

Chapter Seven

روشهای عملگری در مکانیک کوانتومی

Operator Methods in Quantum Mechanics

بحث فصل قبل در باب ساختار کلی مکانیک موجی ارزش یکسانی برای عملگرهای نمایش دهنده مشاهده پذیرها با معرفی معادله هایزنبرگ و ویژه توابع آنها قابل شد.

حتی می توان گفت که ارزش ویژه توابع در قیاس با عملگرهای آنها به مراتب به دلیل شباهت آنها با بردارهای پایه در یک فضای برداری N بعدی کمتر است:

$$Hu_E(x) = Eu_E(x)$$

در معادله روبه رو از نظر ارزش دهی، ارزش H بیشتر از ارزش $u(x)$ است، به این معنی که برای یافتن $u(x)$ نیاز به H داریم.

در واقع معادله مستقل از زمان با تعبیر $u(x)$ ها به عنوان بردار پایه می تواند به صورت معادله ماتریسی زیر نوشته شود.

$$(H - IE)u_E(x) = 0$$

$$\det(H - IE) = 0$$

شرط وجود جواب غیر بدیهی:



ویژه مقادیر E تعیین می شوند



ویژه بردارهای $u(x)$ حاصل می شوند

پس خلاصه این که ارزش H با تعبیر $u(x)$ به عنوان بردار پایه بیشتر از $u(x)$ است.

اما همین u ها یا ویژه توابع بودند که در فصل پنج جایی که مسائل فیزیکی مختلف مانند چاه های پتانسیل، سد، پله را بحث کردیم کمیت اصلی را تشکیل می دادند و در آنجا نقش بسیار مهمی را ایفا می کردند (به مراتب بیشتر از H)

در این فصل با یک مثال ساده نشان خواهیم داد که:

(الف) طیف ویژه مقادیر را می توان با استفاده تنها از عملگرها بدون توجه به ویژه توابع تا حدود زیادی محاسبه کرد یا به دست آورد

(ب) توصیف ویژه توابع به عنوان یک بردار پایه را می توان مجردتر کرد.

نکته ای که در قسمت (ب) به آن اشاره شد مهم است، زیرا تا کنون ما فقط توابعی را در نظر گرفته ایم که به x یا p بستگی داشته باشند.

بعدا خواهیم دید که مشاهده پذیرهایی وجود دارند که نه می توان آنها را مستقیما به x مربوط کرد و نه می توان آنها را مستقیما به p مربوط کرد.

به همین دلیل یک نوتاسیون مجردتر از ویژه توابع باید توسعه داده شود.

نکات یاد شده در مثال زیر یعنی نوسانگر هماهنگ روشنتر خواهد شد:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

که در آن p و x اپراتور هستند. در اینجا اسرار نداریم که p را حتما با $\frac{\hbar}{i} d/dx$ نمایش دهیم.

$$[p, x] = \frac{\hbar}{i}$$

در اینجا تنها نیاز داریم که از نتیجه به دست آمده در فصل سه به صورت زیر استفاده کنیم:

هامیلتونی نوسانگر را به طور کلاسیکی می توان به صورت زیر نوشت:

$$H = \omega \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}} x - i \frac{p}{\sqrt{2m\omega}} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}} x + i \frac{p}{\sqrt{2m\omega}} \right)$$

تمرین: نشان دهید که اگر $px = xp$ باشد (کلاسیکی)، آنگاه رابطه فوق به هامیلتونی نوسانگر ساده منجر می شود.

اما چون در مکانیک کوانتومی p و x با هم جابه جا نمی شوند، داریم:

$$\omega \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}} x - i \frac{p}{\sqrt{2m\omega}} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}} x + i \frac{p}{\sqrt{2m\omega}} \right) = H - \frac{1}{2} \hbar \omega$$

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - i \frac{\omega}{2} (px - xp) = H - \frac{i\omega}{2} [p, x] = H - \frac{i\omega}{2} \frac{\hbar}{i}$$

حال نوتاسیون عملگری زیر را معرفی می کنیم:

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$A^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\omega}}$$

که در آن از هرمیتی بودن عملگرهای x و p استفاده شده است.

