



روشهای اندازه گیری سطح فرمی

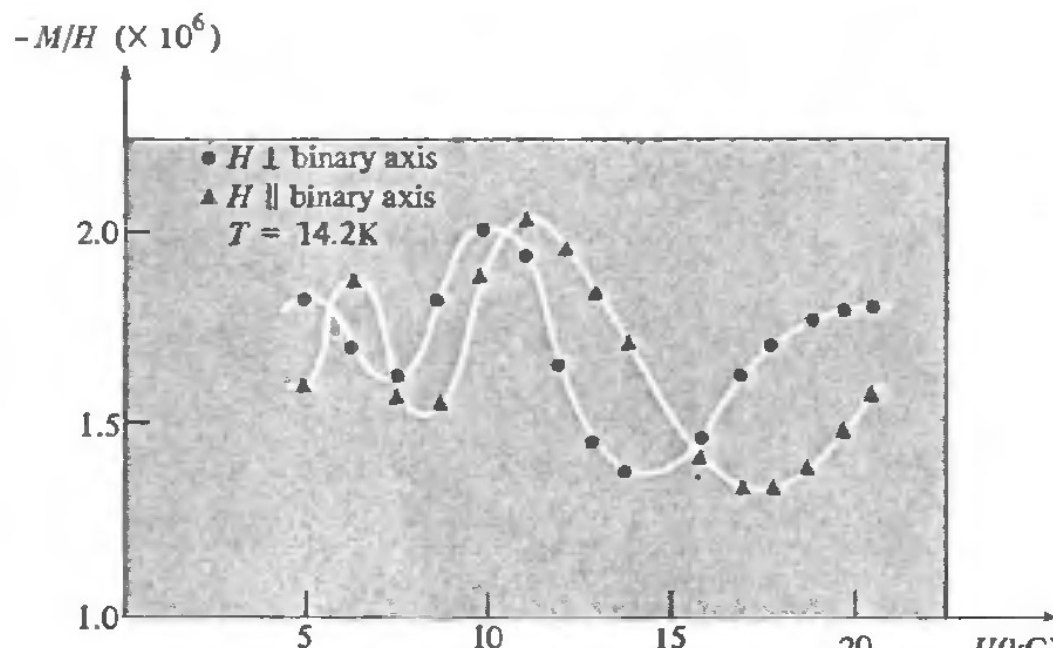
De Haas–van Alphen effect

اثر دی هاس – وان آلفن



PM van Alphen (1906-1967)

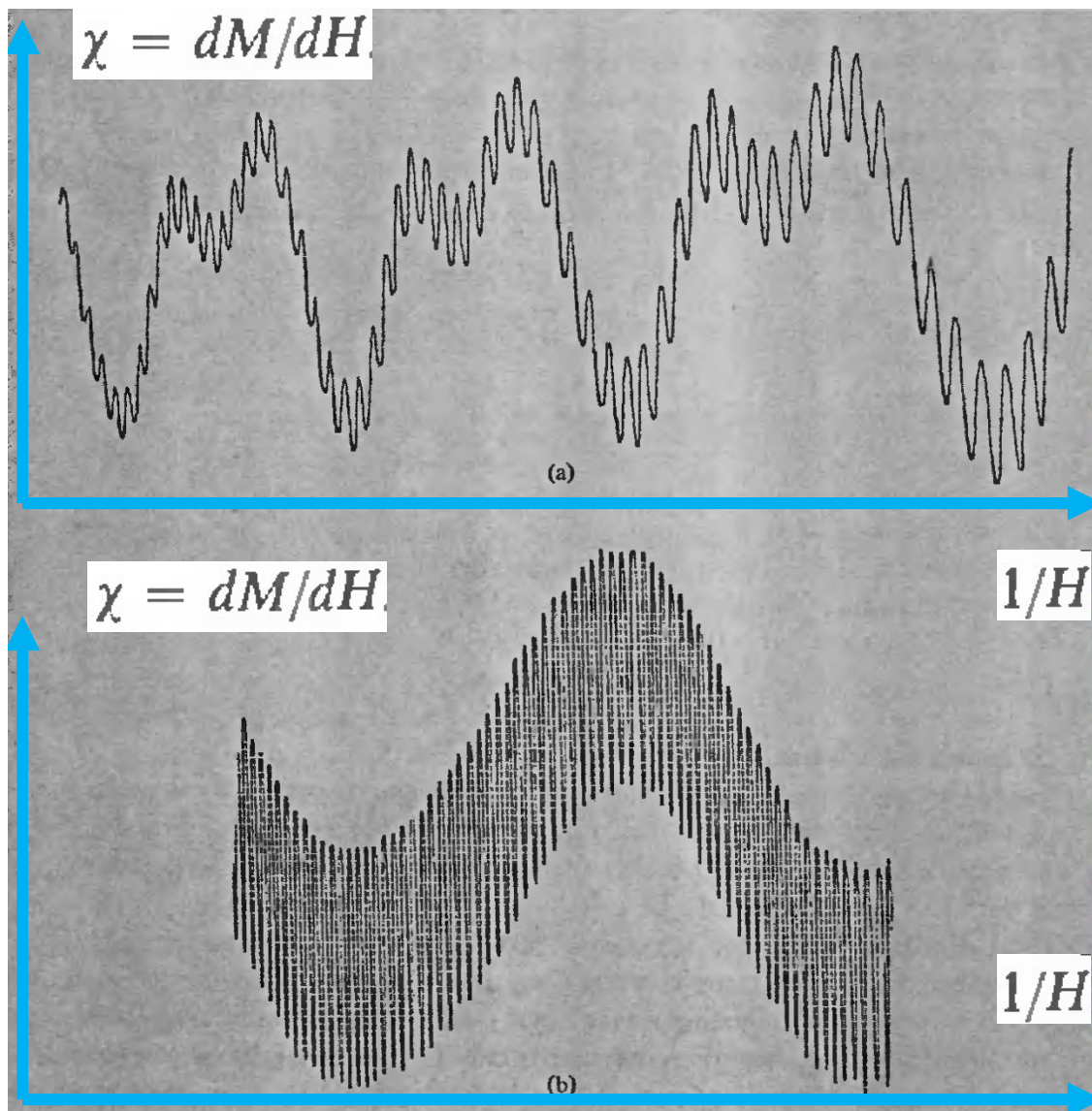
WJ de Haas (1878-1960)



The data of de Haas and van Alphen. Magnetization per gram divided by field, plotted vs. field for two orientations of a crystal of bismuth, at 14.2 K. (W. J. de Haas and P. M. van Alphen, *Leiden Comm.* 208d, 212a (1930), and 220d (1932).)

در سال 1930 دو نفر به نامهای دی هاس و وان آلفن یک بلور بیسموت را انتخاب کردند و آن را در یک میدان مغناطیسی قرار دادند.

به این پدیده اثر دی هاس و وان آلفن گویند



De Haas-van Alphen oscillations in (a) rhenium and (b) silver. (Courtesy of A. S. Joseph.)

تکامل یافته اثر دی هاس ون آلفن

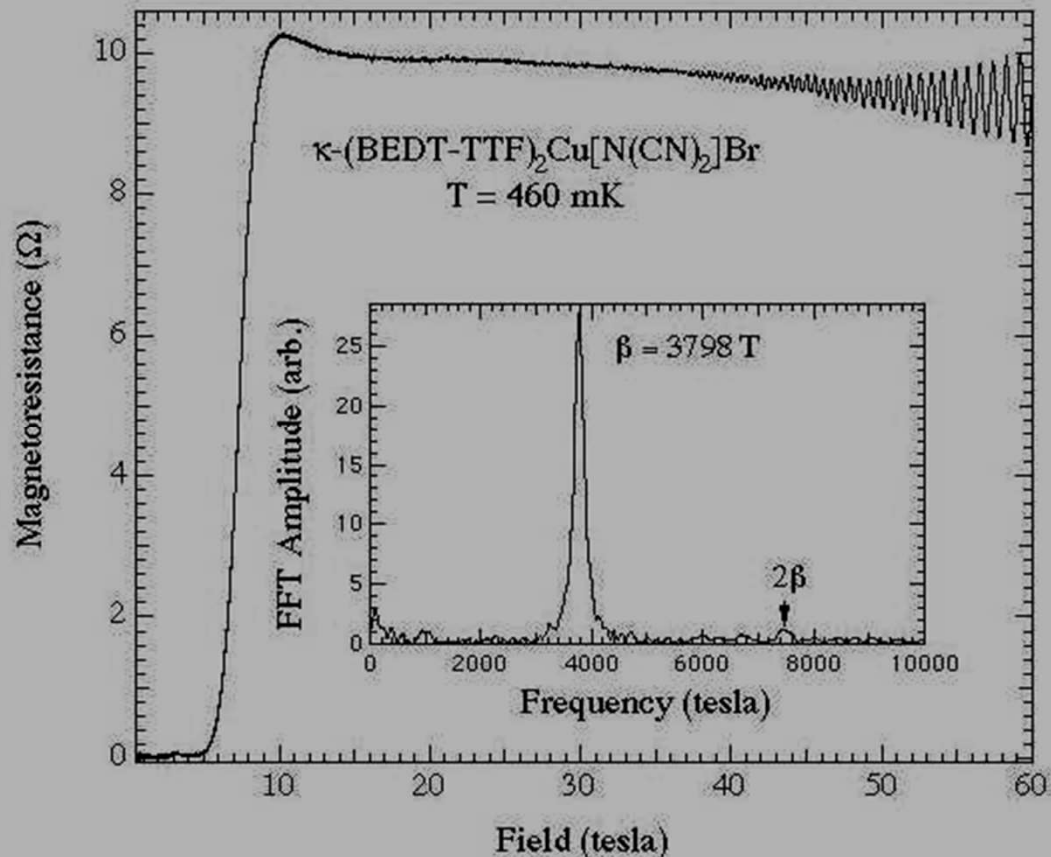
ویژگیهای مشترک تعیین سطح فرمی همه آزمایشها:

الف) بلور خالص را در ب) دمای پایین در یک میدان مغناطیسی قرار می دهیم

علت خالص بودن آن است که مسیر الکترون به گونه ای باشد که تحت میدان اعمال شده بدون برخورد مسیر را طی کند

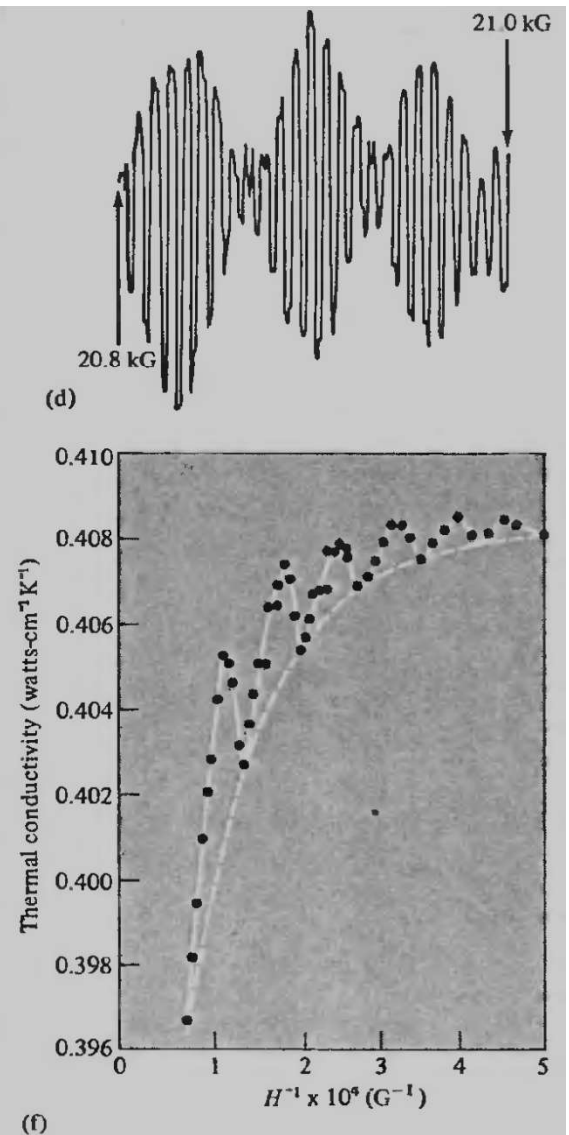
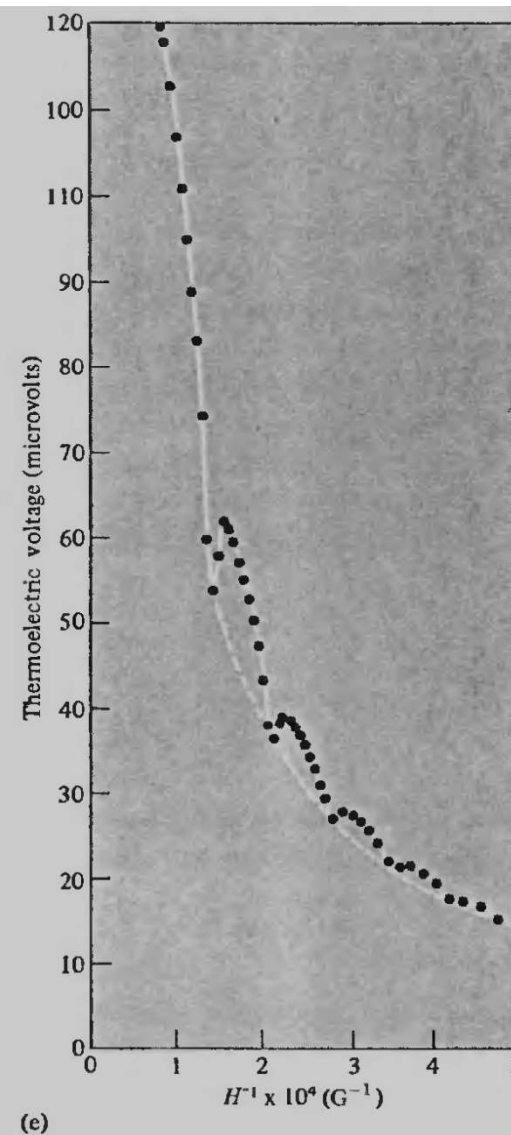
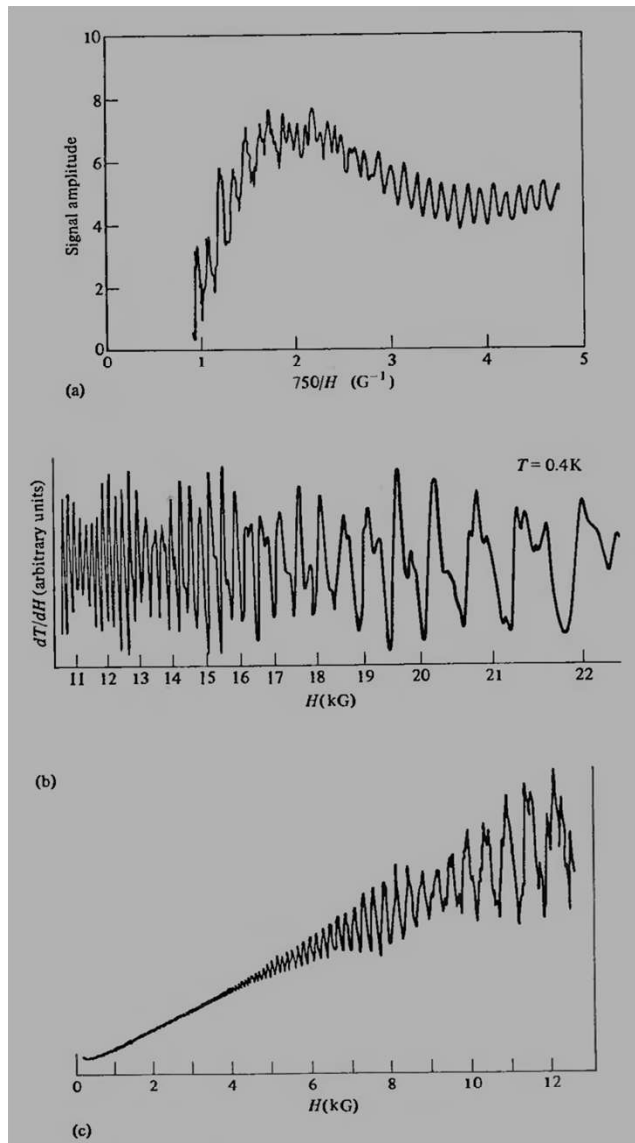
دمای پایین نیز به این دلیل است که از برخورد با فونونها جلوگیری شود

نوسانات مشابه در هدایت الکتریکی و مقاومت مغناطیسی اثر شابنی کوف دی هاس نام دارد.



Lev Vasilyevich Shubnikov
(Sep. 9, 1901— Nov. 10, 1937)

بعدها دریافتند که کمیت‌های دیگر نیز از جمله ضریب هال برحسب عکس میدان نوسانات مشابهی را از خود نشان می‌دهند.



(d) Oscillations accompanying the Peltier effect in zinc. (e) Thermoelectric voltage of bismuth at 1.6 K. (f) Thermal conductivity of bismuth at 1.6 K. (Sources: (a), (b), (c)—*Proc. 9th Internat. Conf. on Low Temperature Physics*, J. G. Daunt et al., eds., Plenum Press, New York, 1965. (d)—H. J. Trodahl and F. J. Blatt, *Phys. Rev.* **180**, 709 (1969). (e), (f)—M. C. Steele and J. Babiskin, *Phys. Rev.* **98**, 359 (1955).)

