همان رابطه عدم قطعیت است

نکته: دقت شود که رابطه عدم قطعیت فوق مستقل از خواص موجی به دست آمد و صرفاً از خواص عملگری استفاده شد.

حد کلاسیکی مکانیک کوانتومی کجاست؟

برای پاسخ به این سوال ابتدا باید تحول زمانی مقادیر چمشداشتی عملگرها را مطالعه کنیم.

در حالت کلی مقادیر چمشداشتی عملگرها با زمان تغییر می کند زیرا هم عملگرها می توانند به طور صریح به زمان بستگی داشته باشند و هم این که توابع موج $\Psi(x, t)$ به زمان بستگی دارند.

$$\langle A \rangle_t = \int dx \Psi^*(x, t) A \Psi(x, t)$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_t = \int dx \Psi^*(x, t) \frac{\partial A}{\partial t} \Psi(x, t)$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_t = \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle_t$$

$$+ \int dx \frac{\partial \Psi^*(x, t)}{\partial t} A \Psi(x, t)$$

$$+ \int dx \left(\frac{1}{i\hbar} H \Psi(x, t) \right)^* A \Psi(x, t)$$

$$+ \int dx \Psi^*(x, t) A \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

$$+ \int dx \Psi^*(x, t) A \left(\frac{1}{i\hbar} H \Psi(x, t) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_t = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_t$$

$$+ \frac{i}{\hbar} \int dx \Psi^*(x, t) H A \Psi(x, t)$$

$$- \frac{i}{\hbar} \int dx \Psi^*(x, t) A H \Psi(x, t)$$

چون H هرمیتی است:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_t = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle_t + \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle_t$$

اگر A به طور صریح به زمان بستگی نداشته باشد، آنگاه

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle_t$$

معادله حرکت هایزنبرگ

اگر یک عملگر با H جابه جا شود، آنگاه مقدار چمشداشتی آن همیشه ثابت است، یعنی می توانیم بگوییم که مشاهده پذیر یک ثابت حرکت است.

اگر هامیلتونی یک مجموعه کامل از مشاهده پذیرهای جابه جا شونده باشد، آنگاه هر چیز دیگری ثابت حرکت خواهد بود.

$$A = x$$



$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, x] \rangle_t$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \left[\frac{p^2}{2m} + V(x), x \right] \rangle$$

$$0$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \left[\frac{p^2}{2m}, x \right] \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle [V(x), x] \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \left[\frac{p^2}{2m}, x \right] \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \frac{p}{2m} [p, x] + [p, x] \frac{p}{2m} \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \frac{\hbar}{i} \langle \frac{p}{2m} + \frac{p}{2m} \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \langle \frac{p}{m} \rangle$$

$$A = p$$



$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, p] \rangle_t$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\frac{p^2}{2m} + V(x), p] \rangle$$

$$0$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\frac{p^2}{2m}, p] \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle [V(x), p] \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [p, V(x)] \rangle$$

$$[p, V(x)]\Psi(x) = pV(x)\Psi(x) - V(x)p\Psi(x)$$

$$[p, V(x)]\Psi(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (V(x)\Psi(x)) - V(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d\Psi(x)}{dx}$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{dV(x)}{dx} \Psi(x) + \frac{\hbar}{i} \frac{d\Psi(x)}{dx} V(x) - V(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d\Psi(x)}{dx}$$

$$[p, V(x)] = \frac{\hbar}{i} \frac{dV(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [p, V(x)] \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = -\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar}{i} \frac{dV(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = - \left\langle \frac{dV(x)}{dx} \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \left\langle \frac{p}{m} \right\rangle$$

تنها چیزی که نمی گذارد کاملاً به کلاسیک برسیم این است که:

$$\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle \neq \frac{dV(\langle x \rangle)}{d\langle x \rangle}$$

معادله حرکت ارنفست

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = - \left\langle \frac{dV(x)}{dx} \right\rangle$$

که بسیار شبیه به معادله حرکت یک ذره نقطه ای کلاسیکی تحت پتانسیل $V(x)$ است.

$$\frac{d^2 x_{cl}}{dt^2} = - \frac{dV(x_{cl})}{dx_{cl}}$$

اگر فرض کنیم که $x_{cl} = \langle x \rangle$ باشد

$$\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle \neq \frac{dV(\langle x \rangle)}{d\langle x \rangle}$$

اگر نامساوی روبه رو به تساوی بدل می شد،
آنگاه تفاوتی بین مکانیک کلاسیک و مکانیک
کوانتومی وجود نمی داشت!