دو عملگر فوق با هم جابه جایی نمی شوند:

$$[A, A^\dagger] = \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x, -i\frac{p}{\sqrt{2m\omega}} \right] + \left[i\frac{p}{\sqrt{2m\omega}}, \sqrt{\frac{m\omega}{2}}x \right] = \hbar$$

از طرفی طبق تعریف دو عملگر فوق می توان هامیلتونی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$H = \omega A^\dagger A + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

سادگی هامیلتونی به شکل رو به رو انعکاسی از سادگی روابط جابه جایی دو عملگر فوق با H است:

$$[H, A] = [\omega A^\dagger A, A] = \omega [A^\dagger, A] A + \omega A^\dagger [\cancel{A}, A]$$

$$= \omega [A^\dagger, A] A = \omega(-\hbar) A$$

$$[H, A^\dagger] = [\omega A^\dagger A, A^\dagger] = \omega [\cancel{A^\dagger}, A^\dagger] A + \omega A^\dagger [A, A^\dagger]$$

$$= \omega A^\dagger [A, A^\dagger] = \hbar \omega A^\dagger$$

$$[A, B]^\dagger = (AB - BA)^\dagger = (B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger) = [B^\dagger, A^\dagger]$$

یک رابطه مفید:

$$[H, A]^\dagger = [A^\dagger, H^\dagger] = [A^\dagger, H] = -[H, A^\dagger]$$

$$(-\hbar \omega A)^\dagger = -\hbar \omega A^\dagger = -(\hbar \omega A^\dagger) = -\hbar \omega A^\dagger$$

$$Hu_E(x) = Eu_E(x)$$

حال بیاید معادله ویژه مقدار را بنویسیم:

در گذشته هر وقت چنین معادله ای را می نوشتیم به طور غیر مستقیم منظورمان این بود که H شامل عملگرهایی نظیر d/dx است و $u(x)$ هم یک تابع از x است.

که البته برای وقتی که عملگرهای ما در فضای توابع مجذورا انتگرال پذیر x تعریف می شدند مناسب بود.

اما در آنچه که ما الآن انجام می دهیم ما نگران آن نیستیم که عملگرهای ما روی چیزی اثر می کنند.

در اینجا فرض می کنیم که ویژه توابع در یک فضای برداری کاملا مجرد تعریف شده اند و سپس آن فضای مجرد را به فضای x مربوط می کنیم.

برای تبدیل این تجرد به زبانی که ما برای توصیف معادلات به کار می بریم، دیگر نباید از ویژه توابع **eigenfunctions** صحبت کنیم، بلکه باید از حالت‌های ویژه (**eigenstates**) صحبت به میان آوریم و آن چه را که قبلا توابع موج یا بسته موج می نامیدیم اکنون بردارهای حالت (**state vectors**) می نامیم.

بنابراین به جای توابع ویژه $u_{ab...m}(x)$ می توان از حالت ویژه $u_{ab...m}$ بدون آرگومان x استفاده کرد. گاهی برای سادگی این ویژه حالت حتی به صورت $|ab...m\rangle$ نوشته می شود. $a, b, ..., m$ معرف ویژه مقادیر عملگرهای جا به جا شوندۀ $A, B, ..., M$ بودند.

$$[H, A] = -\hbar\omega A$$

$$HAu_E - AHu_E = -\hbar\omega Au_E$$

$$HAu_E = AHu_E - \hbar\omega Au_E$$

$$= AEu_E - \hbar\omega Au_E$$

$$= (E - \hbar\omega)Au_E$$

$$H(Au_E) = (E - \hbar\omega)(Au_E)$$

$$Au_E = C(E)u_{E-\varepsilon}$$

این معادله بیان می کند که اگر u_E یک ویژه تابع H با ویژه مقدار E باشد، آنگاه Au_E نیز یک ویژه تابع H اما با ویژه مقدار $E - \hbar\omega$ است، یعنی با یک انرژی به اندازه یک واحد $\varepsilon = \hbar\omega$ کمتر:

ضریب $C(E)$ ضروری است زیرا حتی اگر u_E به یک نرمالیزه باشد هیچ دلیلی وجود ندارد که Au_E هم نرمالیزه باشد.