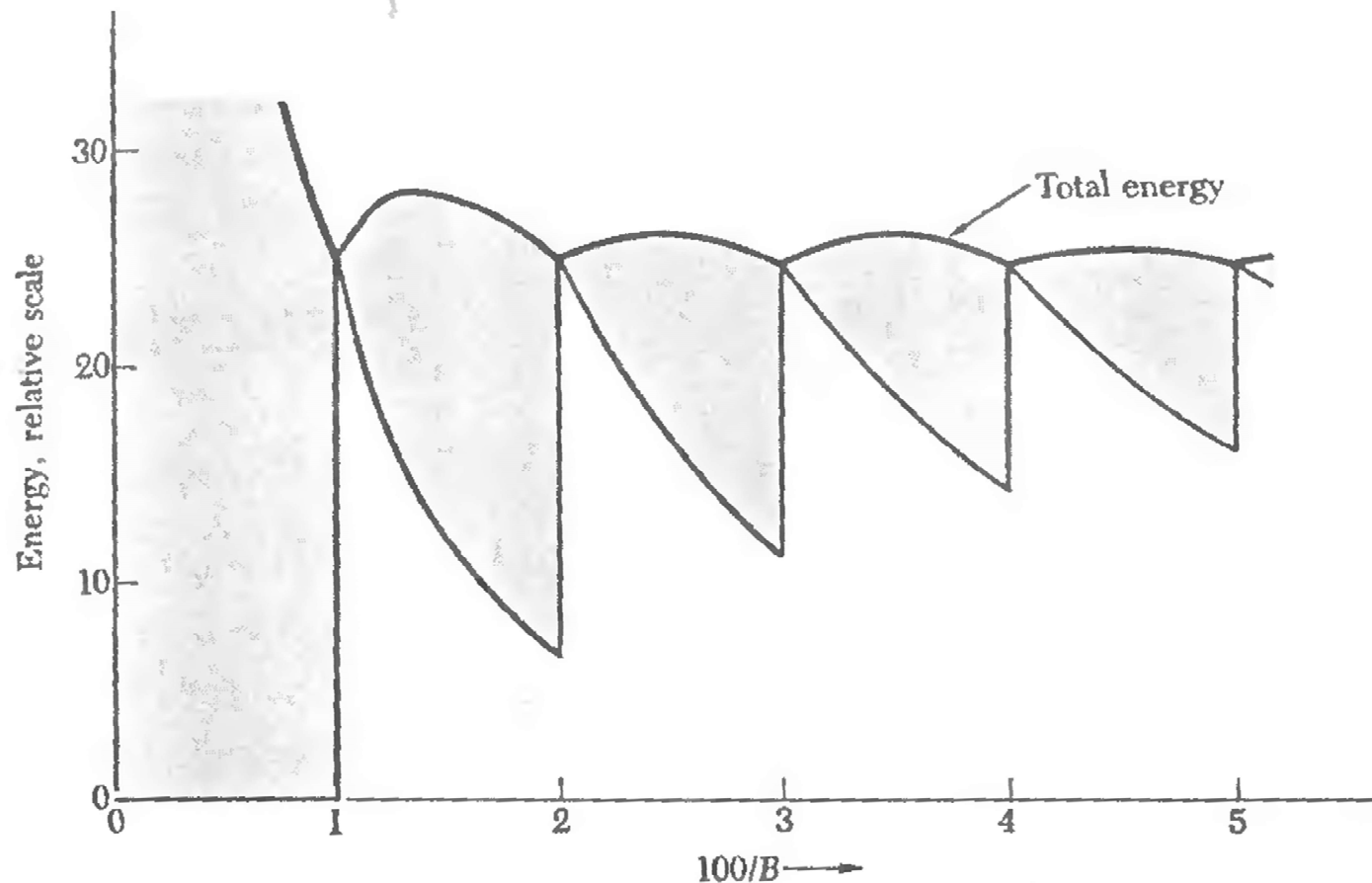
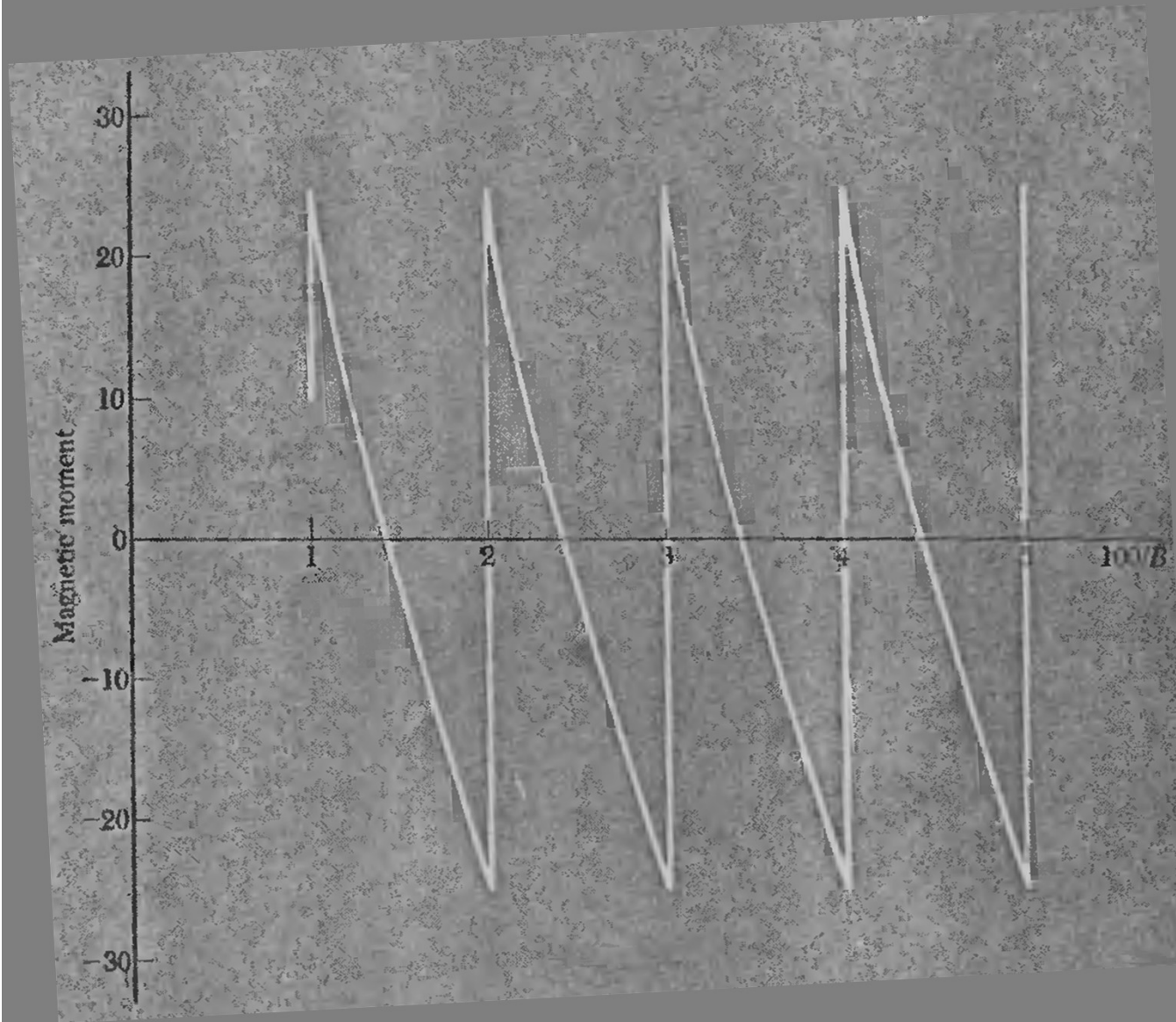


Figure 26 The upper curve is the total electronic energy versus $1/B$. The oscillations in the energy U may be detected by measurement of the magnetic moment, given by $-\partial U/\partial B$. The thermal and transport properties of the metal also oscillate as successive orbital levels cut through the Fermi level when the field is increased. The shaded region in the figure gives the contribution to the energy from levels that are only partly filled. The parameters for the figure are the same as for Fig. 25, and we have taken the units of B such that $B = \hbar\omega_c$.



At absolute zero the magnetic moment is given by $-\partial U / \partial B$. The energy plotted in the last Fig. leads to the magnetic moment shown here, an oscillatory function of $1/B$. In impure specimens the oscillations are smudged out in part because the energy levels are no longer sharply defined.

حال دو سوال مطرح است:

الف) منشاء فیزیکی این اثر چیست؟

قبل از بررسی دو سوال فوق ابتدا کوانتش مدار یک ذره باردار در میدان مغناطیسی را مطالعه می کنیم.

ب) ارتباط این اثر با شکل سطح فرمی چیست؟

کوانتش مدار یک ذره باردار در میدان مغناطیسی اولین بار توسط اونزاگر و لاندau مورد مطالعه قرار گرفته است.



Lars Onsager (1903- 1976)



Lev Davidovich Landau (1908-1968)

کوانتشی یک ذره باردار در میدان مغناطیسی

$$\mathbf{P} = \hbar \mathbf{k} + q \mathbf{A}$$

پتانسیل
برداری

الف) روش اول: روش نیمه کوانتمی

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

مدار ذره باردار در میدان مغناطیسی
کوانتیزه است

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = (n + \gamma) 2\pi \hbar$$

عدد
صحیح

$\frac{1}{2}$ برای الکترون آزاد

$$\oint (\hbar \mathbf{k} + q \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r} = (n + \gamma) 2\pi \hbar$$

$$\oint \hbar \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} + \oint q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (n + \gamma) 2\pi \hbar$$

$$\mathbf{F} = \hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = q \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}$$

نیروی
لورنتس

$$\int \hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} dt = q \left[\int \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \right] \times \mathbf{B}$$

$$\hbar \mathbf{k} = q \mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

$$\oint \hbar \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = q \oint \mathbf{r} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})$$

$$\oint \hbar \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = -q \mathbf{B} \cdot \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2 \times$$

مساحتی که توسط مدار محصور شده است

$$\oint \hbar \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} + \oint q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (n + \gamma) 2\pi \hbar$$

پس جمله اول رابطه فوق را می توان به صورت زیر نوشت

$$\oint \hbar \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = -q \mathbf{B} \cdot \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = -2q \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = -2q \Phi$$

فلوی مغناطیسی
گذرنده از سطح

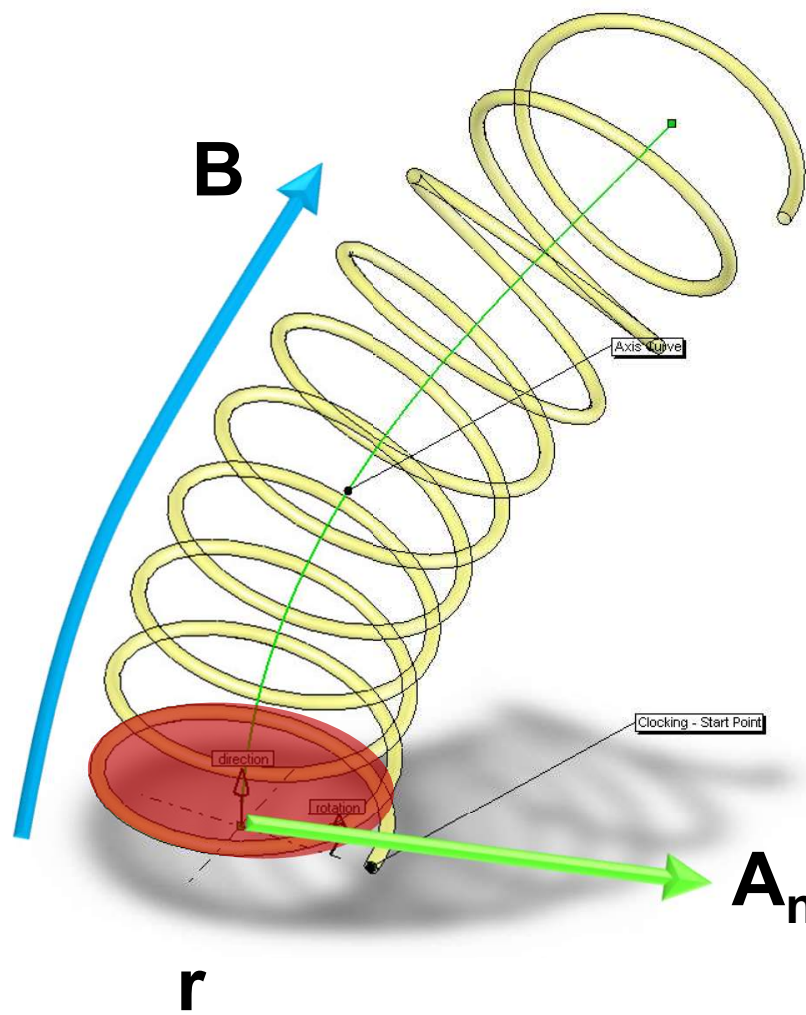
جمله دوم را نیز می توان با استفاده از قضیه استوکس به صورت زیر نوشت

$$\oint q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = q \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = q \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = q \Phi$$

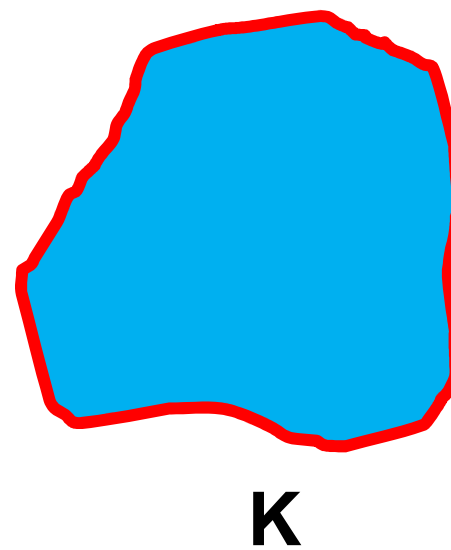


$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = -2q \Phi + q \Phi = -q \Phi = (n + \gamma) 2\pi \hbar$$

$$\Phi_n = \frac{(n + \gamma) 2\pi \hbar}{e}$$



$$\Phi_n = B A_n$$



$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = q \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}$$

اگر $\Delta \mathbf{r}$ را عمود بر $\mathbf{B}$ در مدار واقع در فضای $\mathbf{r}$ انتخاب کنیم، آنگاه

$$\hbar \Delta k = q \Delta r B$$

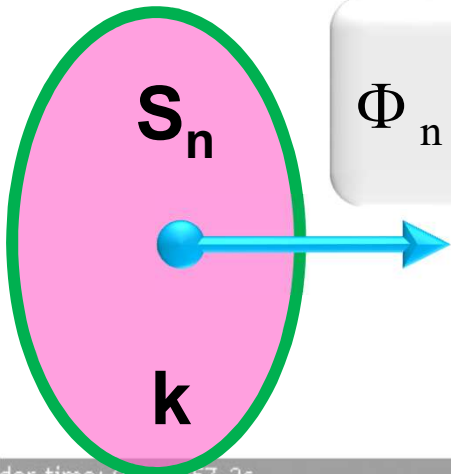
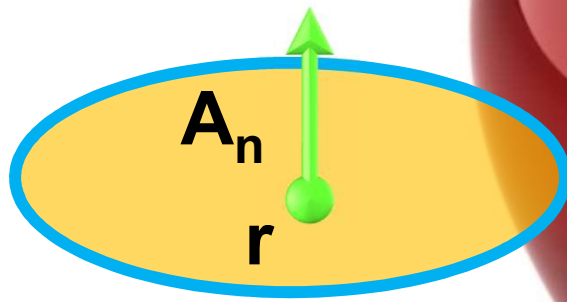
$$\Delta k = \frac{qB}{\hbar} \Delta r$$

$$S_n = \left(\frac{qB}{\hbar} \right)^2 A_n$$

پس شکل مدار در فضای $\mathbf{k}$ همان شکل مسیر در فضای $\mathbf{r}$ است، با این تفاوت که:

از نظر اندازه فرق می کند و نود درجه نسبت به آن چرخیده است

رابطه اونزاگر و لاندائو



$$\Phi_n = B A_n = B \left(\frac{\hbar}{eB} \right)^2 S_n$$

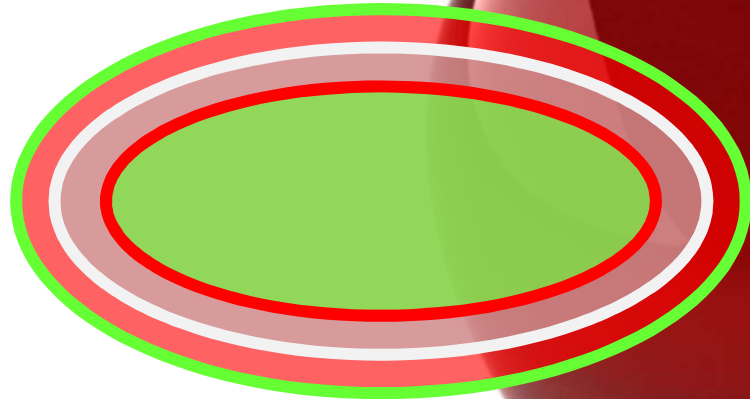
$$S_n = \frac{(n + \gamma) 2\pi e}{\hbar} B$$

$$\Phi_n = \left(\frac{\hbar}{e} \right)^2 \frac{1}{B} S_n = \frac{(n + \gamma) 2\pi \hbar}{e}$$

$$S_n = \frac{(n + \gamma) 2\pi e}{\hbar} B$$

$$S_n = (n + \gamma) \Delta S_n$$

$$S_{n+1} - S_n = \Delta S_n = \frac{2\pi e}{\hbar} B$$



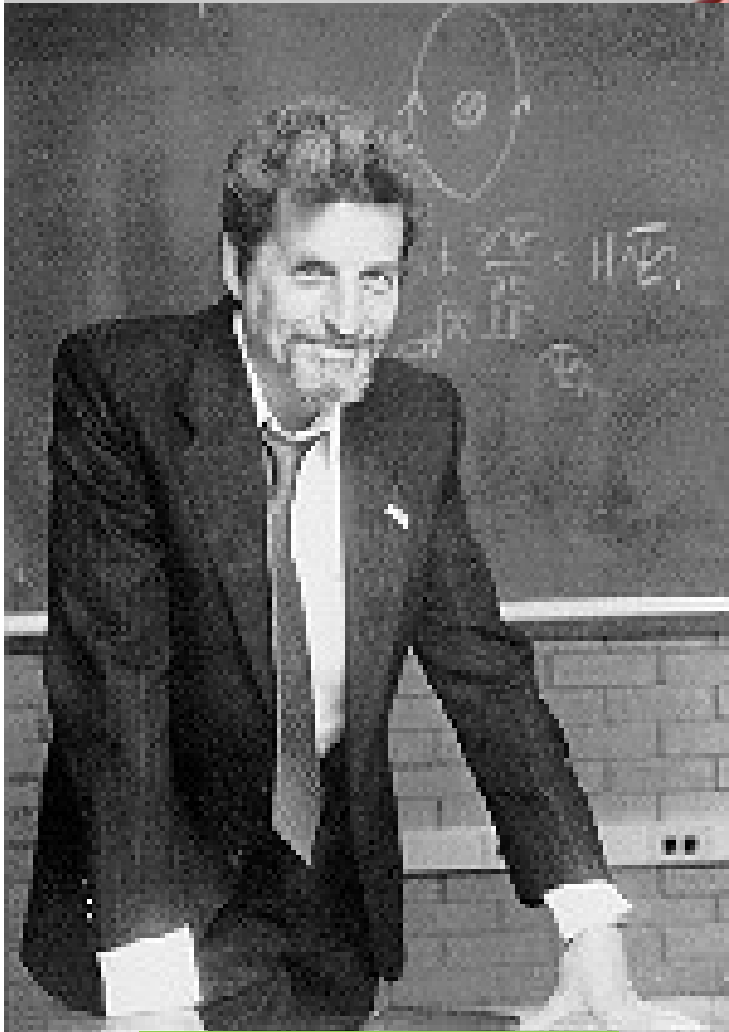
r



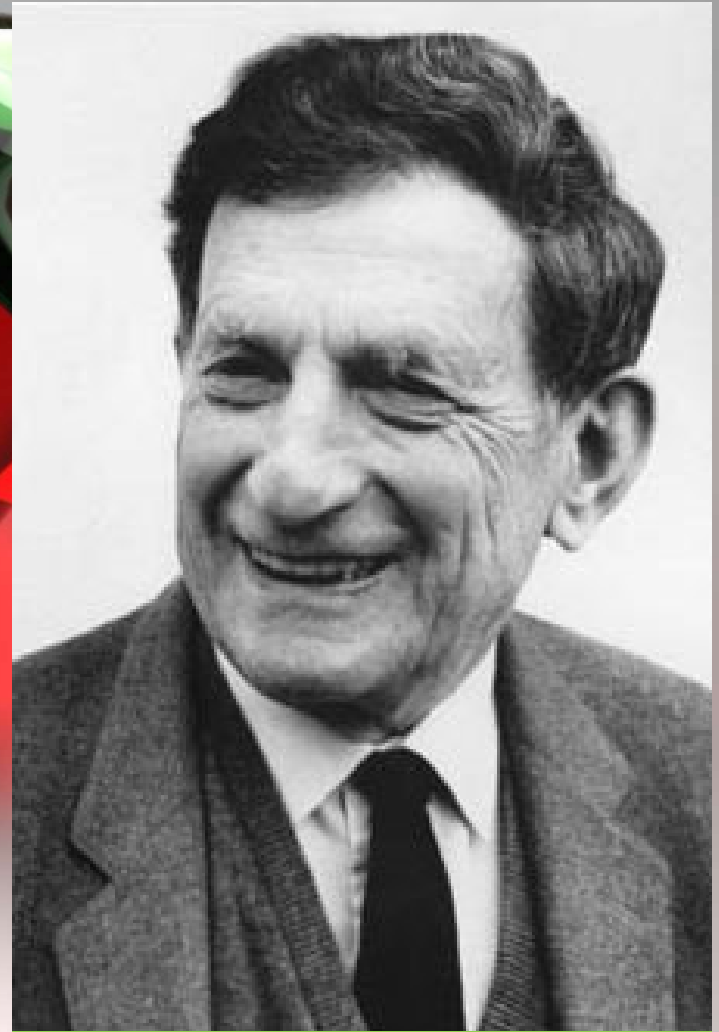
k

کوانتشی یک ذره باردار در میدان مغناطیسی

(ب) روش دوم: روش کوانتشی



der time: Of **YAKIR AHARONOV**



David Joseph Bohm (1917-1992)