این نکته را اولین بار ارنفست مشاهده کرد.

علامت تساوی فقط وقتی امکان پذیر است که پتانسیل به آرامی تغییر کند:

$$F(x) = F(\langle x \rangle) + (x - \langle x \rangle)F'(\langle x \rangle) + \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2!}F''(\langle x \rangle) + \dots$$

اگر $(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ کوچک باشد، آنگاه

$$\langle F(x) \rangle \approx \langle F(\langle x \rangle) \rangle + \langle (x - \langle x \rangle) \rangle \langle F'(\langle x \rangle) \rangle$$

$$\langle F(x) \rangle \approx F(\langle x \rangle) + \langle (x - \langle x \rangle) \rangle F'(\langle x \rangle)$$

$$\langle F(x) \rangle \approx F(\langle x \rangle)$$

رابطه فوق می تواند برای الکترونها نیز درست باشد.
برای میدانهای ماکروسکوپی درست است و تقریب
بسیار خوبی است و می توان حرکت مداری الکترونها
و پروتونها را در یک شتاب دهنده توصیف کند.

بحث تصویر هایزنبرگ، تصویر شرودینگر:

مکمل:

عملگر تحول زمانی

برای توصیف سیستمهایی که تا کنون با آنها برخورد داشته ایم، به یک معادله حرکت نیازمندیم. معادله ای که توسط آن بتوانیم چگونگی حالت سیستم در هر لحظه را با استفاده از حالت لحظه قبل آن بیان کنیم.

در اینجا تحولات زمانی سیستمهای کوانتوم مکانیکی را مورد بررسی قرار می دهیم:

بردار حالت $\Psi(\mathbf{x}, t)$ که در حالت کلی بیانگر تحول زمانی سیستم خواهد بود در معادله شرودینگر وابسته به زمان صدق می کند:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = H \Psi(\mathbf{x}, t)$$

از حل این معادله خواهیم داشت:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{-iHt/\hbar} \Psi(\mathbf{x}, 0)$$

در حالت کلی، اگر بردار حالت سیستم در زمان t_0 به صورت $\Psi(x, t_0)$ مشخص شده باشد، در زمان t می توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$\Psi(x, t) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \Psi(x, t_0)$$

$$u(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$$

عملگر $u(t, t_0)$ را عملگر تحول زمانی گویند.

عملگر $e^{-iHt/\hbar}$ یک عملگر یکانیست، زیرا H یک عملگر هرمیتی است:

$$uu^\dagger = e^{-iHt/\hbar} \left(e^{-iHt/\hbar} \right)^\dagger = e^{-iHt/\hbar} e^{iH^\dagger t/\hbar} = e^{-iHt/\hbar} e^{iHt/\hbar} = 1$$

تصویر شرودینگر و تصویر هایزنبرگ

برای توصیف تحولات زمانی سیستمها از دو تصویر مختلف استفاده می کنیم که از آنها به عنوان تصاویر شرودینگر و هایزنبرگ یاد می شود.

با توجه به آن که احتمال حضور در مکانیک کوانتومی اهمیت فیزیکی دارد، این دو تصویر در نهایت نتیجه یکسانی را به دست خواهند داد.