در تاکید ما بر جداسازی از وابستگی به x ، شرط بهنجارش که همیشه به صورت زیر نوشته می شد:

$$\int u_E^*(x) u_E(x) dx = 1$$

اکنون با استفاده از نماد دیراک به صورت زیر نوشته می شود:

$$\langle u_E | u_E \rangle = 1$$

$$\langle u_E | u_{E'} \rangle = \begin{cases} \delta(E, E') \\ \delta(E - E') \end{cases}$$

حالت گسسته

حالت پیوسته

اگر اکنون $[H, A] = -\hbar\omega A$ را بر $u_{E-\varepsilon}$ اعمال کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$[H, A]u_{E-\varepsilon} = -\hbar\omega Au_{E-\varepsilon}$$

$$A(Au_E) = A(C(E)u_{E-\varepsilon})$$

$$(HA - AH)u_{E-\varepsilon} = -\hbar\omega Au_{E-\varepsilon}$$

$$= C'(E)C(E)u_{E-2\varepsilon}$$

$$HAu_{E-\varepsilon} - AHu_{E-\varepsilon} = -\hbar\omega Au_{E-\varepsilon}$$

$$HAu_{E-\varepsilon} - A(E - \varepsilon)u_{E-\varepsilon} = -\hbar\omega Au_{E-\varepsilon}$$

$$HAu_{E-\varepsilon} = (E - \varepsilon - \hbar\omega)Au_{E-\varepsilon}$$

Lowering Operator

$$HAu_{E-\varepsilon} = (E - 2\varepsilon)Au_{E-\varepsilon}$$

$$A^2u_E = C'(E)C(E)u_{E-2\varepsilon}$$

$$Au_{E-\varepsilon} \propto u_{E-2\varepsilon}$$

پس با تکرار این عمل می توان حالت های پایین و پایین تر را تولید کرد. به همین دلیل به **A** عملگر پایین آورنده گویند.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

A حدی برای این که چند بار می تواند عملگر عمل کند وجود دارد، زیرا:

پس انرژی دستگاه باید مثبت باشد:

$$\langle \Psi | p^2 | \Psi \rangle = \int \Psi^*(x) p^2 \Psi(x) dx$$

$$= \int [p^\dagger \Psi(x)]^* [p \Psi(x)] dx = \int [p \Psi(x)]^* [p \Psi(x)] dx$$

$$= \hbar^2 \int |d\Psi(x) / dx|^2 dx \geq 0$$

که طبق نوتراسیون فعلی ما می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\langle \Psi | p^2 | \Psi \rangle = \langle p^\dagger \Psi | p \Psi \rangle = \langle p \Psi | p \Psi \rangle \geq 0$$

طول بردار که همواره باید مثبت باشد

به طور مشابه چون X نیز هرمیتی است، پس:

$$\langle \Psi | x^2 | \Psi \rangle = \langle x^\dagger \Psi | x \Psi \rangle = \langle x \Psi | x \Psi \rangle \geq 0$$

طول بردار که همواره باید مثبت باشد

پس مقدار چمشداشتی H هم باید مثبت باشد:

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \frac{1}{2m} \langle \Psi | p^2 | \Psi \rangle + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle \Psi | x^2 | \Psi \rangle$$

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2m} \langle p \Psi | p \Psi \rangle + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle x \Psi | x \Psi \rangle \geq 0$$

طول بردار که همواره باید مثبت باشد

طول بردار که همواره باید مثبت باشد

خلاصه این که روند پایین آوردن ما باید یک حد پایین داشته باشد.

$$Au_0 = 0$$

به این انرژی، انرژی حالت پایه گویند، که آن را با نماد u_0 نمایش می دهیم:

$$Hu_0 = (\omega A^\dagger A + \frac{1}{2} \hbar \omega) u_0$$

$$= \omega A^\dagger A u_0 + \frac{1}{2} \hbar \omega u_0$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \hbar \omega u_0$$

$$= \frac{1}{2} \hbar \omega u_0$$

حال بیایید $[H, A^+] = \hbar \omega A^+$ را بر حالت پایه u_0 اعمال کنیم:

$$(HA^\dagger - A^\dagger H)u_0 = \hbar \omega A^\dagger u_0$$

$$HA^\dagger u_0 - A^\dagger E_0 u_0 = \hbar \omega A^\dagger u_0$$

$$HA^\dagger u_0 - 1/2 \hbar \omega A^\dagger u_0 = \hbar \omega A^\dagger u_0$$

$$H(A^\dagger u_0) = (\hbar \omega + 1/2 \hbar \omega) A^\dagger u_0$$

$$H((A^\dagger)^n u_0) = (n + 1/2) \hbar \omega (A^\dagger)^n u_0$$

پس انرژی به اندازه یک واحد $\hbar \omega$ افزایش یافته، و عملگر A^+ به طور مناسبی می تواند به عنوان یک عملگر بالا برنده (raising operator) توصیف شود.