به نظر می رسد که تبدیل زیر اصل ناوردایی پیمانه ای را نقض می کند، زیرا پتانسیل برداری در معادله شرودینگر ظاهر شده است و بنابراین هامیلتونی دستگاه که تحت تبدیل پیمانه ای زیر

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla f(\mathbf{r}, t)$$

به صورت زیر تبدیل می شود

$$\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 \xrightarrow{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f} \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} \nabla f(\mathbf{r}, t) \right]^2$$

دیگر ناوردا باقی نمی ماند.

اما هنوز این امکان وجود دارد که ناوردایی پیمانه ای را حفظ کنیم.

برای حفظ ناوردایی پیمانه ای چنین استدلال می کنیم که یک تغییر تابع موج به اندازه یک عامل فاز نتیجه یا تغییر فیزیکی عمده ای در پاسخ نهایی ایجاد نخواهد کرد.

عامل فاز فوق حتی می تواند به r هم بستگی داشته باشد.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla f(\mathbf{r}, t)$$

بنابراین اگر هنگام تبدیل پیمانه ای:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow e^{i\Lambda(\mathbf{r}, t)} \Psi(\mathbf{r}, t)$$

تابع موج نیز تبدیل شود:

آنگاه طرف چپ معادله شرودینگر به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{e}{c} \nabla f \right] \cdot \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{e}{c} \nabla f \right] e^{i\Lambda} \Psi$$

$$= \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{e}{c} \nabla f \right] \cdot \left[e^{i\Lambda} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \Psi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \Psi + \frac{e}{c} \nabla f \Psi + \hbar \nabla \Lambda \Psi \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\mu} e^{i\Lambda} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{e}{c} \nabla f + \hbar \nabla \Lambda \right]^2 \Psi$$

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) = -\frac{e}{\hbar c} f(\mathbf{r}, t)$$

پس برای ناوردا نگاه داشتن هامیلتونی کافی است که انتخاب زیر را انجام دهیم:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c} f(\mathbf{r}, t)} \Psi(\mathbf{r}, t)$$

انتخاب فوق معادل تبدیل زیر است:

$$\frac{1}{2\mu} e^{i\Lambda} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} + \cancel{\frac{e}{c} \nabla f} + \cancel{\hbar \nabla \Lambda} \right]^2 \Psi$$

چون در این صورت جملات سوم و چهارم موجود در طرف چپ هامیلتونی یکدیگر را حذف خواهند کرد:

$$= \frac{1}{2\mu} e^{i\Lambda} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right]^2 \Psi$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{A} = \nabla f$$

در یک ناحیه تهی از میدان که ایجاب می کند:

پتانسیل برداری را می توان به صورت گرادیان یک تابع اسکالر نوشت:

بنابراین در یک ناحیه تهی از میدان ما حرکت الکترون را می توانیم به دو روش توصیف کنیم:

الف) یا این که حضور میدان مغناطیسی را کلا در نظر بگیریم و بنویسیم:

$$\left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 + V(\mathbf{r}) \right] \Psi = E \Psi$$

و این معادله شرودینگر را حل کنیم

ب) یا این که معادله شرودینگر را با پتانسیل برداری به صورت زیر بنویسیم:

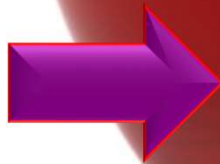
$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi' + V(\mathbf{r}) \Psi' = E \Psi'$$

$$\Psi' = e^{-\frac{ie}{\hbar c} f} \Psi$$

و فرض کنیم
که:

تابع f را می توان بر حسب $\mathbf{A}$ با حل معادله زیر به صورت انتگرالی نوشت:

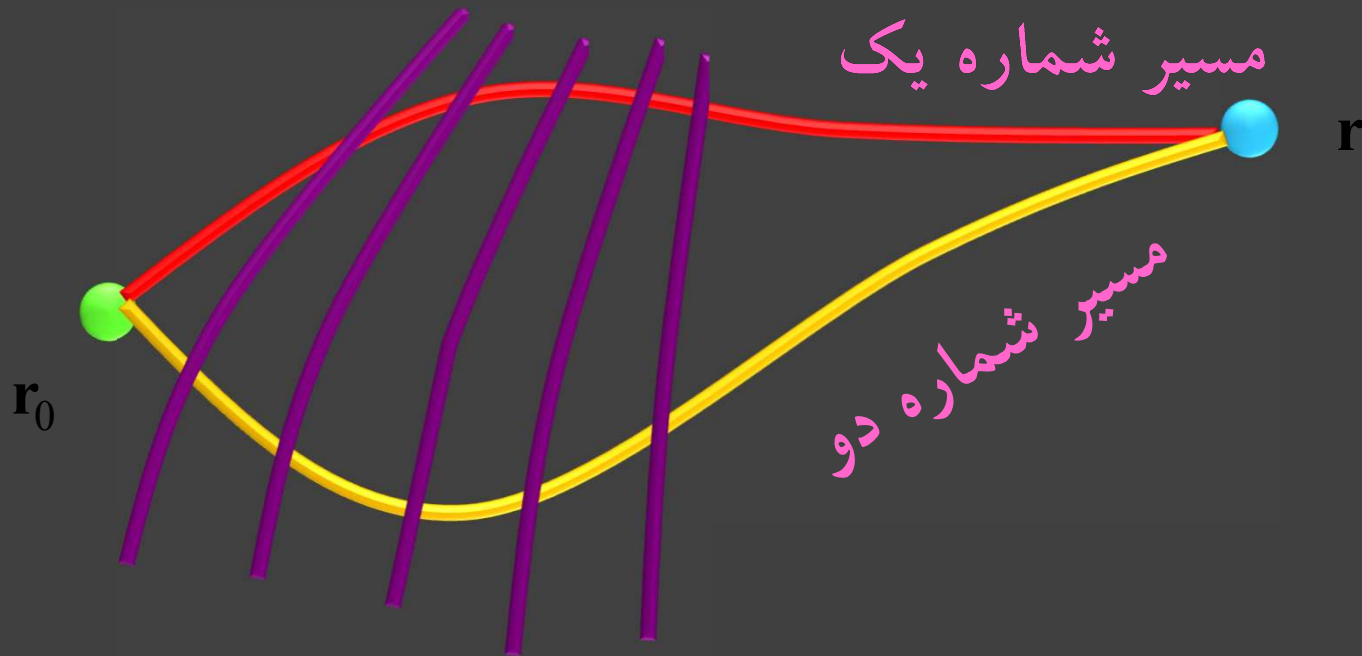
$$\mathbf{A} = \nabla f$$



$$f(\mathbf{r}, t) = \int^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t)$$

که در آن مسیر انتگرال گیری از یک نقطه ثابت دلخواه مانند صفر (مبداء) یا بینهایت تا نقطه $\mathbf{r}$ به طور دلخواه انتخاب شده است.

انتگرال فوق فقط اگر $\mathbf{B} = 0$ باشد دارای معنی است زیرا تفاوت انتگرال در امتداد دو مسیر متفاوت 1 و 2 عبارت است از:



$$f(\mathbf{r}, t) = \int_1 d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) + \int_2 d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \oint d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t)$$

$$= \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi = \text{Magnetic Field Flux}$$

که در آن از قضیه استوکس استفاده شده است و Φ فلوی مغناطیسی از سطحی است که بر روی دو مسیر 1 و 2 بنا شده است.

بنابراین تنها اگر ϕ صفر باشد آنگاه عامل فاز $\exp(-ie/(\hbar c))f$ مستقل از مسیر خواهد شد.

چنین استقلال از مسیر ضروری است اگر اسرار داشته باشیم که تابع موج تک مقداره باشد.

پس اگر $B=0$ باشد آنگاه استقلال از مسیر وجود خواهد داشت.

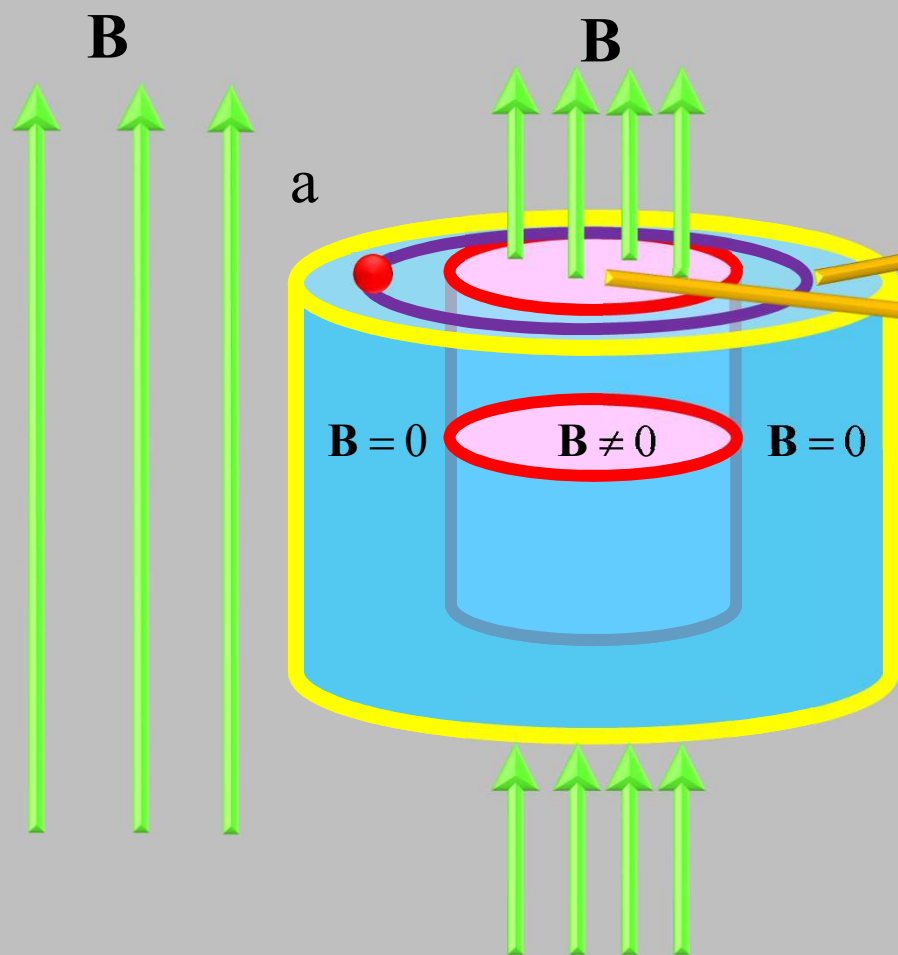
اگر ϕ مخالف صفر باشد یعنی مسیرهای انتخاب شده شامل یک فلو باشد، آنگاه توابع موج الکترونها در حال حرکت در طول دو مسیر فازهای متفاوتی خواهند داشت.

یک نتیجه جالب این است که اگر یک الکترون در یک ناحیه تهی از میدان حرکت کند (که البته نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر خیلی راحت به هم وصل نشده باشند بلکه یک حفره شامل فلوی غیر صفر را احاطه کنند) آنگاه وقتی که یک مدار بسته را طی می کند و به نقطه اول خود باز می گردد تابع موج آن به حالت اول باز نمی گردد بلکه به اندازه فاز زیر در آنها اختلاف فاز ظاهر خواهد شد:

$$\exp\left(\frac{ie\Phi}{\hbar c}\right)$$

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar c}{e} n$$

شرط تک مقداره بودن تابع موج که هم ارز یک شدن ضرب فاز است ایجاب می کند که فلوی در برگرفته شده کوانتیزه باشد.



مدار حرکت
الکترون در ناحیه
خالی از میدان

حفره

میدان مغناطیسی که فقط اجازه
حضور در درون حفره و خارج
از استوانه خارجی را دارد
مقدار آن در ناحیه توپر استوانه
صفر باید باشد.

در مسیر حرکت
الکترون:

خلاصه این
که:

$$\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{A} = \nabla f$$

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_a^a d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \oint d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t)$$

$$= \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi \neq 0$$

$$\Psi' = e^{-\frac{ie}{\hbar c} f} \Psi = e^{-\frac{ie}{\hbar c} \Phi} \Psi$$

می توان از معادله شرودینگر در
غیاب میدان مساله را حل کرد

B در مسیر حرکت الکترون صفر است

از طرفی می توان مساله را با معادله شرودینگر در
حضور میدان نیز حل کرد که نتیجه آن Ψ است.

Ψ باید تک مقداره باشد

هنوز باید مساله حتی با حل در حضور میدان تک مقداره باشد زیرا واقعا $\mathbf{B}=0$ است.

پس از تک مقداره بودن نتیجه می
گیریم که:

$$\Psi' = e^{-\frac{ie}{\hbar c}\Phi} \Psi$$

$$e^{-\frac{ie}{\hbar c}\Phi} = 1$$

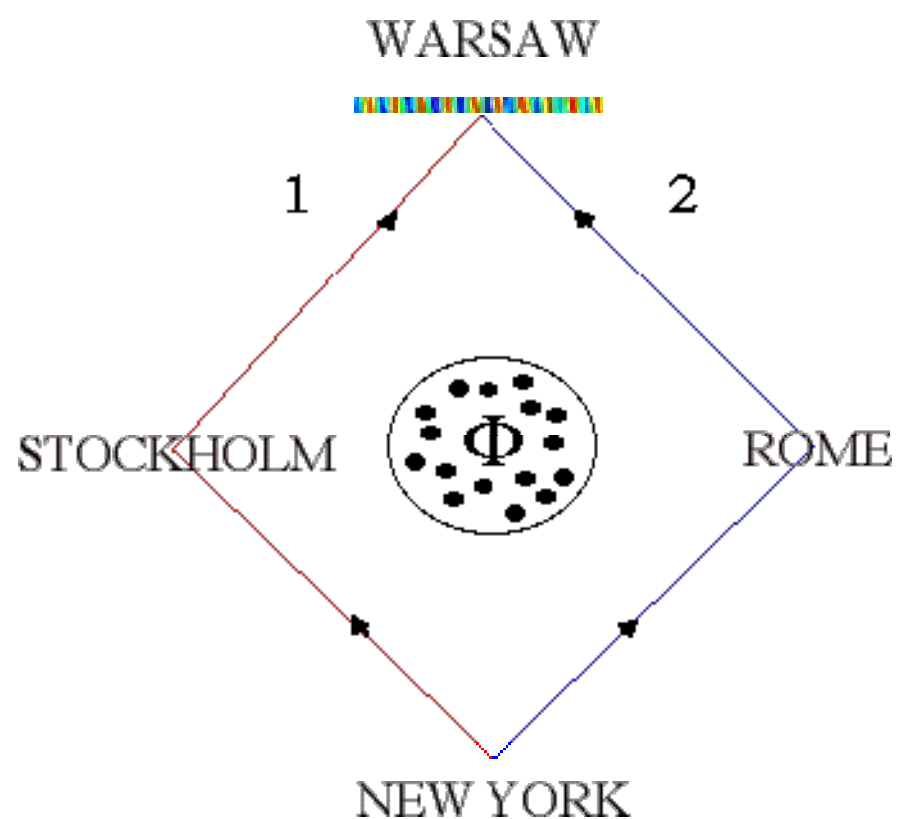
$$e^{-\frac{ie}{\hbar c}\Phi} = e^{-2n\pi i}$$

$$\frac{e}{\hbar c}\Phi = 2n\pi$$

$$\Phi_n = \frac{2\pi\hbar c}{e}n; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar c}{e}n$$

AHARONOV-BOHM EFFECT



$$\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2 = \frac{e}{\hbar} \Phi$$

چنین وضعیتی در حرکت الکترونها در یک حلقه ابرسانا که ناحیه ای شامل یک فلوی مغناطیسی را دربر دارد به وقوع می پیوندد.

آزمایشات اولیه در سال 1961 بر اساس طرح زیر انجام شد:

یک حلقه ساخته شده از یک ابرسانا، در یک میدان مغناطیسی قرار داده شد.

دما در ابتدا بالاتر از دمای بحرانی بود.