تصویر شرودینگر

در تصویر شرودینگر بردارهای پایه و عملگرهای سیستم تغییرات زمانی ندارند و ثابت هستند و آنچه نسبت به زمان تغییر می کند، تابع موج سیستم است:

$$\Psi(x, t) = e^{-iHt/\hbar} \Psi(x, 0)$$

تصویر هایزنبرگ

در تصویر هایزنبرگ بردارهای پایه و عملگرهای سیستم نسبت به زمان متغیرند و آنچه ثابت زمانی است تابع موج سیستم است. بنابراین بردار پایه $u(x, t)$ و عملگر $A(t)$ داریم:

$$u(x, t_0) = e^{iHt/\hbar} u(x, t = 0)$$

$$A(t) = e^{iHt/\hbar} A(0) e^{-iHt/\hbar}$$

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

برای اثبات رابطه فوق ابتدا سه لم زیر را اثبات می کنیم:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle \geq |\langle \alpha | \beta \rangle|^2$$

لم 1: نامساوی شوارتز

$$\lambda = - \frac{\langle \beta | \alpha \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle}$$

$$(\langle \alpha | + \lambda^* \langle \beta |). (| \alpha \rangle + \lambda | \beta \rangle) \geq 0$$

$$\langle \alpha | \alpha \rangle + \lambda \langle \alpha | \beta \rangle + \lambda^* \langle \beta | \alpha \rangle + \lambda^2 \langle \beta | \beta \rangle \geq 0$$

$$\langle \alpha | \alpha \rangle - \frac{\langle \beta | \alpha \rangle \langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} - \frac{\langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \alpha \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} + \frac{\langle \beta | \alpha \rangle \langle \beta | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} \geq 0$$

$$\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle - \langle \beta | \beta \rangle - \langle \alpha | \alpha \rangle + \langle \beta | \alpha \rangle^2 \geq 0$$

لم 2: مقدار چمشداشتی یک عملگر هرمیتی حقیقی خالص است

$$\langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle \beta | A^\dagger | \alpha \rangle^* = \langle \beta | A | \alpha \rangle^*$$

$$| \beta \rangle \rightarrow | \alpha \rangle \quad \langle \alpha | A | \alpha \rangle = \langle A \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle^* = \langle A \rangle^*$$

لم 3: مقدار چمشداشتی یک عملگر پاد هرمیتی موهومی خالص است

$$\langle \alpha | A | \alpha \rangle = \langle \alpha | A^\dagger | \alpha \rangle^* = - \langle \alpha | A | \alpha \rangle^* = - \langle A \rangle^*$$

$$| \alpha \rangle = \Delta A | \alpha \rangle$$

$$| \beta \rangle = \Delta B | \beta \rangle$$

کتهای کاملاً
دلخواه

حال به اثبات اصل عدم قطعیت می پردازیم:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

$$\Delta A \Delta B = \frac{1}{2} [\Delta A, \Delta B] + \frac{1}{2} \{ \Delta A, \Delta B \}$$

$$[A, B]^{\dagger} = (AB - BA)^{\dagger} = BA - AB = -[A, B]$$

$$[\Delta A, \Delta B] = \Delta A \Delta B - \Delta B \Delta A = (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) - (B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle)$$

$$= (AB - A \cancel{\langle B \rangle} - \cancel{\langle A \rangle} B + \cancel{\langle A \rangle} \cancel{\langle B \rangle}) - (BA - B \cancel{\langle A \rangle} - \cancel{\langle B \rangle} A + \cancel{\langle B \rangle} \cancel{\langle A \rangle})$$

$$[\Delta A, \Delta B] = AB - BA = [A, B]$$

$$\langle \Delta A \Delta B \rangle = \frac{1}{2} \langle [A, B] \rangle + \frac{1}{2} \langle \{A, B\} \rangle$$

موهومی خالص

حقیقی خالص

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2 + \frac{1}{4} |\langle \{A, B\} \rangle|^2$$

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

موهومی خالص

پس اگر نخواهیم علامت قدر مطلق را حفظ کنیم باید یک i اضافه نماییم.

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle i[A, B] \rangle^2$$

تست 1 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1376): در مورد نوسانگر هارمونیک، رابطه جابه جایی بین اپراتور مختصات هایزنبرگی در زمان t_1 و اپراتور مختصات هایزنبرگی در زمان t_2 به کدام صورت زیر است؟

(1) صفر

(2) غیر صفر ولی مستقل از زمانهای t_1 و t_2

(3) متناسب با $\sin(\omega(t_1-t_2))$

(4) متناسب با $\cos(\omega(t_1-t_2))$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, x] = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{p^2}{2m} + V(x), x \right] = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{p^2}{2m}, x \right] = p / m$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, p] = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{p^2}{2m} + V(x), p \right] = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{1}{2} m \omega^2 x^2, p \right] = - \frac{dV(x)}{dx} = -m \omega^2 x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{m} (-m \omega^2 x) = -\omega^2 x$$