حال نوتاسیونمان را اندکی تغییر می دهیم، یعنی، حالتها را با شماره واحدهای انرژی $\epsilon = \hbar\omega$ برچسب می زنیم (یعنی با n):

$$A^\dagger u_0 = c_1 u_1$$

$$A u_1 = c'_0 u_0$$

یعنی $A^\dagger$ بالا و A پایین می برند

$$A^\dagger (A^\dagger u_0) = c_2 u_2$$

همه حالتها را می توان با اعمال $A^\dagger$ بر u_0 تولید کرد:

.....

$$(A^\dagger)^n u_0 = c_n u_n$$

$$H(A^\dagger)^n u_0 = H c_n u_n$$

$$\hbar\omega(n + 1/2) = E_n$$

بنابراین ما موفق شدیم که ترازهای انرژی را بدون حل کردن یک معادله دیفرانسیل به دست آوریم.

$$\hbar\omega(n + 1/2)(A^\dagger)^n u_0 = c_n E_n u_n$$

همچنین بردارهای ویژه رانیز می توانیم به دست آوریم:

$$\hbar\omega(n + 1/2) \cancel{c_n} u_n = E_n \cancel{c_n} u_n$$

$$u_n = \frac{1}{c_n} (A^\dagger)^n u_0$$

$$|c_n|^2 \langle u_n | u_n \rangle = \langle u_0 | A^n (A^\dagger)^n | u_0 \rangle$$

$$|c_n|^2 = ?$$

$$|c_n|^2 = \langle u_0 | A^n (A^\dagger)^n | u_0 \rangle$$

$$|c_n|^2 = n! \hbar^n$$

پس کافی است که عبارت سمت راست رابطه فوق را حساب کنیم. برای این منظور به صورت زیر عمل می کنیم:

$$(A^\dagger)^n u_0 = c_n u_n$$

$$[A, A^\dagger] = \hbar$$

$$AA^\dagger = A^\dagger A + \hbar$$

$$c_n |u_n\rangle = (A^\dagger)^n |u_0\rangle$$

حال می خواهیم نشان دهیم که:

$$\langle u_n | c_n^* = \langle u_0 | A^n$$

$$A^n (A^\dagger)^n = A^{n-1} \left(n\hbar (A^\dagger)^{n-1} + (A^\dagger)^n A \right)$$

$\forall n = 1$

$$A^1(A^\dagger)^1 = A^0 \left(1\hbar(A^\dagger)^0 + (A^\dagger)^1 A \right)$$

$$AA^\dagger = \hbar + A^\dagger A$$



$\forall n = 2$

$$A^2(A^\dagger)^2 \stackrel{?}{=} A \left(2\hbar A^\dagger + (A^\dagger)^2 A \right)$$

=طرف چپ

$$AAA^\dagger A^\dagger = A(A^\dagger A + \hbar)A^\dagger$$

$$= AA^\dagger AA^\dagger + A\hbar A^\dagger$$

$$= AA^\dagger (A^\dagger A + \hbar) + A\hbar A^\dagger$$

$$= A(A^\dagger)^2 A + 2\hbar AA^\dagger$$

$$= A \left(2\hbar A^\dagger + (A^\dagger)^2 A \right)$$



حال فرض می کنیم که به ازای n درست باشد، و نشان می دهیم که به ازای $n+1$ نیز درست است:

$$\forall n = n$$

$$A^n (A^\dagger)^n = A^{n-1} \left(n\hbar (A^\dagger)^{n-1} + (A^\dagger)^n A \right)$$

فرض استقراء:

$$\forall n = n + 1$$

$$A^{n+1} (A^\dagger)^{n+1} \stackrel{?}{=} A^n \left((n+1)\hbar (A^\dagger)^n + (A^\dagger)^{n+1} A \right)$$

حکم:

=طرف چپ

$$A^{n+1} (A^\dagger)^{n+1} = A A^n (A^\dagger)^n A^\dagger$$

$$= A \left(A^{n-1} \left(n\hbar (A^\dagger)^{n-1} + (A^\dagger)^n A \right) \right) A^\dagger$$

$$= A^n \left(n\hbar (A^\dagger)^n + (A^\dagger)^n A A^\dagger \right)$$

$$= A^n \left(n\hbar (A^\dagger)^n + (A^\dagger)^n (A^\dagger A + \hbar) \right)$$

$$= A^n \left((n+1)\hbar (A^\dagger)^n + (A^\dagger)^{n+1} A \right)$$

= طرف راست



$$A^n (A^\dagger)^n = A^{n-1} \left(n\hbar (A^\dagger)^{n-1} + (A^\dagger)^n A \right)$$

خلاصه این
که:

$$u_n = \frac{1}{c_n} (A^\dagger)^n u_0$$

$$|c_n|^2 = \langle u_0 | A^n (A^\dagger)^n | u_0 \rangle$$

$$\langle u_0 | A^n (A^\dagger)^n | u_0 \rangle = \langle u_0 | A^{n-1} \left(n\hbar (A^\dagger)^{n-1} + (A^\dagger)^n A \right) | u_0 \rangle$$

پس جمله دوم عبارت طرف راست فوق صفر است،
لذا خواهیم داشت:

$$A | u_0 \rangle = 0$$

می دانیم
که:

$$\langle u_0 | A^n (A^\dagger)^n | u_0 \rangle = n\hbar \langle u_0 | A^{n-1} (A^\dagger)^{n-1} | u_0 \rangle$$

$$|c_n|^2 = n\hbar |c_{n-1}|^2$$

که می توان آن را ادامه
داد:

$$|c_n|^2 = n\hbar |c_{n-1}|^2 = n! \hbar^n$$

$$|c_n| = \sqrt{n! \hbar^n}$$

$$|c_n|^2 = n\hbar(n-1)\hbar |c_{n-2}|^2$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n! \hbar^n}} (A^\dagger)^n u_0$$

.....

$$|c_n|^2 = n! \hbar^n |c_0|^2$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{A^\dagger}{\sqrt{\hbar}} \right)^n u_0$$

اما $c_0=1$ می باشد. چرا؟ چون:

پس کافی است که u_0 را به دست آوریم.

$$(A^\dagger)^n u_0 = c_n u_n$$

اما این کار را اندکی به تعویق می اندازیم.

$$(A^\dagger)^0 u_0 = c_0 u_0$$

$$u_0 = c_0 u_0 \quad 1 = c_0$$



به همین ترتیب می توان ثابت کرد که (تمرین):

$$A^n (A^\dagger)^m = A^{n-1} \left(m\hbar (A^\dagger)^{m-1} + (A^\dagger)^m A \right)$$

$$A | u_0 \rangle = 0$$

چون:

جمله دوم طرف راست عبارت فوق برابر صفر است:

می توان جمله اول را نیز آنقدر ساده کرد تا متناسب با $A^\dagger$ شود:

اگر $n < m$ باشد آنگاه:

$$\langle u_0 | A^n (A^\dagger)^m | u_0 \rangle = \langle u_0 | A^{n-1} \left(m\hbar (A^\dagger)^{m-1} + 0 \right) | u_0 \rangle$$

$$\langle u_0 | A^n (A^\dagger)^m | u_0 \rangle = m\hbar \langle u_0 | A^{n-1} (A^\dagger)^{m-1} | u_0 \rangle$$

$$\langle u_0 | A^n (A^\dagger)^m | u_0 \rangle = nm\hbar \langle u_0 | (A^\dagger)^{m-n} | u_0 \rangle$$

$$\langle u_0 | A^\dagger \overset{D}{\longleftrightarrow} A | u_0 \rangle = 0 \Rightarrow \langle u_0 | A^\dagger = 0$$

$$\langle u_0 | A^n (A^\dagger)^m | u_0 \rangle = 0$$

$$\langle u_n | u_m \rangle = 0 \quad n < m$$

می توان جمله اول را نیز آنقدر ساده کرد تا متناسب با A شود:

اگر $n > m$ باشد آنگاه:

$$\langle u_0 | A^n (A^\dagger)^m | u_0 \rangle = \langle u_0 | A^{n-1} (m\hbar (A^\dagger)^{m-1} + 0) | u_0 \rangle$$

$$\langle u_0 | A^n (A^\dagger)^m | u_0 \rangle = m\hbar \langle u_0 | A^{n-1} (A^\dagger)^{m-1} | u_0 \rangle$$

$$\langle u_0 | A^n (A^\dagger)^m | u_0 \rangle = nm\hbar \langle u_0 | A^{n-m} | u_0 \rangle$$

$$A | u_0 \rangle = 0$$

$$\langle u_0 | A^n (A^\dagger)^m | u_0 \rangle = 0$$

$$\langle u_n | u_m \rangle = 0 \quad n > m$$

$$\langle u_n | u_m \rangle = 0 \quad n < m$$

$$\langle u_n | u_m \rangle = 0 \quad n > m$$

$$\langle u_n | u_m \rangle = 0; \quad m \neq n$$

پس شرط تعامد برآورده شد.

عبارتی که می توان هر بردار حالت دلخواه را بر حسب آن بسط داد اکنون به صورت زیر نوشته می شود:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |u_n\rangle$$

$$\langle u_m | \Psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \langle u_m | u_n \rangle$$

$$\langle u_m | \Psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \delta_{mn}$$

$$\langle u_m | \Psi \rangle = C_m$$

$$\langle u_n | \Psi \rangle = C_n$$

حال به ادامه کار خود یعنی تعیین ویژه حالت نوسانگر باز می گردیم:

ما u_n را به صورت زیر بر حسب u_0 به دست آوردیم.

پس کافی است که u_0 را به دست آوریم. برای به دست آوردن آن به نمایش در فضای x به ناچار روی می آوریم:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{A^\dagger}{\sqrt{\hbar}} \right)^n u_0$$

$$Au_0 = 0$$

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega}} \right) u_0 = 0$$

$$/. \sqrt{2m\omega}$$

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$$

$$\left(m\omega x + i\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) u_0 = 0$$

$$\left(m\omega x + \hbar \frac{d}{dx} \right) u_0 = 0$$

$$\left(m\omega x + \hbar \frac{d}{dx} \right) u_0 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C^2 e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} dx = 1$$

$$\frac{du_0}{dx} = -\frac{m\omega x}{\hbar} u_0$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x = u$$

$$\frac{du_0}{u_0} = -\frac{m\omega x}{\hbar} dx$$

$$C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} du = 1$$

$$u_0(x) = C e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$C^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{\pi} = 1$$

$$C = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0^2(x) dx = 1$$

$$u_0(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$u_n = \frac{1}{c_n} (A^\dagger)^n u_0$$

$$|c_n| = \sqrt{n! \hbar^n}$$

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$$

$$u_0(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(\frac{A^\dagger}{\hbar} \right)^n e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$A^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} x - i \frac{p}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} \right)^n e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

ما موفق شده ایم تا مساله نوسانگر هماهنگ را تنها با روش عملگری به طور کامل حل کنیم.

تنها چیزی که لازم داریم تا بتوانیم ویژه حالتها را تعیین کنیم n است. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\hbar\omega(n + 1/2) = E_n$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} \right)^n e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

پس اندیس n همه چیز را تعیین خواهد کرد

این فصل را با توصیف تحول زمانی یک دستگاه به روش مجرد معرفی شده یعنی روش که در آن به یک نمایش خاص وابسته نباشد به پایان می بریم.

بدین ترتیب تصویر هایزنبرگ در مقابل تصویر شرودینگر در نظر گرفته می شود، چون در تصویر هایزنبرگ تاکید بر روش عملگری است.

معادله وابسته به زمان شرودینگر را صورت یر می نویسیم:

$$i\hbar \frac{d\Psi(t)}{dt} = H\Psi(t)$$

که در آن x در آرگومان ویژه حالت وجود ندارد تا بر این نکته تاکید شود که بر فضای مکان تاکید نداریم و در یک فضای مجرد آن را نوشته ایم.

قبلا که در آرگومان x را قرار می دادیم، مختصه های x و t را از هم جدا می کردیم و برای این کار به یک ثابت E برای جدا سازی نیاز پیدا می کردیم که همان ویژه مقادیر بود.