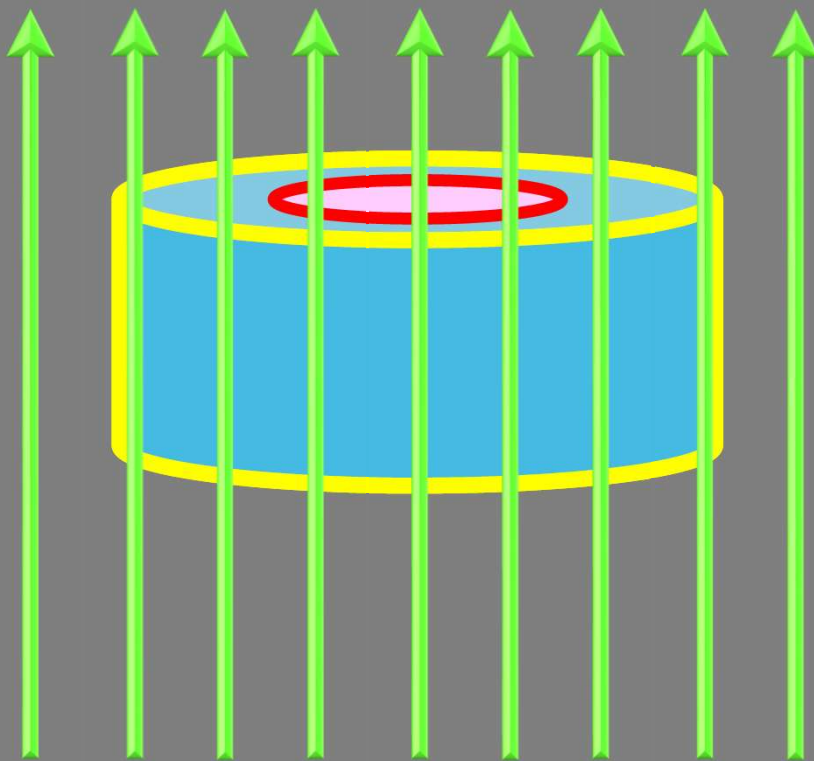
دمای بحرانی دمایی است که خاصیت ابرسانایی زیر آن دما بروز پیدا می کند.

ابرسانا ها خطوط میدان مغناطیسی را قطع نمی کنند.

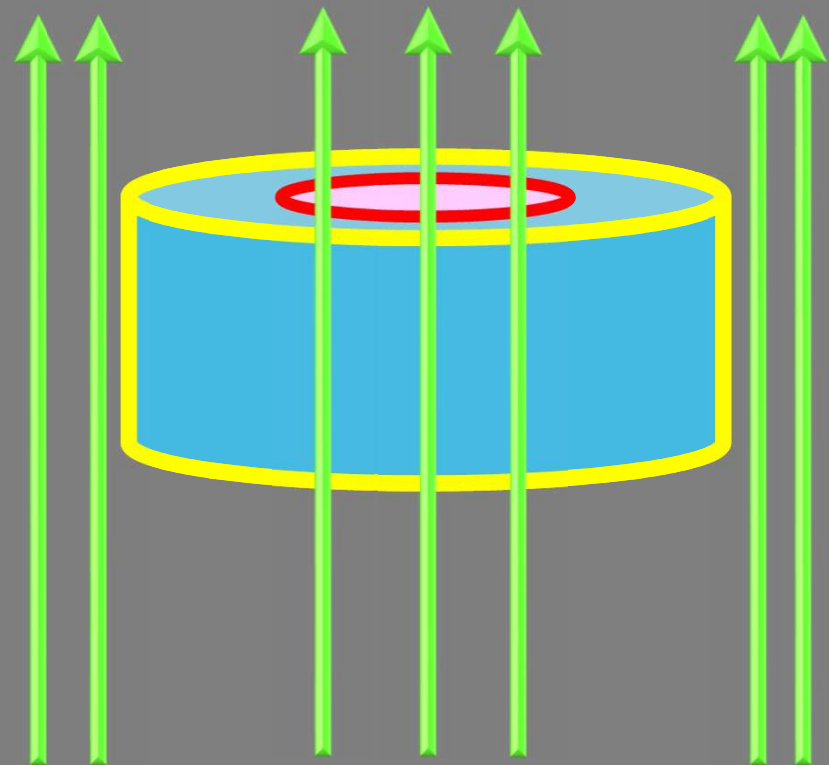
این اثر را اثر مایسنر
گویند:

وقتی که حلقه تا زیر دمای بحرانی سرد شود، آنگاه به ابررسانا
تبدیل می شود.

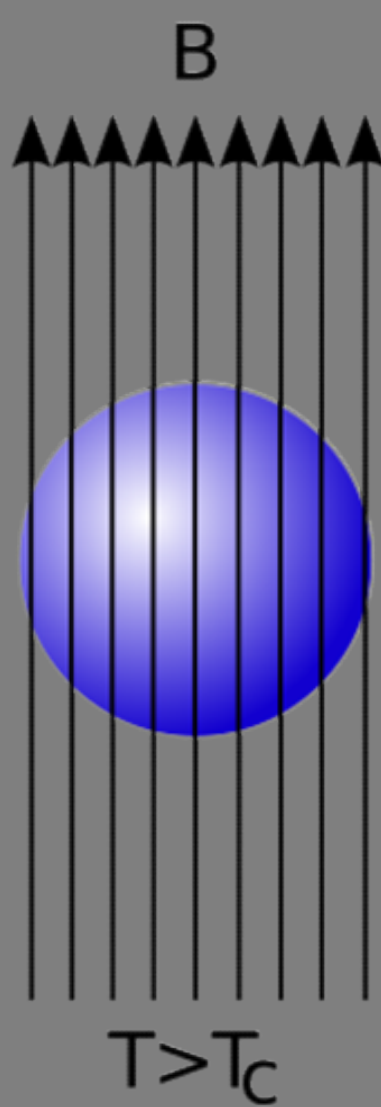
در این صورت میدان مغناطیسی درون حلقه ابررسانا گیر
می افتد:



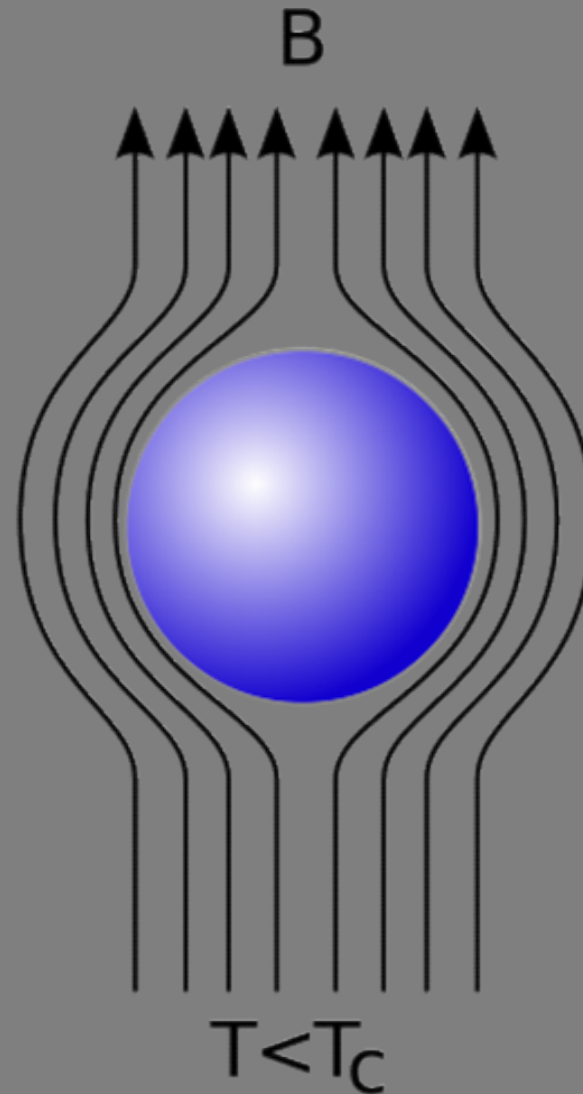
$$T > T_c$$



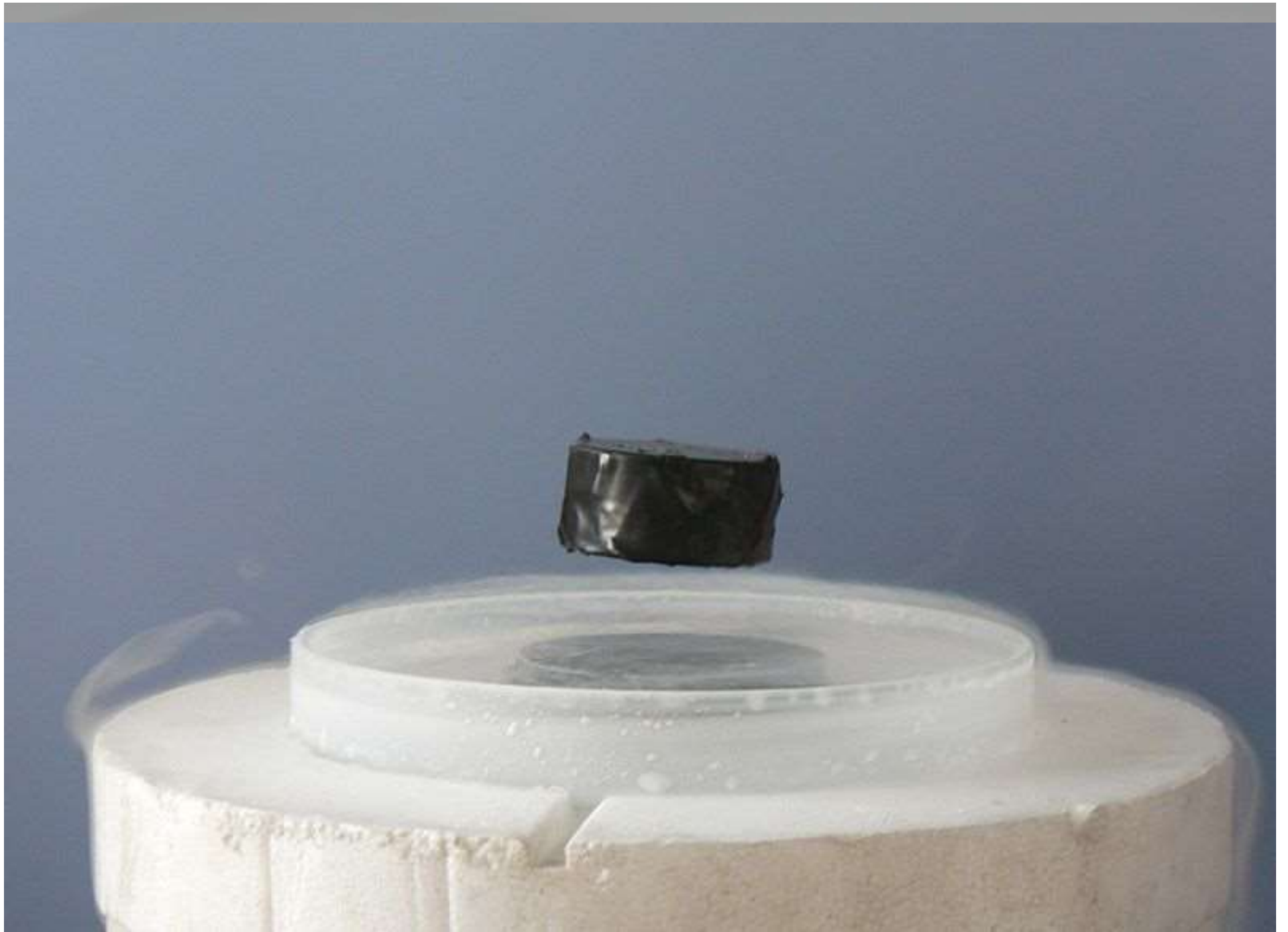
$$T < T_c$$



جسم در این حالت شبیه فلز رفتار می کند و میدان مغناطیسی می تواند به درون آن نفوذ کند.



جسم در این حالت ابررسانا می شود و اجازه عبور میدان مغناطیسی را نمی دهد و خطوط میدان را دفع می کند.



der time: 0h 6m 57.3s

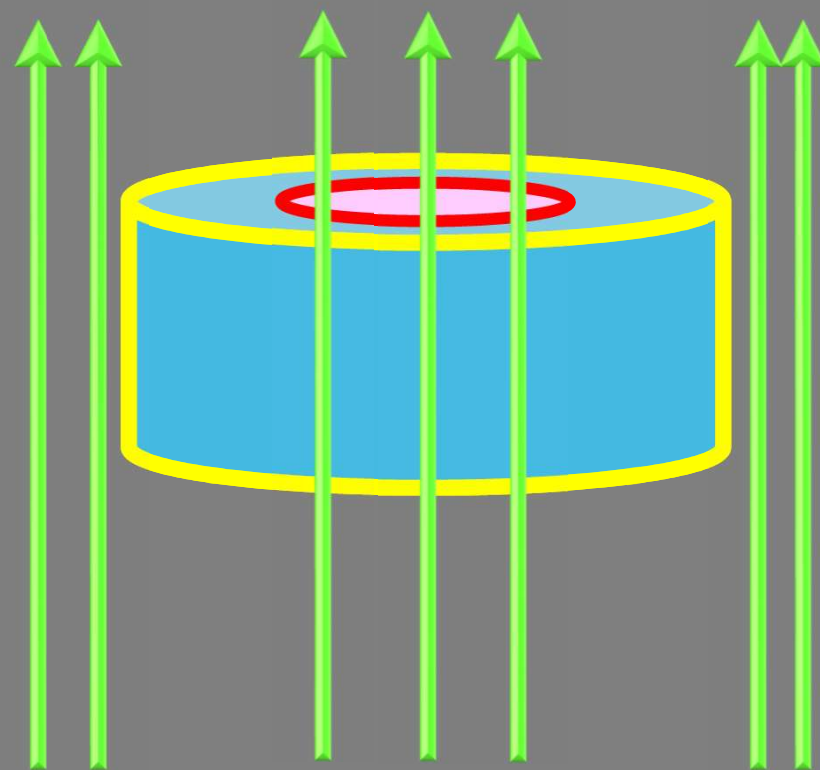
تجربه نشان می دهد که فلوی میدان مغناطیسی
به صورت زیر کوانتیزه می شود:

$$\Phi_n = \frac{2\pi\hbar c}{(2e)} n$$

که با رابطه ای که ما به دست آورده ایم اندکی
تفاوت دارد:

$$\Phi_n = \frac{2\pi\hbar c}{e} n$$

یعنی در تجربه به جای بار الکترون دو برابر بار
الکترون ظاهر شده است.



$$T < T_c$$

خطوطی که در حفره گیر افتاده اند
همانهایی هستند که کوانتیزه می شوند.

دو برابر شدن بار الکترون که در رابطه تجربی وجود دارد با درک فعلی ما از ابررساناها و پدیده ابررسانایی سازگار است.

درک فعلی ما می گوید که زوجهای کوپر با دو برابر بار الکترون باعث ابررسانایی می شوند.

یعنی الکترونها در واقع دو الکترون با اسپین مخالف یکدیگر هستند که با یکدیگر جفت شده اند.

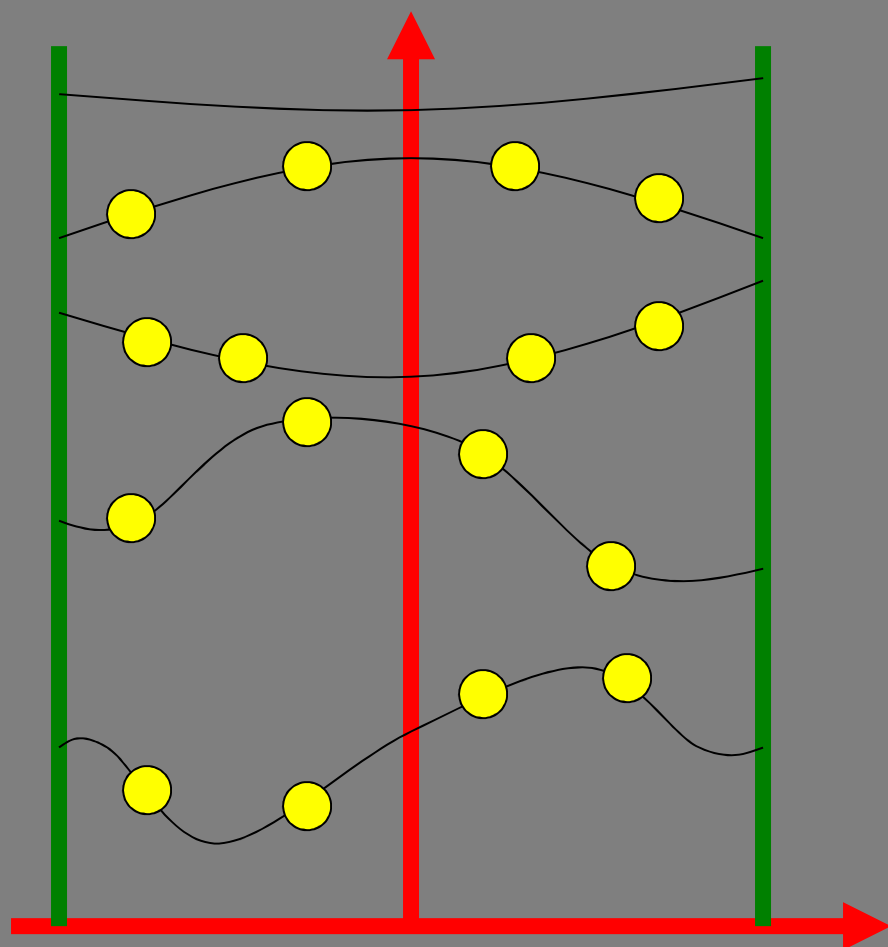
به این دو الکترون زوج کوپر گویند.

زوجهای کوپر عامل ابررسانایی هستند.

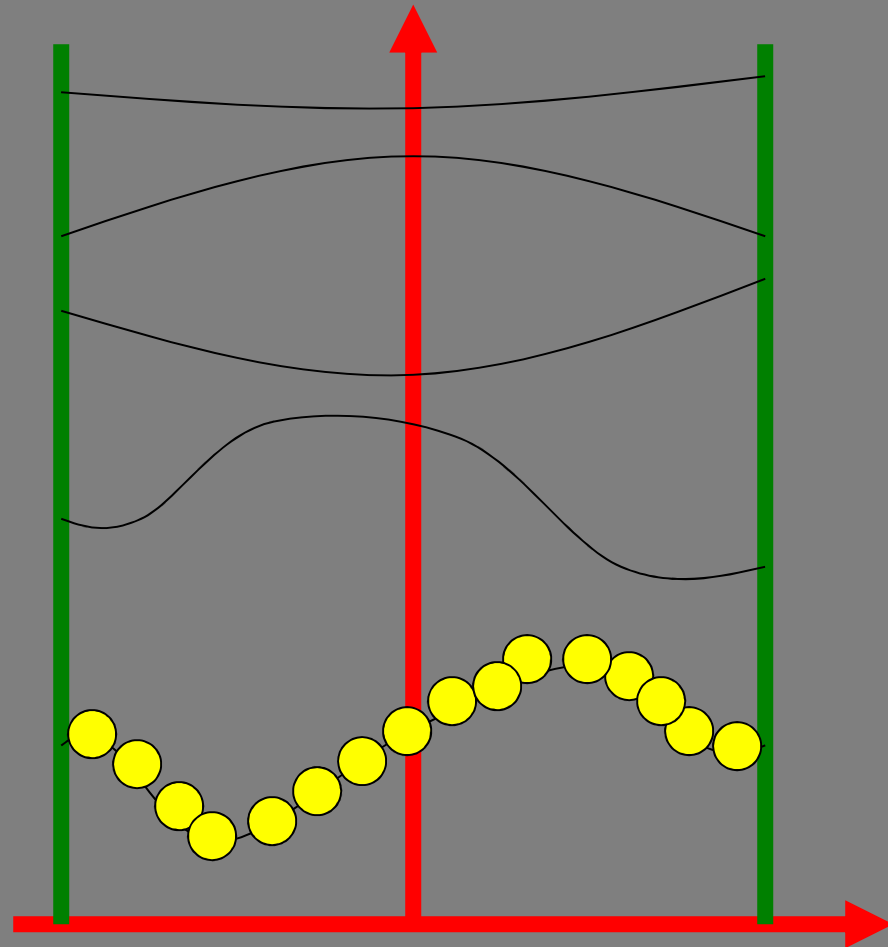
اسپین زوجهای کوپر صفر و بنابراین مانند یک بوزون رفتار می کنند.