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$



$$x(0) = A$$

$$p(t) = -m\omega A \sin \omega t + m\omega B \cos \omega t \quad \rightarrow \quad p(0) = mB\omega$$

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{p(0)}{m\omega} \sin \omega t$$

با اعمال شرایط اولیه

$$[x(t_1), x(t_2)] = [x(0) \cos \omega t_1 + \frac{p(0)}{m\omega} \sin \omega t_1, x(0) \cos \omega t_2 + \frac{p(0)}{m\omega} \sin \omega t_2]$$

$$[x(t_1), x(t_2)] = [x(0) \cos \omega t_1, \frac{p(0)}{m\omega} \sin \omega t_2] + [\frac{p(0)}{m\omega} \sin \omega t_1, x(0) \cos \omega t_2]$$

$$= \cos \omega t_1 \frac{1}{m\omega} \sin \omega t_2 [x(0), p(0)] + \frac{1}{m\omega} \sin \omega t_1 \cos \omega t_2 [p(0), x(0)]$$

$$= \cos \omega t_1 \frac{1}{m\omega} \sin \omega t_2 \frac{-\hbar}{i} + \frac{1}{m\omega} \sin \omega t_1 \cos \omega t_2 \frac{\hbar}{i} = \frac{i\hbar}{m\omega} \sin \omega(t_2 - t_1)$$

تست 1 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1376): در مورد نوسانگر هارمونیک، رابطه جابه جایی بین اپراتور مختصات هایزنبرگی در زمان t_1 و اپراتور مختصات هایزنبرگی در زمان t_2 به کدام صورت زیر است؟

(1) صفر

(2) غیر صفر ولی مستقل از زمانهای t_1 و t_2

(3) متناسب با $\sin(\omega(t_1 - t_2))$

(4) متناسب با $\cos(\omega(t_1 - t_2))$

تست 2 (کنکور کارشناسی ارشد سال 13): برای ذره ای تحت پتانسیل $V(x)=3x^4+1$ حرکت می کند، کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟ x و t متغیرهای مستقل از یکدیگرند.

$$2) \quad \langle p \rangle_t = \langle 3x^4 \rangle + 1$$

$$1) \quad \langle p \rangle_t = 0$$

$$4) \quad \langle p \rangle_t = \langle p \rangle_{t_0} - 12 \langle x^3 \rangle t \quad 3) \quad \langle p \rangle_t = \langle p \rangle_{t_0} + \langle 3x^4 \rangle$$

$$\frac{d \langle p \rangle_t}{dt} = - \left\langle \frac{dV(x)}{dx} \right\rangle = - \langle 12x^3 + 0 \rangle = -12 \langle x^3 \rangle$$

$$\int d \langle p \rangle_t = \int -12 \langle x^3 \rangle dt$$

$$\langle p \rangle_t - \langle p \rangle_{t_0} = -12 \langle x^3 \rangle t$$

$$\langle p \rangle_t = \langle p \rangle_{t_0} - 12 \langle x^3 \rangle t$$

تست 3 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1377): اگر هامیلتونی دستگاهی H و تابع موج آن Ψ باشد، چنانچه به هامیلتونی عدد ثابت V_0 را اضافه کنیم، تابع موج کدام است؟

4) $e^{-iV_0/\hbar}\Psi$ 3) $(1 - e^{-iV_0/\hbar})\Psi$ 2) $(1 + e^{-iV_0/\hbar})\Psi$ 1) $e^{iV_0/\hbar}\Psi$