در اینجا H عملگر باقی می ماند و با ویژه مقادیر E متفاوت است و ما با این شرایط مساله را حل می کنیم:

$$i\hbar \frac{d\Psi(t)}{dt} = H\Psi(t)$$

$$\Psi(t) = \exp(-iHt / \hbar) \Psi(0)$$

ویژه حالت در
زمان صفر

عملگر

$$\exp(-iHt / \hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iHt / \hbar)^n}{n!}$$

ویژه حالت معرفی شده به ما اجازه می دهد که تغییرات زمانی مقدار چمشداشتی عملگر A را که صریحا به زمان فرض می شود که بستگی ندارد را به دست می آوریم:

$$\langle A \rangle_t = \langle \Psi(t) | A | \Psi(t) \rangle$$

$$= \langle \Psi(0) | \left(\exp(-iHt / \hbar) \right)^\dagger A \exp(-iHt / \hbar) | \Psi(0) \rangle$$

$$= \langle \Psi(0) | \exp(iHt / \hbar) A \exp(-iHt / \hbar) | \Psi(0) \rangle$$

$$= \langle \Psi(0) | A(t) | \Psi(0) \rangle$$

$$= \langle A(t) \rangle_0$$

$$A(t) = \exp(iHt / \hbar) A \exp(-iHt / \hbar)$$

یعنی این که عملگر A که در تصویر شرودینگر به زمان بستگی نداشت و مقدار چمشداشتی آن تحت تابع موج وابسته به زمان به صورت زیر مورد علاقه بود:

$$\langle A \rangle_t = \langle \Psi(t) | A | \Psi(t) \rangle$$

به عملگری تبدیل شد که به طور صریح به زمان بستگی داشته باشد، یعنی $A(t)$ و مقدار چمشداشتی آن تحت تابع موج مستقل از زمان به صورت زیر حساب شود:

$$\langle A(t) \rangle_0 = \langle \Psi(0) | A(t) | \Psi(0) \rangle$$

در تصویر شرودینگر بردارهای پایه و عملگرهای سیستم تغییرات زمانی ندارند و ثابت هستند و آنچه نسبت به زمان تغییر می کند، تابع موج سیستم است.

$$\Psi(x, t) = \exp(-iEt / \hbar) u(x)$$

در تصویر هایزنبرگ بردارهای پایه و عملگرهای سیستم تغییرات زمانی دارند و ثابت هستند و آنچه نسبت به زمان تغییر نمی کند، تابع موج سیستم است.

$$\Psi(t) = \exp(-iHt / \hbar) \Psi(0)$$

$$A(t) = \exp(iHt / \hbar) A(0) \exp(-iHt / \hbar)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{iH}{\hbar} \exp(iHt / \hbar) A(0) \exp(-iHt / \hbar)$$

$$+ \exp(iHt / \hbar) A(0) \left(\frac{-iH}{\hbar} \right) \exp(-iHt / \hbar)$$

$$= + \frac{iH}{\hbar} A(t)$$

$$+ \exp(iHt / \hbar) A(0) \exp(-iHt / \hbar) \left(\frac{-iH}{\hbar} \right)$$

$$= + \frac{iH}{\hbar} A(t) - \frac{i}{\hbar} A(t) H = + \frac{i}{\hbar} [H, A(t)]$$

که همان معادله هایزنبرگ است که قبلا در تصویر شرودینگر آن را به دست آورده بودیم:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)]$$

با این تفاوت که دیگر مقدار چشمداشتی نداریم و این بر ماهیت عملگری تاکید بیشتری دارد.

در فصل شش جرقه اهمیت عملگر زده شد به این معنی که هنوز به تابع موج موقع نوشتن معادله هایزنبرگ در تصویر شرودینگر وابسته بودیم. ولی اکنون در خود تصویر هایزنبرگ دیگر نیازی به تابع موج نداریم و معادله هایزنبرگ مقدار چشمداشتی ندارد.

تصویر هایزنبرگ وقتی مفید است که بخواهیم یک مجموعه از ویژه بردارهای پایه متعامد در یک فضای مجرد برداری بنا کنیم و نگران آن نباشیم که این بردارهای پایه چطور با زمان تغییر می کنند.

این شبیه این است که:

(الف) تصویر شرودینگر: توصیف یک جسم دوار در یک دستگاه مختصات ثابت انجام شود.

(ب) تصویر هایزنبرگ: توصیف یک جسم دوار در یک دستگاه مختصات دوار انجام شود.