لذا در دمای بحرانی چگالش بوز انشتین روی می دهد.

چگالش بوز انشتین یعنی هنگامی که می خواهیم زوجهای کوپر را بچینیم باید مانند بوزونها با آنها رفتار کنیم و همه را در حالت زمینه در پایین ترین تراز انرژی قرار دهیم:



$$T > T_c$$



$$T < T_c$$

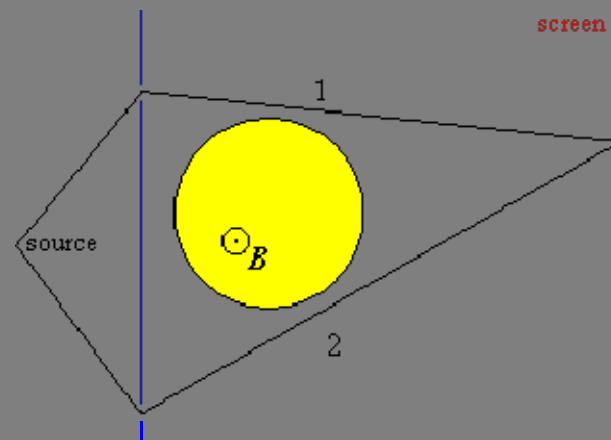
نمایش آشکار دیگری از وابستگی فاز تابع موج به فلو در اصول می تواند در یک آزمایش تداخل سنجی که در آن یک سلونوئید در برگیرنده یک میدان مغناطیسی بین دو شکاف در مشاهده شود.

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

طرح تداخل روی صفحه ناشی از برهمه‌نی دو بخش تابع موج است:

که در آن Ψ_1 بخشی از تابع موج الکترون در مسیر 1 و Ψ_2 آن بخش از تابع موج الکترون در مسیر 2 است.

$$\Psi = \Psi_1 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_1 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\} + \Psi_2 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\}$$



$$\Psi = \Psi_1 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_1 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\} + \Psi_2 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\}$$

$$\Psi = \left[\Psi_1 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \left(\int_1 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} - \int_2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right) \right\} + \Psi_2 \right] \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\}$$

$$\Psi = \left[\Psi_1 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \Phi \right\} + \Psi_2 \right] \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \right\}$$

طرح تداخل در حضور
میدان مغناطیسی

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

طرح تداخل در غیاب میدان مغناطیسی

$$|\Psi(B=0)|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2$$

پس طرح تداخل در حضور میدان
بستگی به فلوی میدان دارد و با طرح
تداخل در غیاب میدان تفاوت دارد.

$$|\Psi(B \neq 0)|^2 = \left| \Psi_1 \exp \left\{ \frac{ie}{\hbar c} \Phi \right\} + \Psi_2 \right|^2$$

THE PHYSICAL REVIEW

A journal of experimental and theoretical physics established by E. L. Nichols in 1893

SECOND SERIES, VOL. 115, NO. 3

AUGUST 1, 1959

Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory

Y. AHARONOV AND D. BOHM

H. H. Wills Physics Laboratory, University of Bristol, Bristol, England

(Received May 28, 1959; revised manuscript received June 16, 1959)

In this paper, we discuss some interesting properties of the electromagnetic potentials in the quantum domain. We shall show that, contrary to the conclusions of classical mechanics, there exist effects of potentials on charged particles, even in the region where all the fields (and therefore the forces on the particles) vanish. We shall then discuss possible experiments to test these conclusions; and, finally, we shall suggest further possible developments in the interpretation of the potentials.

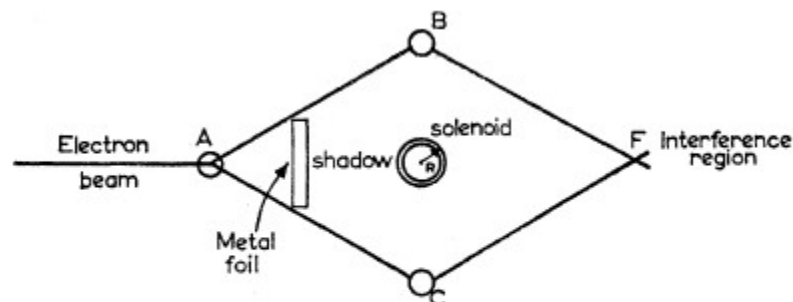


FIG. 2. Schematic experiment to demonstrate interference with time-independent vector potential.

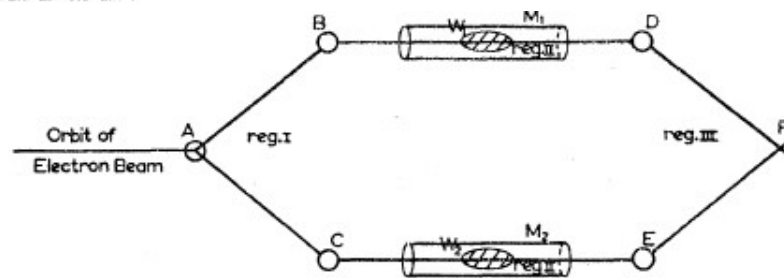


FIG. 1. Schematic experiment to demonstrate interference with time-dependent scalar potential. A, B, C, D, E : suitable devices to separate and divert beams. W_1, W_2 : wave packets. M_1, M_2 : cylindrical metal tubes. F : interference region.

SHIFT OF AN ELECTRON INTERFERENCE PATTERN BY ENCLOSED MAGNETIC FLUX

R. G. Chambers

H. H. Wills Physics Laboratory, University of Bristol, Bristol, England

(Received May 27, 1960)

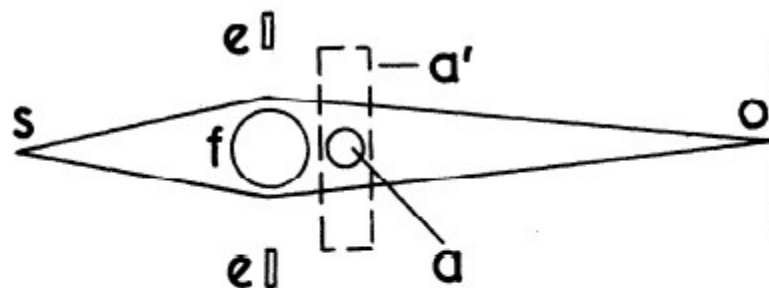


FIG. 1. Schematic diagram of interferometer, with source s , observing plane o , biprism e , f , and confined and extended field regions a and a' .

$$S_n = \frac{(n + \gamma) 2\pi e}{\hbar} B$$

$$S_{n+1} - S_n = \Delta S_n = \frac{2\pi e}{\hbar} B$$

$$S_n = (n + \gamma) \Delta S_n$$



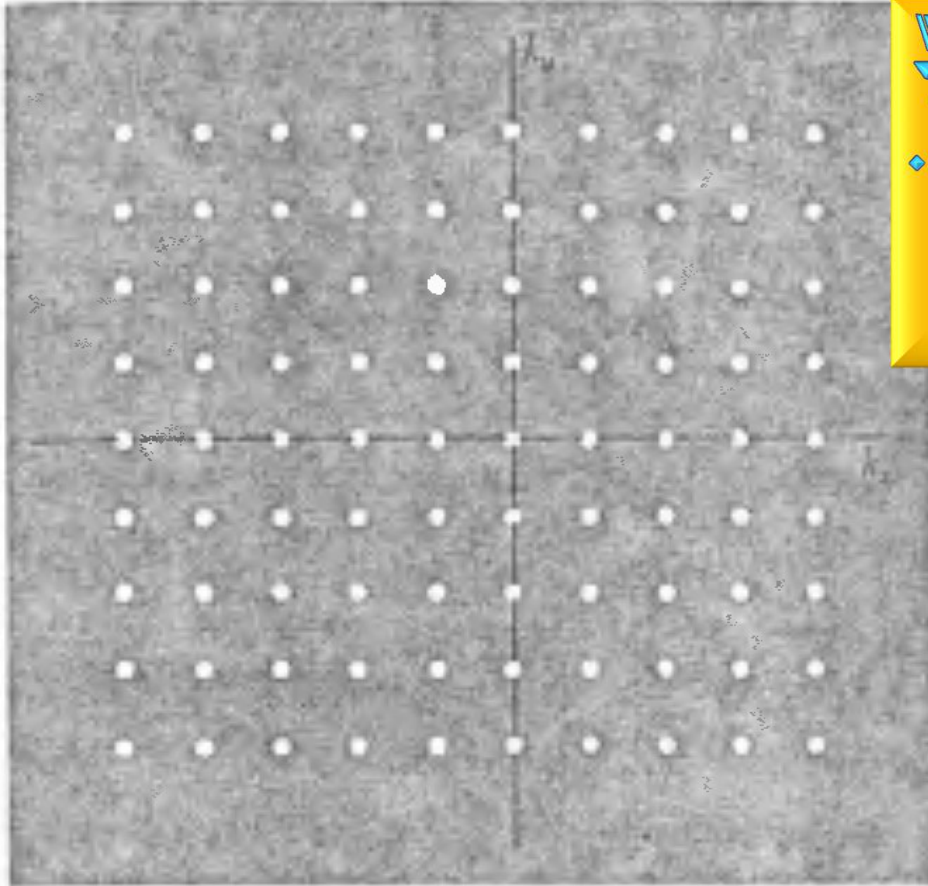
r

تصویر مسیر الکترون در صفحه
عمود بر **B** در فضای **r**

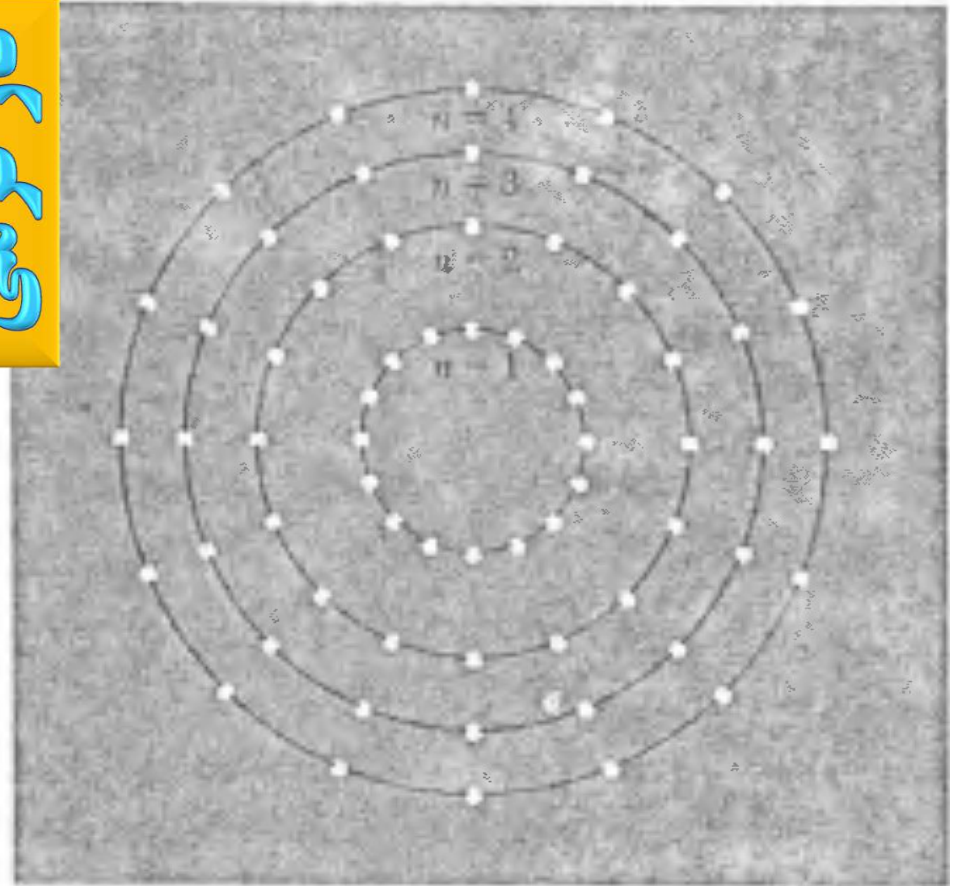


k

تصویر مسیر الکترون
در فضای **k**



(a)



(b)

(a) Allowed electron orbitals in two dimensions in absence of a magnetic field, (b) In a magnetic field the points which represent the orbitals of free electrons may be viewed as restricted to circles in the former $k_x k_y$ plane.

ساده
حالت

ترین

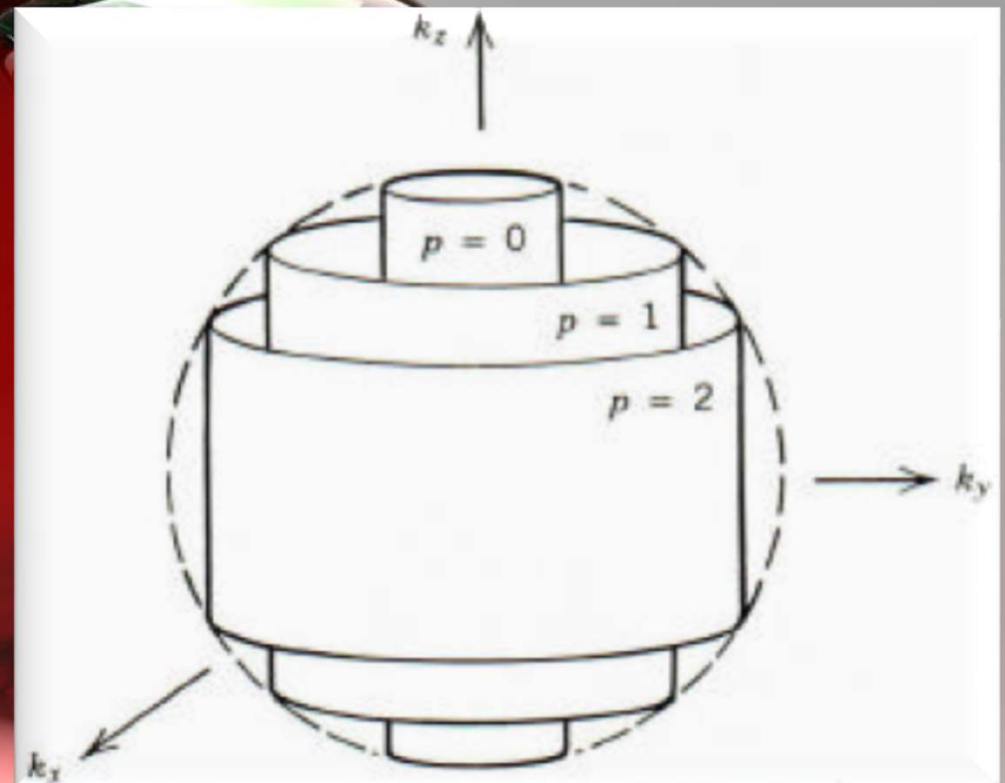
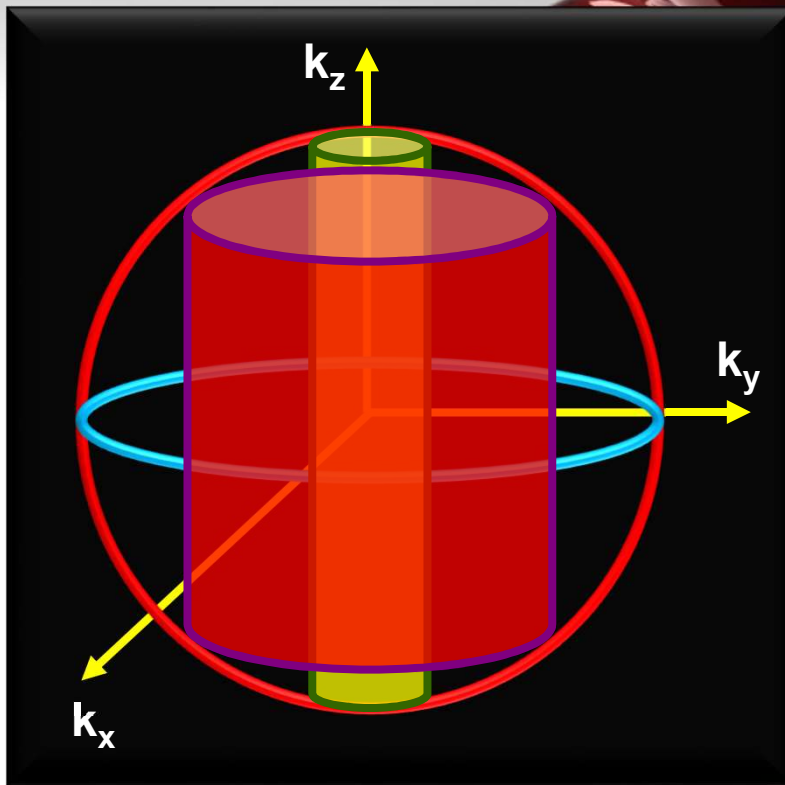
مدل
فرمی