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

$$\frac{H}{i\hbar}dt = \frac{\partial\Psi}{\Psi}$$

$$\Psi = \Psi_0 e^{-iHt/\hbar}$$

$$H \rightarrow H' = H + V_0$$

$$H'\Psi = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

$$(H + V_0)\Psi = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

$$\frac{H + V_0}{i\hbar}dt = \frac{\partial\Psi}{\Psi}$$

$$\Psi' = \Psi'_0 e^{-i(H+V_0)t/\hbar}$$

$$\Psi' = \Psi'_0 e^{-iHt/\hbar} e^{-iV_0t/\hbar}$$

$$\Psi' = \frac{\Psi'_0}{\Psi_0} \Psi e^{-iV_0t/\hbar}$$

$$\Psi' = \Psi''_0 \Psi e^{-iV_0t/\hbar}$$

$$\Psi' \propto \Psi e^{-iV_0t/\hbar}$$

تست 4 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1377): اگر هامیلتونی دستگاهی
 $H = p^2/2m + V(x)$ باشد مقدار $d/dt \langle x^2 \rangle$ برابر است با:

$$2) \quad 2/m \langle px \rangle \qquad 1) \quad 1/m [\langle px \rangle - \langle xp \rangle]$$

$$4) \quad 1/m [\langle p^2 \rangle \langle x^2 \rangle] \qquad 3) \quad 1/m [\langle px \rangle + \langle xp \rangle]$$

$$d/dt \langle x^2 \rangle = i/\hbar \langle [H, x^2] \rangle = i/\hbar \langle [p^2/2m + V(x), x^2] \rangle$$

$$d/dt \langle x^2 \rangle = i/\hbar \langle [p^2/2m, x^2] \rangle$$

$$d/dt \langle x^2 \rangle = i/(2m\hbar) \langle p[p, x^2] + [p, x^2]p \rangle$$

$$d/dt \langle x^2 \rangle = i/(2m\hbar) \langle px[p, x] + p[p, x]x + x[p, x]p + [p, x]xp \rangle$$

$$d/dt \langle x^2 \rangle = 1/m \langle px + xp \rangle$$

$$d/dt \langle x^2 \rangle = 1/m (\langle px \rangle + \langle xp \rangle)$$

تست 5 (کنکور کارشناسی ارشد سال 13): هامیلتونی یک دستگاه یک بعدی با رابطه $H = p^2 + Ax + Bpx$ داده شده است، که در آن A و B اعداد ثابتند، کدام گزینه صحیح است؟

$$2) \frac{d \langle p \rangle}{dt} = \langle p \rangle - B \langle x \rangle$$

$$1) \frac{d \langle p \rangle}{dt} = A - B \langle p \rangle$$

$$4) \frac{d \langle p \rangle}{dt} = B \langle x \rangle - \langle p \rangle$$

$$3) \frac{d \langle p \rangle}{dt} = -A - B \langle p \rangle$$

$$H = p^2 + Ax + Bpx \quad \longrightarrow \quad \frac{d \langle p \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, p] \rangle$$

$$\frac{d \langle p \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [p^2 + Ax + Bpx, p] \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle A[x, p] + Bp[x, p] \rangle$$

$$\frac{d \langle p \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [Ax + Bpx, p] \rangle = \langle -A - Bp \rangle$$

$$\frac{d \langle p \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle A[x, p] + B[px, p] \rangle$$

تست 6 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1380): هامیلتونی نوسانگر هماهنگ یک بعدی $H = p^2/2m + 1/2m\omega^2 x^2$ است. تغییرات زمانی متوسط عملگر $A = x + p/mt$ کدام است؟

$$2) \frac{2}{m} \langle p \rangle - \omega^2 t \langle x \rangle$$

$$1) \frac{1}{m} \langle p \rangle - \omega^2 t \langle x \rangle$$

$$4) -\frac{1}{m} \langle p \rangle + \omega^2 t \langle x \rangle$$

$$3) -\frac{2}{m} \langle p \rangle + 2\omega^2 t \langle x \rangle$$

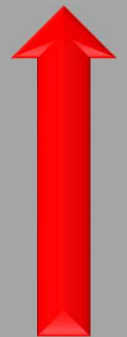
$$\frac{d \langle A \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle$$

$$[p, V(x)] = \frac{\hbar}{i} \frac{dV(x)}{dx}$$

$$\frac{d \langle A \rangle}{dt} = \left\langle \frac{p}{m} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, x + \frac{p}{m} t \right] \right\rangle$$

$$\frac{d \langle A \rangle}{dt} = \left\langle \frac{p}{m} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \left\langle \frac{1}{2m} [p^2, x] + \frac{1}{2} m \omega^2 t [x^2, p] \right\rangle$$

$$\frac{d \langle A \rangle}{dt} = \left\langle \frac{p}{m} \right\rangle + \left\langle \frac{p}{m} \right\rangle - \omega^2 t \langle x \rangle = \frac{2}{m} \langle p \rangle - \omega^2 t \langle x \rangle$$