مثال: معادلات حرکت نوسانگر هماهنگ ساده را در تصویر هایزنبرگ به دست آورید.

$$H = \omega A^\dagger A + \frac{1}{2} \hbar \omega$$

چون H یک ثابت حرکت است، پس می توان تبدیلات زیر را بدون نگرانی انجام داد:

$$A \longrightarrow A(t)$$

$$A^\dagger \longrightarrow A^\dagger(t)$$

$$H = \omega A^\dagger(t) A(t) + \frac{1}{2} \hbar \omega$$

تمرین: با علم به این که روابط زیر وجود دارند:

$$[A, A^\dagger] = \hbar$$

$$A(t) = \exp(iHt / \hbar) A(0) \exp(-iHt / \hbar)$$

$$A^\dagger(t) = \exp(-iHt / \hbar) A(0) \exp(iHt / \hbar)$$

$$[A(t), A^\dagger(t)] = \hbar$$

ثابت کنید که بازهم:

$$[H, A] = -\hbar\omega A$$

$$[H, A^\dagger] = \hbar\omega A^\dagger$$

به همین ترتیب از معادلات:

$$[H, A(t)] = -\hbar\omega A(t)$$

$$[H, A^\dagger(t)] = \hbar\omega A^\dagger(t)$$

هم به راحتی می
توان نتیجه گرفت که:

بنابراین از معادله هایزنبرگ خواهیم داشت که:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{dA(t)}{dt} = [H, A(t)] = -\hbar\omega A(t)$$



$$\frac{dA(t)}{dt} = -i\omega A(t)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{dA^\dagger(t)}{dt} = [H, A^\dagger(t)] = \hbar\omega A^\dagger(t)$$



$$\frac{dA^\dagger(t)}{dt} = i\omega A^\dagger(t)$$

$$A(t) = A(0) \exp(-i\omega t)$$

$$A^\dagger(t) = A^\dagger(0) \exp(i\omega t)$$



از طرفی داشتیم که:

$$A(0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}x + i \frac{p}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$A^{\dagger}(0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}x - i \frac{p}{\sqrt{2m\omega}}$$

با استفاده از روابط فوق و روابط زیر

$$A(t) = A(0) \exp(-i\omega t)$$

$$A^{\dagger}(t) = A^{\dagger}(0) \exp(i\omega t)$$

نشان دهید که:

$$p(t) = p(0) \cos \omega t - m\omega x(0) \sin \omega t$$

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{p(0)}{m\omega} \sin \omega t$$

$$A(t) = A(0) \exp(-i\omega t)$$

$$A(0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} x + i \frac{p}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2}} x(t) + i \frac{p(t)}{\sqrt{2m\omega}} = \exp(-i\omega t) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}} x(0) + i \frac{p(0)}{\sqrt{2m\omega}} \right)$$

$$A^\dagger(0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} x - i \frac{p}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$A^\dagger(t) = A^\dagger(0) \exp(i\omega t)$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2}} x(t) - i \frac{p(t)}{\sqrt{2m\omega}} = \exp(i\omega t) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}} x(0) - i \frac{p(0)}{\sqrt{2m\omega}} \right)$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x(t) + i\frac{p(t)}{\sqrt{2m\omega}} = \exp(-i\omega t) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x(0) + i\frac{p(0)}{\sqrt{2m\omega}} \right)$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x(t) - i\frac{p(t)}{\sqrt{2m\omega}} = \exp(i\omega t) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x(0) - i\frac{p(0)}{\sqrt{2m\omega}} \right)$$

+

$$2\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x(t) = 2\cos\omega t\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x(0) - 2i\sin\omega t\frac{ip(0)}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x(t) + i\frac{p(t)}{\sqrt{2m\omega}} = \exp(-i\omega t) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x(0) + i\frac{p(0)}{\sqrt{2m\omega}} \right)$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x(t) - i\frac{p(t)}{\sqrt{2m\omega}} = \exp(i\omega t) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x(0) - i\frac{p(0)}{\sqrt{2m\omega}} \right)$$



$$\frac{2ip(t)}{\sqrt{2m\omega}} = -2\sin\omega t \sqrt{\frac{m\omega}{2}}x(0) + 2i\cos\omega t \frac{ip(0)}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$p(t) = p(0)\cos\omega t - m\omega x(0)\sin\omega t$$