الکترون

که در آن پتانسیل صفر
است

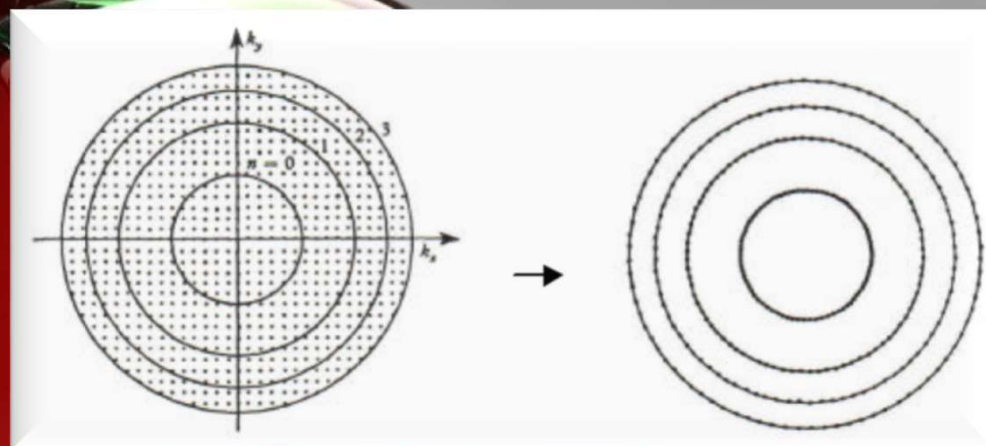
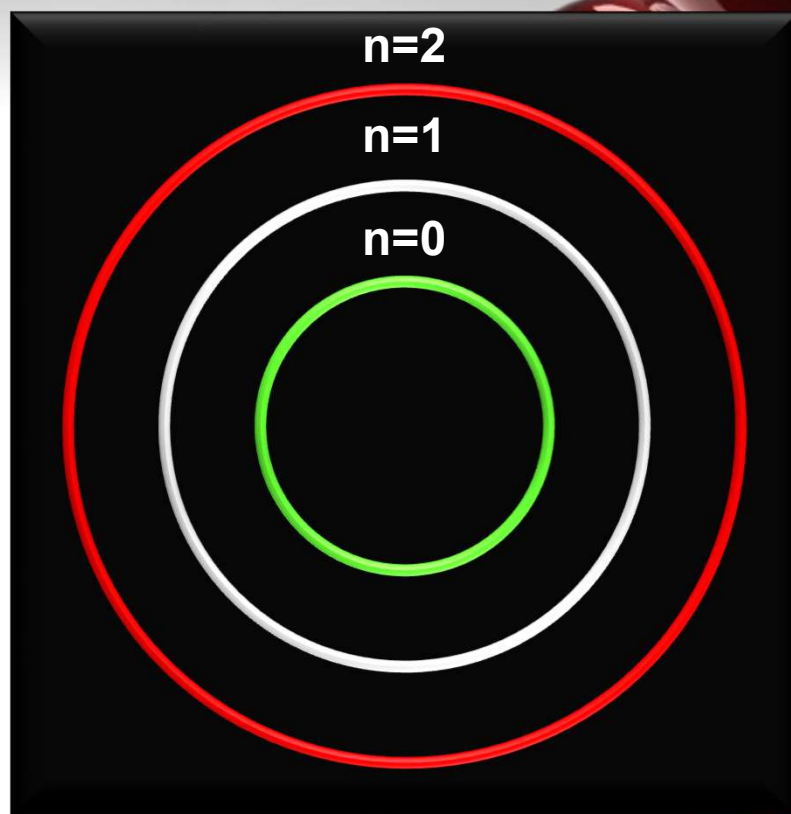
پس سطح فرمی یک کره
خواهد شد

پس از اعمال میدان مغناطیسی توزیع کوانتومی در کره به صورت لوله هایی تبدیل می شوند که به آنها لوله های لاندائو گویند



یعنی حالت‌های کوانتومی مجاز بر روی استوانه‌های متحد‌المركزی قرار می‌گیرند که بین آنها نواحی ممنوعه می‌باشد

سطح مقطع این استوانه‌ها دایره متحد‌المركزی در فضای دو بعدی بردار موج می‌باشند



حالت‌های مجاز پس از اعمال میدان که بزرگترین آنها را سطح فرین گویند

گاز الکترونی آزاد (گاز فرمی) در میدان مغناطیسی یکنواخت

مشاهده اثر دی هاس وون آلفن در
گاز فرمی

تغییر میدان سبب تغییر برخی از خواص بلور (مانند ضریب نفوذ پذیری) به طور تناوبی می شود
که به آن اثر دی هاس وون آلفن گویند

$$B = 0$$

الکترون فرمی در غیاب میدان

یک بلور مکعبی به ابعاد L را در نظر
می گیریم

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad n_x = 0, \pm 1, \dots$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad n_y = 0, \pm 1, \dots$$

$$k_z = \frac{2\pi}{L} n_z, \quad n_z = 0, \pm 1, \dots$$

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

حال اگر میدان مغناطیسی یکنواختی در سرتاسر بلور اعمال کنیم

$$\mathbf{B} = B \mathbf{k}$$

الکترون فرمی در حضور میدان

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c$$

$$k_z = \frac{2\pi}{L} n_z, \quad n_z = 0, \pm 1, \dots$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$

فرکانس
سیکلو ترونی

بدین ترتیب اعمال میدان سبب تبدیل زیر شده است:

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2)$$



$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c$$

که اگر برای سادگی بحث خود را به فضای دو بعدی محدود کنیم، یعنی از جمله زیر (انرژی در راستای میدان) صرف نظر کنیم

خواهیم
داشت

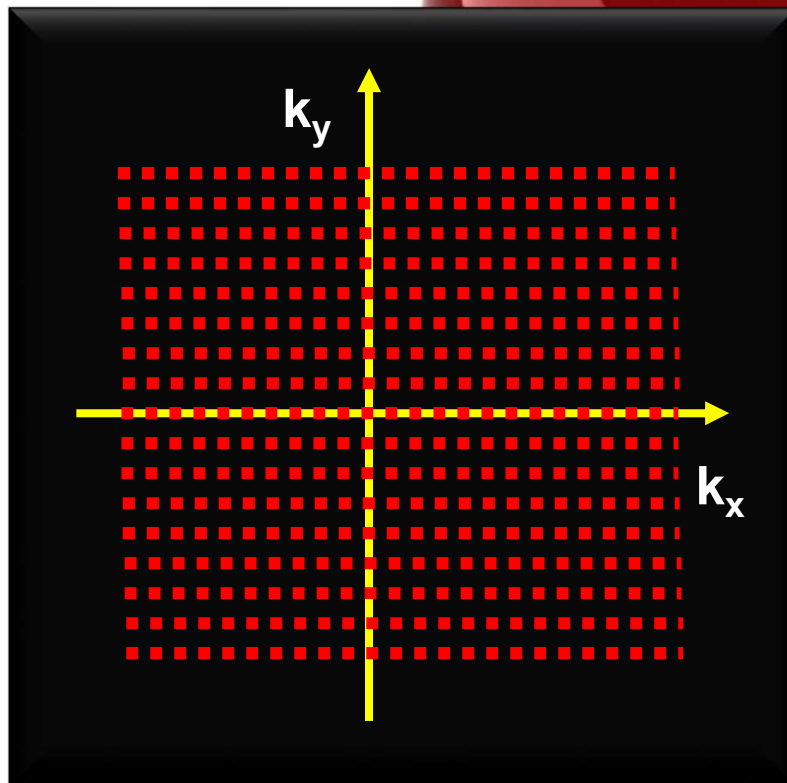
$$\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

$$B = 0$$

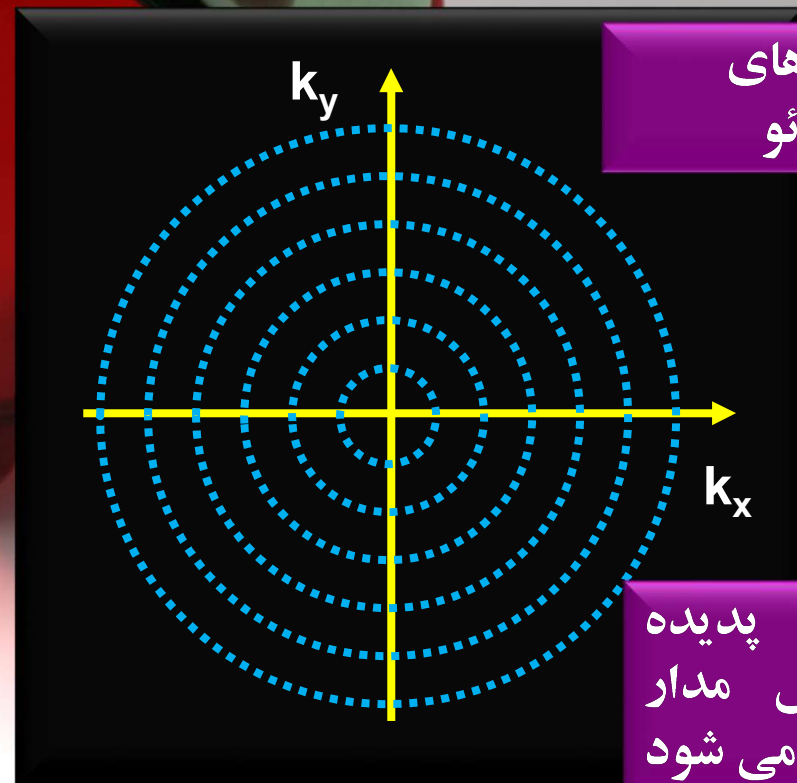
$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2)$$

$$\mathbf{B} = B \mathbf{k}$$

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c$$

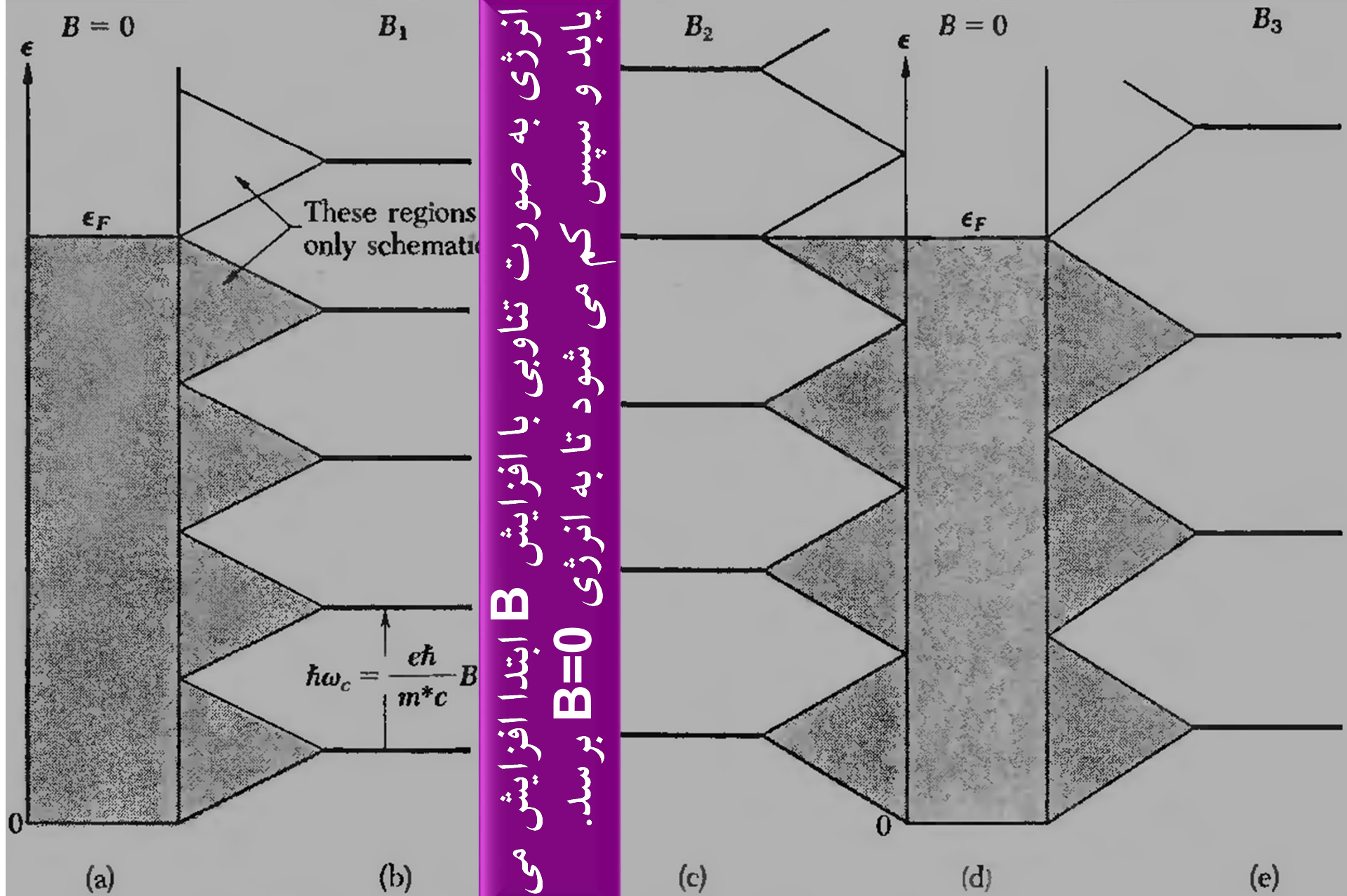


ترازهای
لانداو



این پدیده
کوانتش مدار
نامیده می شود

در گذار از $B=0$ به $B \neq 0$ انرژی مجموعه چگونه تغییر می کند؟

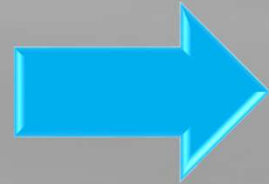


پس خواص تناوبی بلور از این امر ناشی می شود که انرژی به صورت نوسانی با تغییر میدان مغناطیسی تغییر می کند، مثلاً

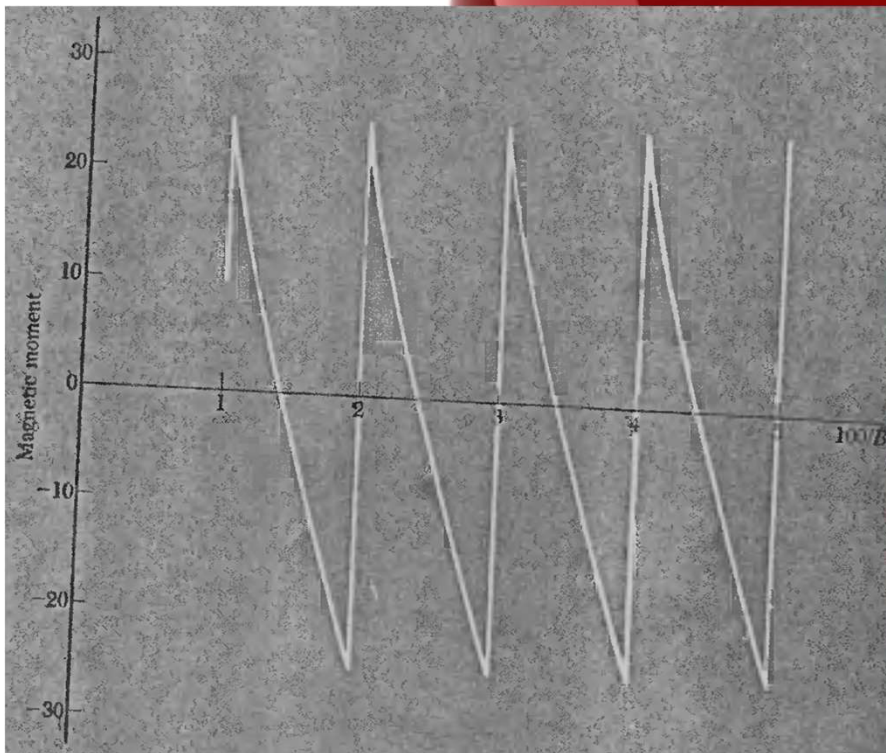
$$\mu = - \frac{\partial E}{\partial B}$$

ممان
مغناطیسی

انرژی به صورت تناوبی با تغییر میدان تغییر می کند



ممان مغناطیسی نیز به صورت تناوبی با تغییر میدان تغییر می کند



At absolute zero the magnetic moment is given by $-\partial U / \partial B$ versus $1/B$.

پس هر خاصیتی که به انرژی بستگی دارد، انتظار داریم که به صورت تناوبی با میدان تغییر کند.

دوره تناوب انرژی مساوی است با دوره تناوب هر کمیت فیزیکی دیگر

میزان تبهگنی هر تراز لاندائو

$$S_n = (n + \gamma) \frac{2\pi e}{\hbar} B$$

$$S_{n+1} - S_n = \Delta S = \frac{2\pi e}{\hbar} B$$

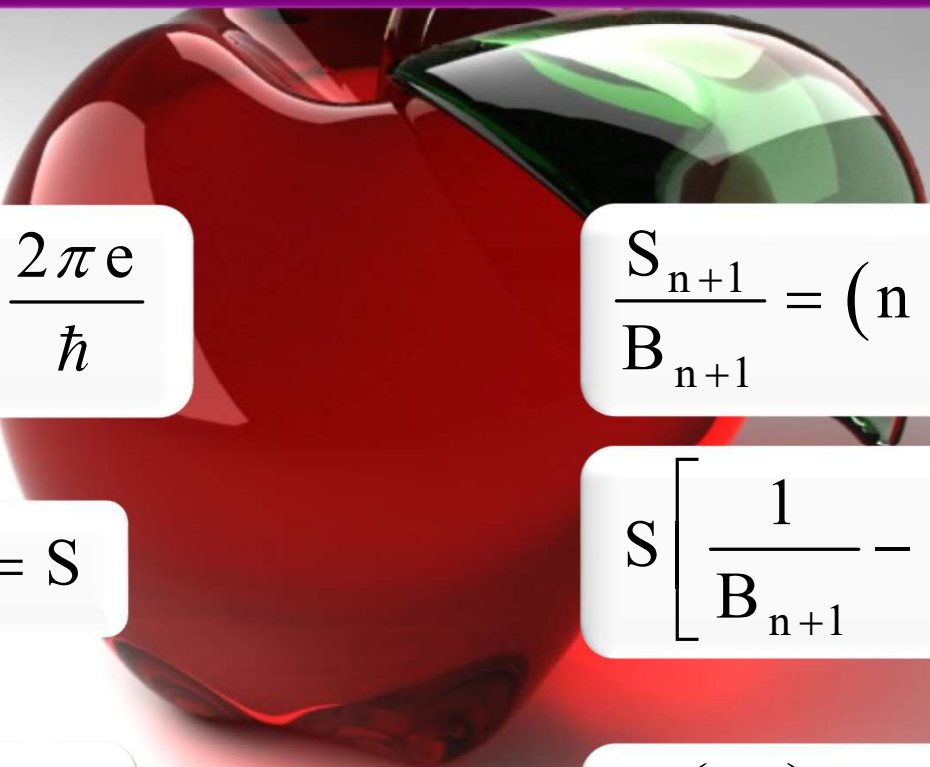
$$\Delta S = \frac{2\pi e}{\hbar} B$$

$$D = \frac{\Delta S}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} = \frac{\frac{2\pi e}{\hbar} B}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} = \rho B$$

$$\rho = \frac{eL^2}{2\pi \hbar^2}$$

مدار الکترون در فضای حقیقی باز و به صورت مارپیچ است ولی در فضای بردار موج به صورت مدارهای بسته ای است