تست 7 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1380): عملگر هایزنبرگی مکان یک ذره آزاد، که در یک بعد (راستای x) در حرکت است، در لحظه t کدام است؟ $x(0)$ عملگر مکان و $p(0)$ عملگر ممنتوم در لحظه صفر است)

$$4) \ x(0) + \frac{2p(0)t}{m} \quad 3) \ x(0) + \frac{p(0)t}{m} \quad 2) \ x(0) \quad 1) \ \frac{p(0)t}{m}$$

$$\frac{d \langle x \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, x] \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\frac{p^2}{2m} + V(x), x] \rangle$$

$$\frac{d \langle x \rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \langle \frac{1}{2m} [p^2, x] \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m}$$

$$\frac{d \langle p \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle \frac{1}{2m} [p^2, p] \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad p(t) = p(0) = \text{const.}$$

$$\frac{d \langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p(0) \rangle}{m} \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) + \frac{p(0)t}{m}$$

تست 8 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1381): هامیلتونی نوسانگر هماهنگ یک بعدی با بار e در میدان الکتریکی یکنواخت $H = p^2/2m + 1/2m\omega^2 x^2 - eEx$ است. معادله حرکت عملگر $x(t)$ کدام است؟

$$2) \ddot{x} = \omega^2 x - \frac{eE}{2m}$$

$$1) \ddot{x} = -\frac{eE}{m}$$

$$4) \ddot{x} = -\frac{\omega^2 x}{2} - \frac{eE}{m}$$

$$3) \ddot{x} = -\omega^2 x + \frac{eE}{m}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, x] = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{p^2}{2m} + V(x) - eEx, x \right] = \frac{p}{m}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, p] = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - eEx, p \right] = -m \omega^2 x + eE$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{dp}{dt}$$



$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x + \frac{eE}{m}$$

تست 9 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1382): هامیلتونی ذره ای به جرم m و بار e به شکل $H = \frac{eg}{2mc} \vec{S} \cdot \vec{B}$ است. تغییرات زمانی بردار اسپین این ذره $d\vec{S}(t)/dt$ کدام است؟ g مقدار ثابتی است.

$$1) \frac{eg}{2mc} \vec{B} \quad 2) \frac{-eg}{2mc} \vec{S} \times \vec{B} \quad 3) \frac{eg}{2mc} \vec{S} \quad 4) \frac{eg}{2mc} \vec{S} \times \vec{B}$$

$$\frac{dS_x}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, S_x] = \frac{i}{\hbar} \frac{eg}{2mc} [\vec{S} \cdot \vec{B}, S_x]$$

$$\frac{dS_x}{dt} = \frac{i}{\hbar} \frac{eg}{2mc} [S_x B_x + S_y B_y + S_z B_z, S_x]$$

$$\frac{dS_x}{dt} = \frac{i}{\hbar} \frac{eg}{2mc} \{ [S_y B_y, S_x] + [S_z B_z, S_x] \}$$

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$$

$$\frac{dS_x}{dt} = \frac{i}{\hbar} \frac{eg}{2mc} (B_y (-i\hbar) S_z + B_z S_y (i\hbar)) = \frac{eg}{2mc} (B_y S_z - B_z S_y)$$

تست 10 (کنکور کارشناسی ارشد سال 1376): کدام رابطه قضیه ارنست را دقیقاً بیان می‌کند؟

$$2) \quad \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle = -\vec{\nabla} \langle V(r) \rangle$$

$$1) \quad \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle = + \langle \vec{\nabla} V(r) \rangle$$

$$4) \quad m \frac{d^2 \langle \vec{r} \rangle}{dt^2} = -\vec{\nabla} \langle V(r) \rangle$$

$$3) \quad \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle = - \langle \vec{\nabla} V(r) \rangle$$