مدار الکترون در فضای حقیقی یعنی مسیر الکترون ولی مدار الکترون در فضای بردار موج یعنی حالت های مجازی که الکترون می تواند اختیار کند


$$\frac{S_n}{B_n} = (n + \gamma) \frac{2\pi e}{\hbar}$$

$$\frac{S_{n+1}}{B_{n+1}} = (n + 1 + \gamma) \frac{2\pi e}{\hbar}$$

$$\text{if } S_n = S_{n+1} = S$$

$$S \left[\frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n} \right] = \frac{2\pi e}{\hbar S}$$

$$S \left[\Delta \left(\frac{1}{B} \right) \right] = \frac{2\pi e}{\hbar S}$$

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{2\pi e}{\hbar S}$$

بدین ترتیب طرف چپ رابطه فوق یعنی دوره تناوب میدان به S سطح فرین مربوط می شود

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{2\pi e}{\hbar S}$$

پس از روی دوره تناوب میدان می توان سطح فرین را به دست آورد

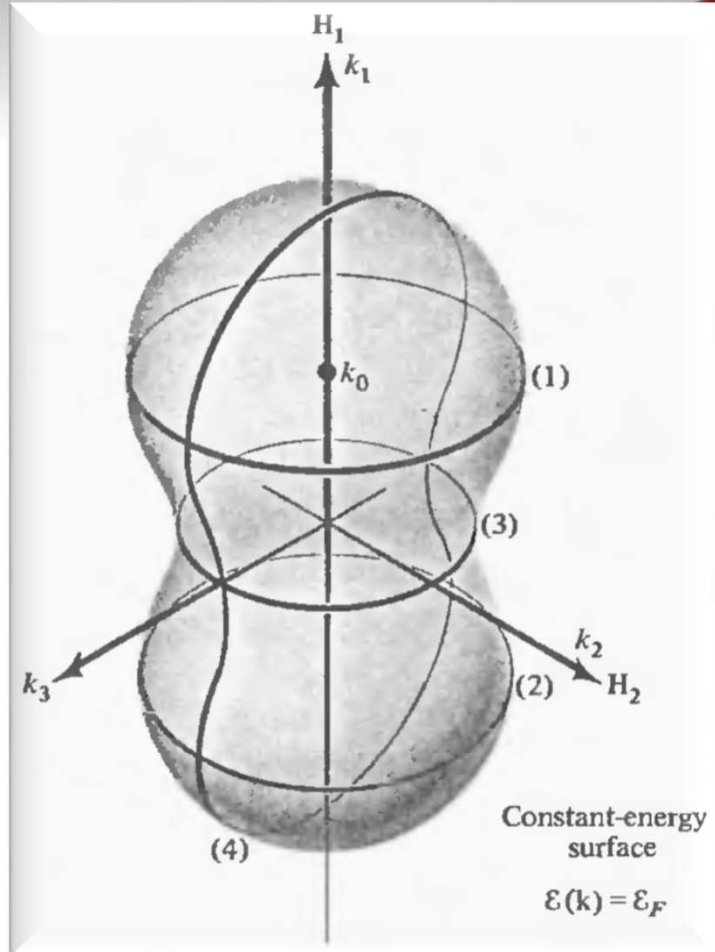
از روی سطوح فرین در جهات مختلف شکل سطح فرمی به دست می آید

با تغییر B خواص تناوبی را مورد بررسی قرار می دهند

بدین ترتیب $\Delta(1/B)$ تعیین می شود

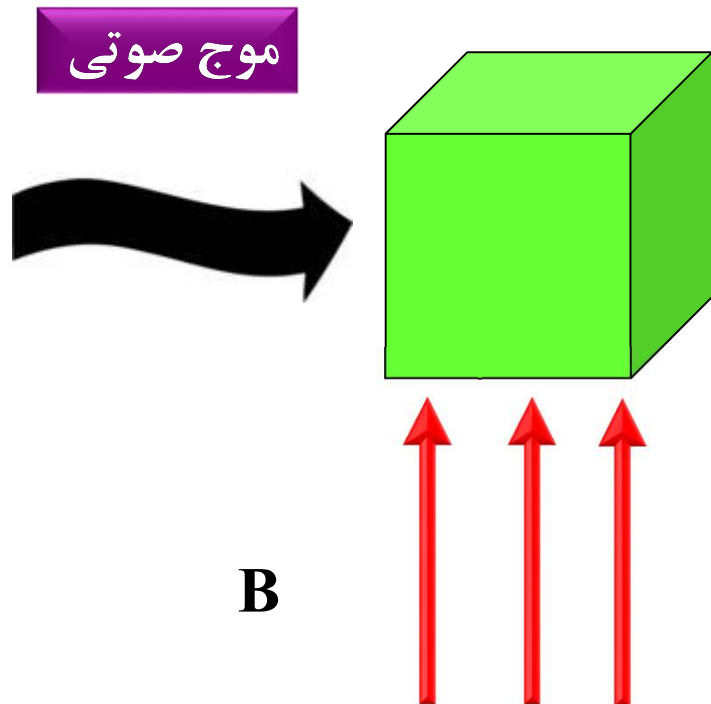
و از روی آن S تعیین می گردد

این عمل در جهات مختلف شکل سطح فرمی را تعیین خواهد کرد



روشهای دیگر تعیین سطح فرمی

الف) پدیده مغناطو آکوستیک



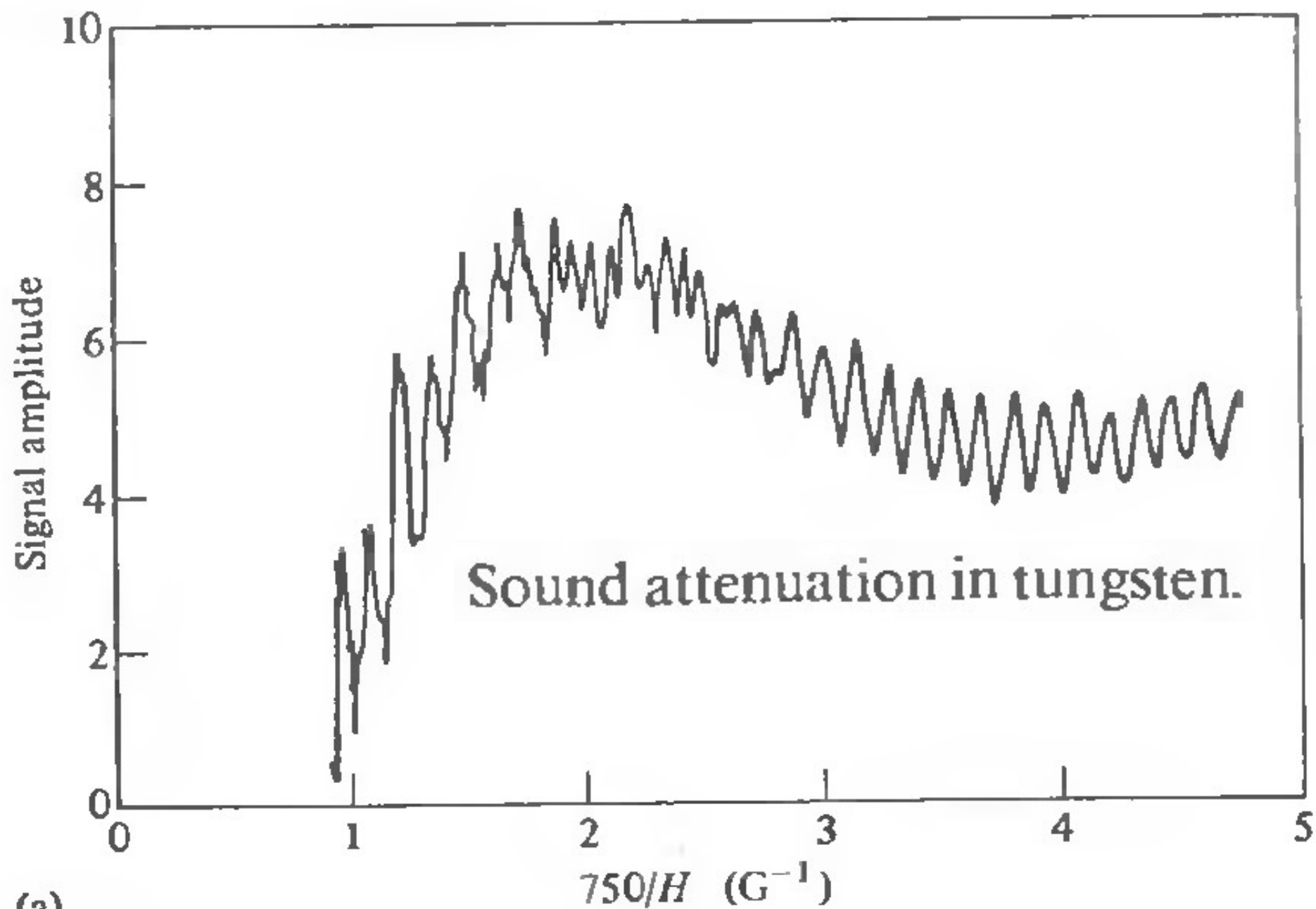
در این روش یک موج صوتی و یک موج یا میدان مغناطیسی را بطور همزمان روی بلور اعمال می کنیم.

از برهمکنش امواج با بلور می توان اطلاعاتی در باره سطح فرمی به دست آورد

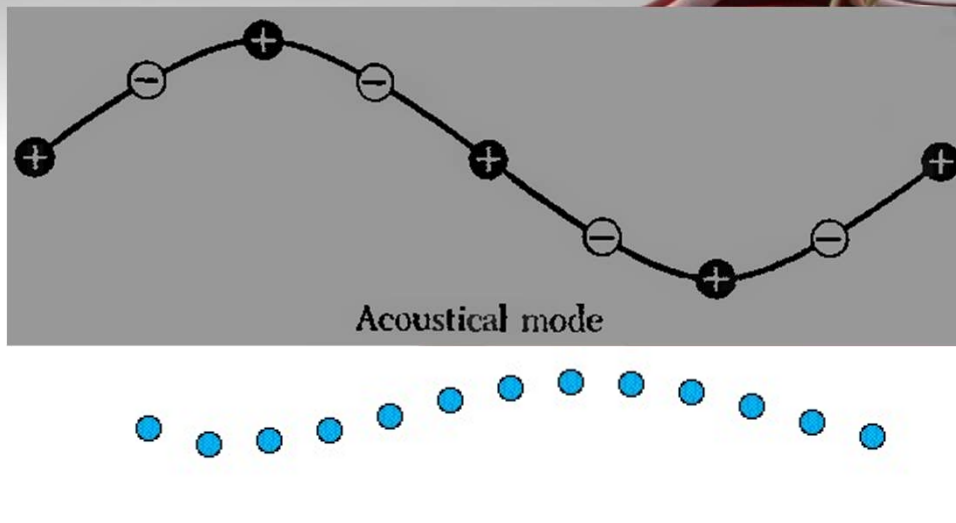
میزان استهلاک موج صوتی در بلور به موج مغناطیسی مربوط می شود

استهلاک موج صوتی بطور تناوبی با میدان مغناطیسی تغییر می کند

این میزان به دوره تناوب مربوط می شود و دوره تناوب به سطح فرمی مربوط می شود



بلور تا حد امکان خالص (برای کاهش برخورد الکترونها) را در دمای تقریباً صفر (برای داشتن کمترین برخورد الکترونها با فونونها) در نظر می‌گیریم و یک موج ماوراء صوتی را به بلور اعمال می‌کنیم



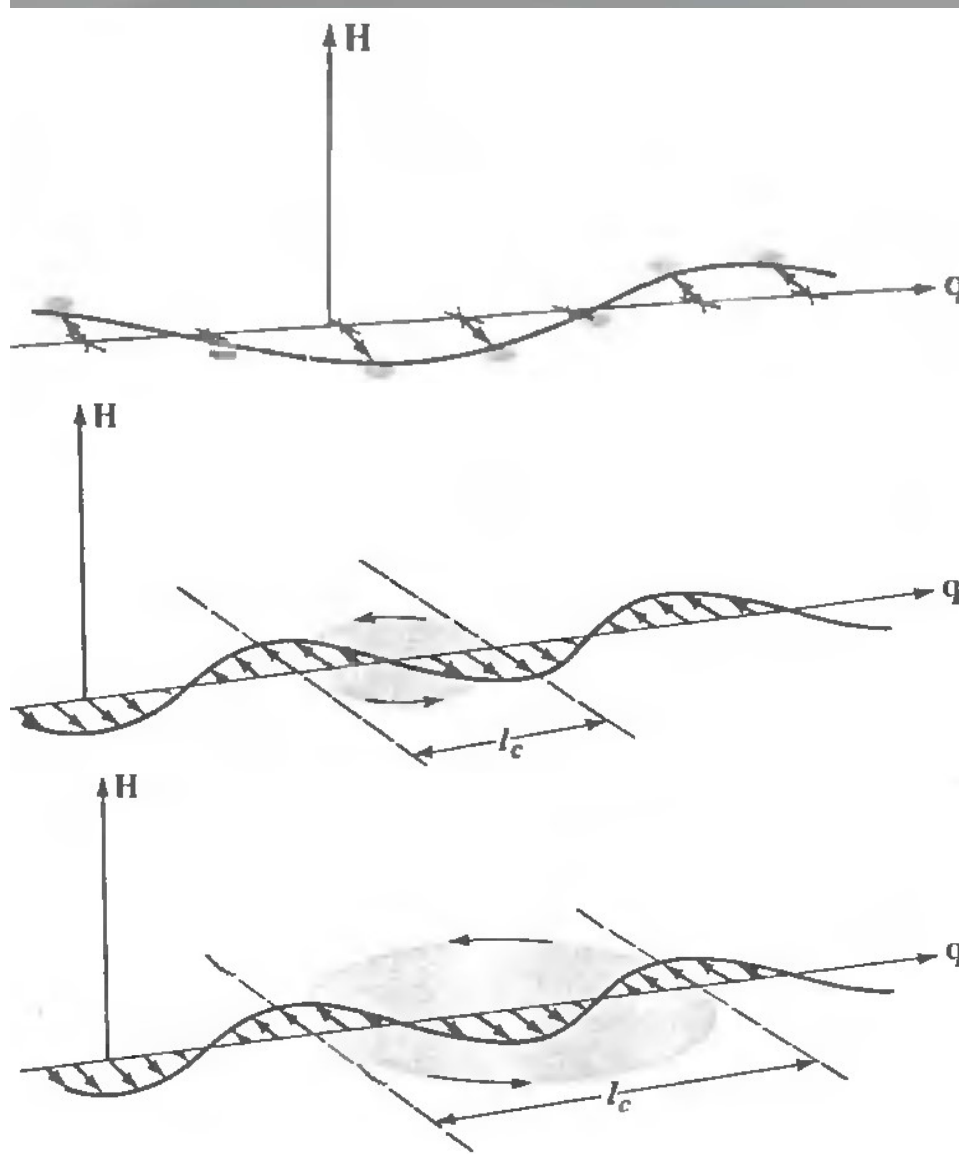
این موج باعث جا به جایی یونها می‌شود

چون جرم یونها در مقایسه با جرم الکترونها زیاد است لذا تحرک آنها کمتر خواهد بود و بنابراین می‌توان با تقریب آنها را ساکن فرض کرد.

این بدان معنی است که در مدت زمانی که الکترونها را در نظر می‌گیریم و بررسی می‌کنیم یونها را ساکن فرض می‌کنیم

موج صوتی میدانی را مطابق شکل فوق در داخل بلور ایجاد می‌کند.

میدان ایجاد شده قطبیدگی و جهت انتشار موج صوتی را خواهد داشت.



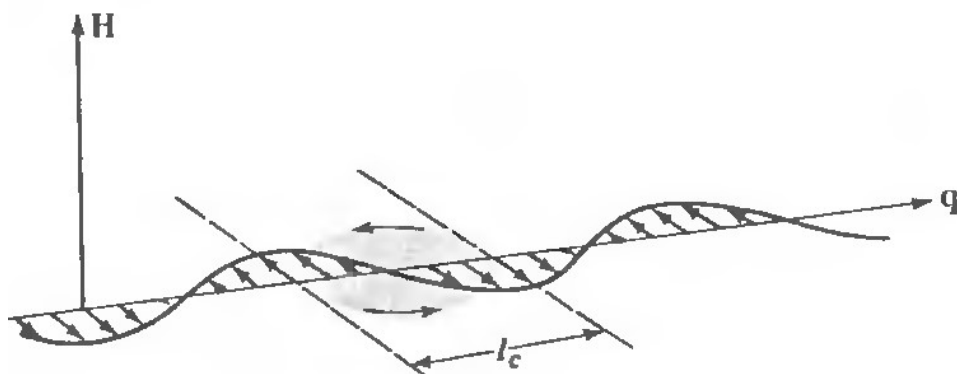
حال اگر یک میدان مغناطیسی را عمود بر صفحه قطبش وارد کنیم، آنگاه دو میدان صوتی و مغناطیسی به طور همزمان بر مسیر الکترون تاثیر خواهند گذاشت

میدان مغناطیسی سبب حرکت دورانی الکترون بر مدار یک دایره در صفحه عمود بر میدان خواهد شد.

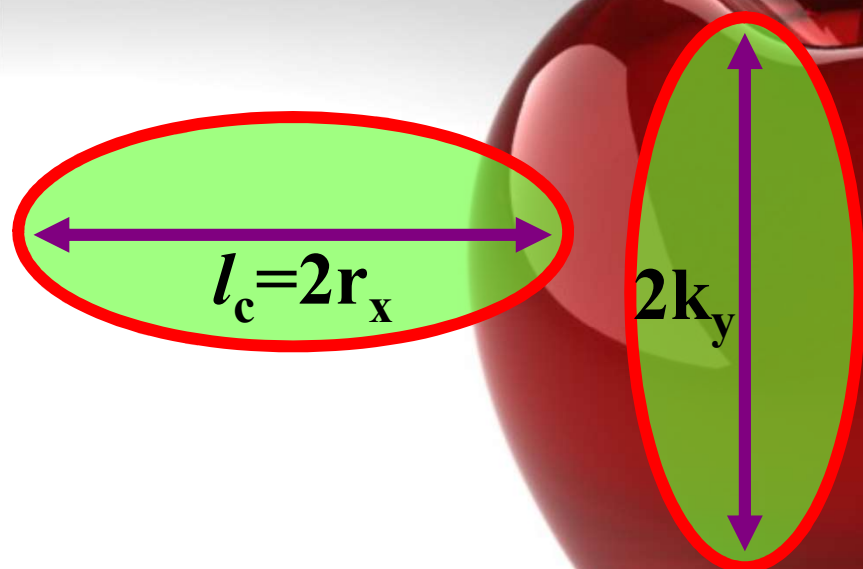
میدان صوتی سبب یک حرکت ارتعاشی خواهد شد.

این دو حرکت مطابق شکل فوق می توانند گاهی سازنده و گاهی مخرب همدیگر باشند

در حالی که این دو حرکت می توانند همواره مطابق شکل سازنده باشند

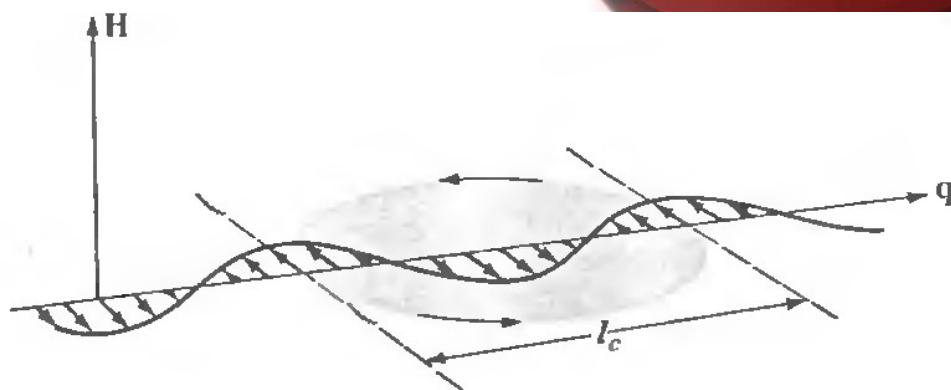


شرط تداخل گاهی سازنده و گاهی مخرب این است که قطر مدار الکترون (ناشی از میدان مغناطیسی) نصف طول موج صوتی باشد یا



$$l_c = 2r_x = \frac{\hbar c}{eB} 2k_y = (n + 1/2)\lambda$$

شرط تداخل همواره سازنده این است که قطر مدار الکترون (ناشی از میدان مغناطیسی) برابر طول موج صوتی باشد یا



$$l_c = 2r_x = \frac{\hbar c}{eB} 2k_y = n\lambda$$

پس در صورت انتخاب اندازه میدان مغناطیسی به گونه ای که شرط زیر برآورده شود

$$l_c = 2r_x = \frac{\hbar c}{eB} 2k_y = (n + 1/2)\lambda$$

بین الکترون و موج صوتی یک برهمکنش قوی ایجاد می شود

انتشار راحتتر معادل استهلاک کمتر موج صوتی است

برهمکنش قوی تر موجب انتشار راحتتر موج صوتی می شود

از طرفی در صورت انتخاب اندازه میدان مغناطیسی به گونه ای که شرط زیر برقرار شود

$$l_c = 2r_x = \frac{\hbar c}{eB} 2k_y = n\lambda$$

بین الکترون و موج صوتی یک برهمکنش ضعیف ایجاد می شود

انتشار سختتر معادل استهلاک بیشتر موج صوتی است

برهمکنش ضعیفتر موجب انتشار سختتر موج صوتی می شود

با تغییر میدان استهلاک به طور تناوبی تغییر خواهد یافت

الکترونیهای موثر در تغییر استهلاک عمدتاً الکترونیهای نزدیک سطح فرمی اند

زیرا الکترونیهایی که نزدیک سطح فرمی اند می توانند با اندکی انرژی کنده شوند

لذا مدارهای رسم شده مدارهای الکترونیهای فرمی اند

پس با تغییر اندازه و جهت میدان مغناطیسی می توان ابعاد مسیر فرمی را در جهتهای مختلف به دست آورد و با مجموعه آنها به شکل سطح فرمی رسید

$$l_c = 2r_x = \frac{\hbar c}{e} 2k_y \delta \left(\frac{1}{B} \right) = \left(n + \frac{\lambda}{2} \right)$$

سوال: گفتیم که هر چه برهمکنش موج صوتی و الکترون بیشتر شود استهلاک کمتر است

این ظاهراً خلاف انتظار به نظر می رسد، چرا؟

جواب: چون موج صوتی یک موج الاستیک است و انتشار آن نیاز به محیط مادی دارد و برهمکنش با محیط مادی است که باعث انتشار موج الاستیک می شود.

پس هر چند این برهمکنش زیادتر شود، انتشار راحتتر خواهد شد

برخلاف موج الکترومغناطیسی که برای انتشار نیاز به ماده ندارد و در صورت وجود ماده مستهلک می شود

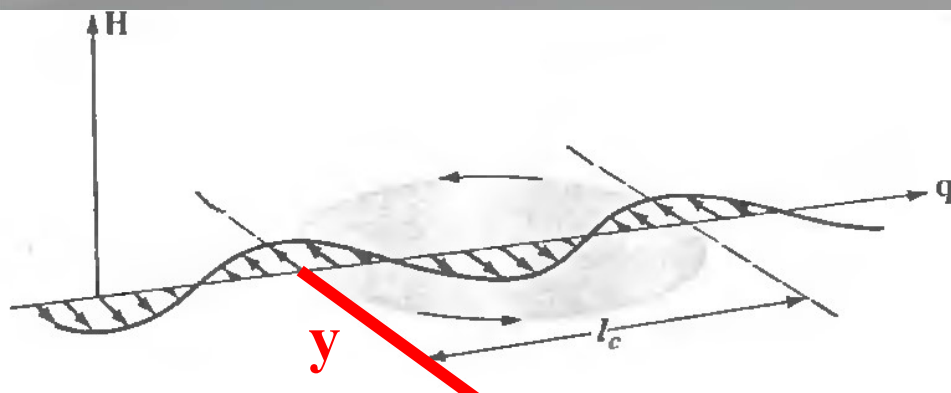
$$l_c = 2r_x = \frac{\hbar c}{Be} 2k_y = \left(n + \frac{\lambda}{2} \right)$$

نکته: شرط حداقل استهلاک را به صورت زیر نوشتیم:

برای دقیقتر نوشتن رابطه فوق مسیر الکترون را دایره ای به شعاع r در نظر می گیریم

$$E = E_y \exp(iqx)$$

و موج صوتی را نیز به صورت زیر در نظر می گیریم



$$E = E_y \exp(iqx)$$

$$\begin{cases} x(t) = r \cos \omega t \\ y(t) = r \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = -r \sin \omega t \\ v_y(t) = r \cos \omega t \end{cases}$$

= انرژی جذب شده توسط الکترون در یک دور کامل

$$\varepsilon = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt = \int E v_y dt$$

$$\varepsilon = \int E_y \exp(iqr \cos \omega t) r \omega \cos \omega t dt$$

$$\varepsilon = \int E_y \exp(iqr \cos \omega t) r \omega \cos \omega t dt$$

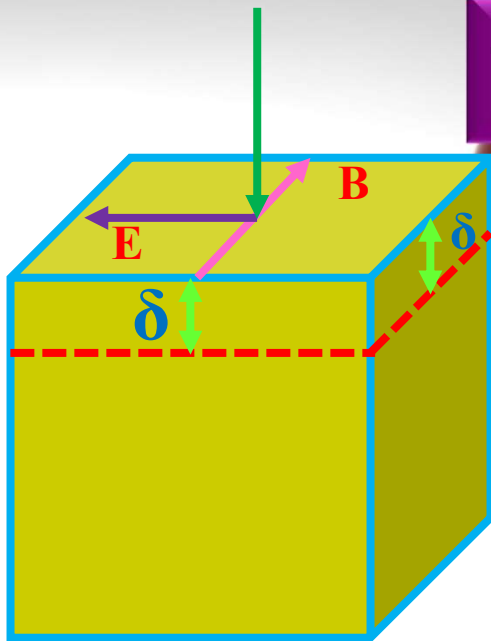
$$\eta = \omega t \Rightarrow \varepsilon = E_y r \int_0^{2\pi} \exp(iqr \cos \eta) r \omega \cos \eta d\eta$$

$$\varepsilon = 2\pi E_y r J_1(qr)$$

تشدید سیکلوترونی در فلزات

(ب) روش ازبل - کینر

جهت انتشار موج



می خواهیم اطلاعاتی در مورد جرم موثر بلور پیدا کنیم که معادل دانستن سطح فرمی است

با توجه به این که عمق نفوذ میدان در بلور کم است

$$\delta = \left(\frac{c^2}{2\pi \omega \sigma} \right)^{1/2}$$

عمق
نفوذ

میدان

فرکانس
الکتریکی

ضریب هدایت الکتریکی
بلور

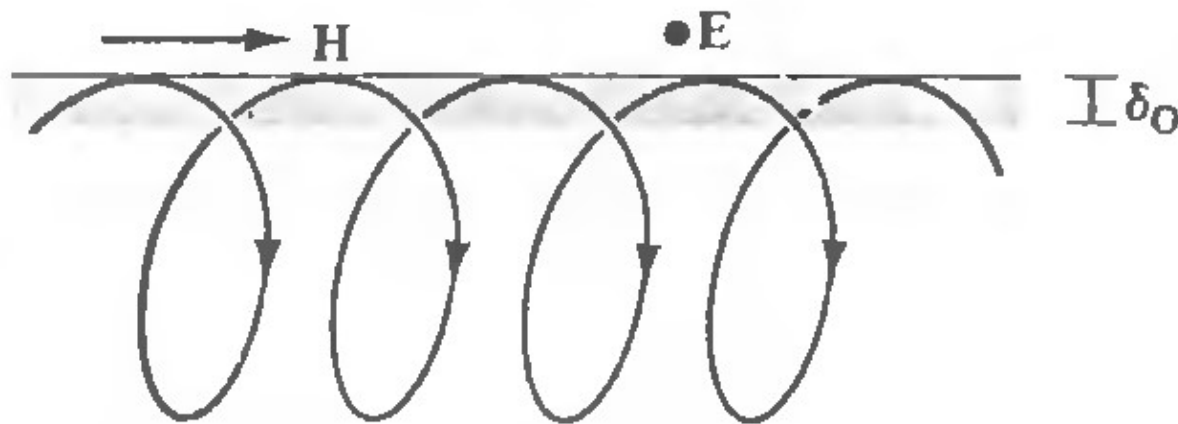
$$\delta(\text{metal}) \sim 10^{-5} \text{ cm}$$

$$\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t \hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{j}}$$

بنابراین در فلزات عمق نفوذ کوچک است

در مورد فلزات ضریب هدایت الکتریکی بزرگ است



بخشی از مسیر حرکت بعضی از الکترون‌ها در داخل ناحیه خاکستری که میدان الکتریکی در آن نفوذ کرده است قرار می‌گیرد

می‌خواهیم اطلاعاتی در مورد جرم موثر بلور پیدا کنیم که معادل دانستن سطح فرمی است

پس اگر فرکانس میدان الکتریکی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که:

$$\omega = n \omega_c$$

فرکانس الکتریکی میدان

عدد صحیح

فرکانس سیکلوترونی

$$\omega = n \omega_c$$

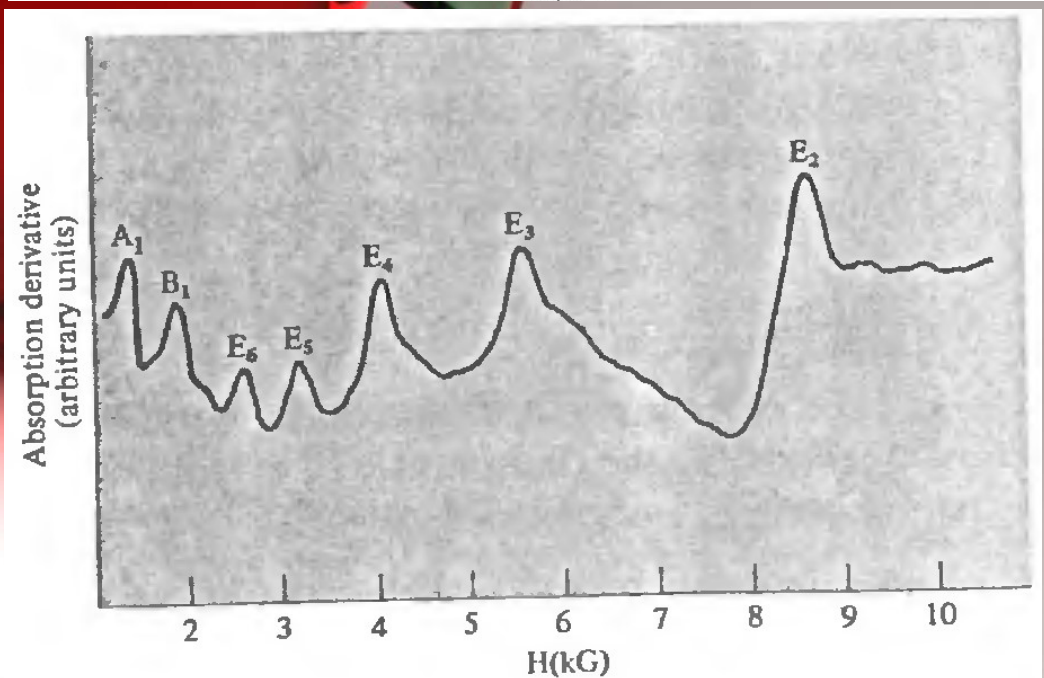
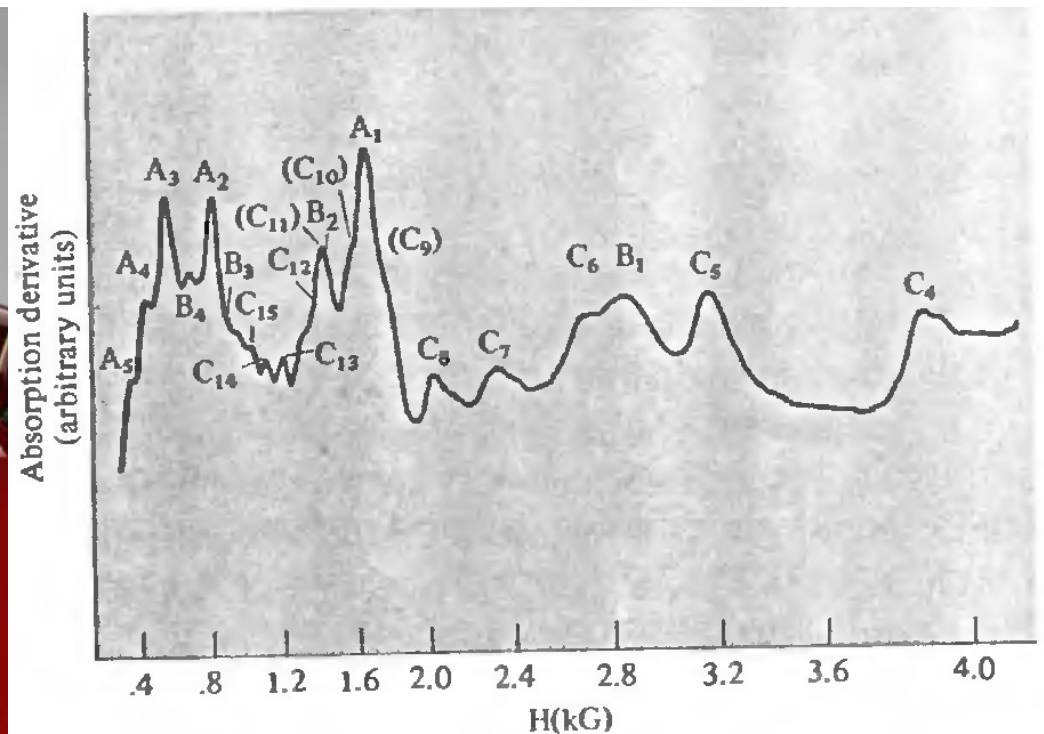


الکترون در داخل پوسته با میدان الکتریکی روبرو خواهد شد

آنگاه تشدید صورت می‌گیرد

بنابراین تشدید صورت می‌گیرد

Typical cyclotron resonance peaks in aluminum at two different field orientations. Peaks in the field derivative of the absorbed power due to four distinct extremal cyclotron masses can be identified. (Peaks due to the same extremal mass are spaced uniformly in $1/H$, as can be verified by careful examination of the figure.) (T. W. Moore and F. W. Spong, *Phys. Rev.* 125, 846 (1962).)



$$\omega = \text{const.}$$

$$\omega = n \omega_c$$

$$\delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{2\pi e B}{\hbar^2 \omega} \frac{d\varepsilon}{dA_k}$$

اگر فرکانس میدان الکتریکی را ثابت فرض کنیم

آنگاه با تغییر میدان مغناطیسی می توانیم یک فرکانس سیکلوترونی به دست آوریم به طوری که شرط تشدید برقرار شود

با داشتن فرکانس سیکلوترونی و با استفاده از رابطه زیر

تعیین و از روی آن جرم موثر را به دست آورد

$$\frac{d\varepsilon}{dA_k}$$

می توان

با استفاده از جرم موثر نیز می توان اطلاعاتی راجع به سطح فرمی کسب کرد

$$T = \oint dt = \oint \frac{dt}{dk} dk = \oint \frac{\hbar dt}{e |\mathbf{v} \times \mathbf{B}|} dk = \frac{\hbar}{e} \oint \frac{dt}{v_{\perp} B} dk$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon$$

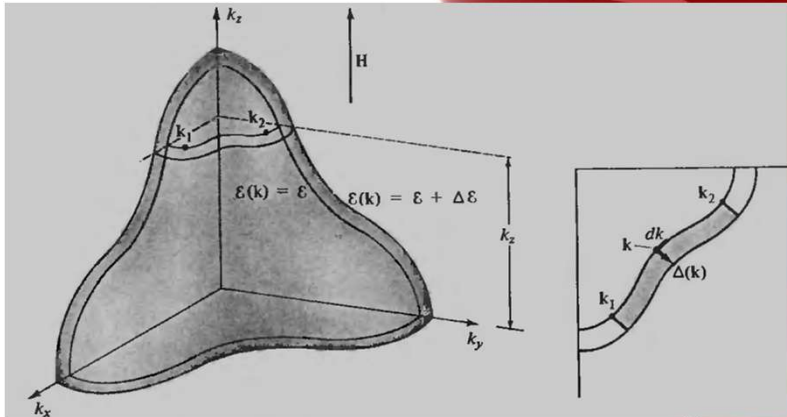
$$v_{\perp} = \frac{1}{\hbar} \frac{\delta \varepsilon}{\delta k_{\perp}}$$

$$T = \frac{\hbar^2}{e} \int \frac{dk \delta k_{\perp}}{B \delta \varepsilon}$$

$$T = \frac{\hbar^2}{eB} \frac{\int \delta k_{\perp} dk}{\delta \varepsilon}$$

$$T = \frac{\hbar^2}{eB} \frac{\delta A_k}{\delta \varepsilon}$$

$$T_{\delta \varepsilon \rightarrow 0} = \frac{\hbar^2}{eB} \frac{dA_k}{d\varepsilon}$$

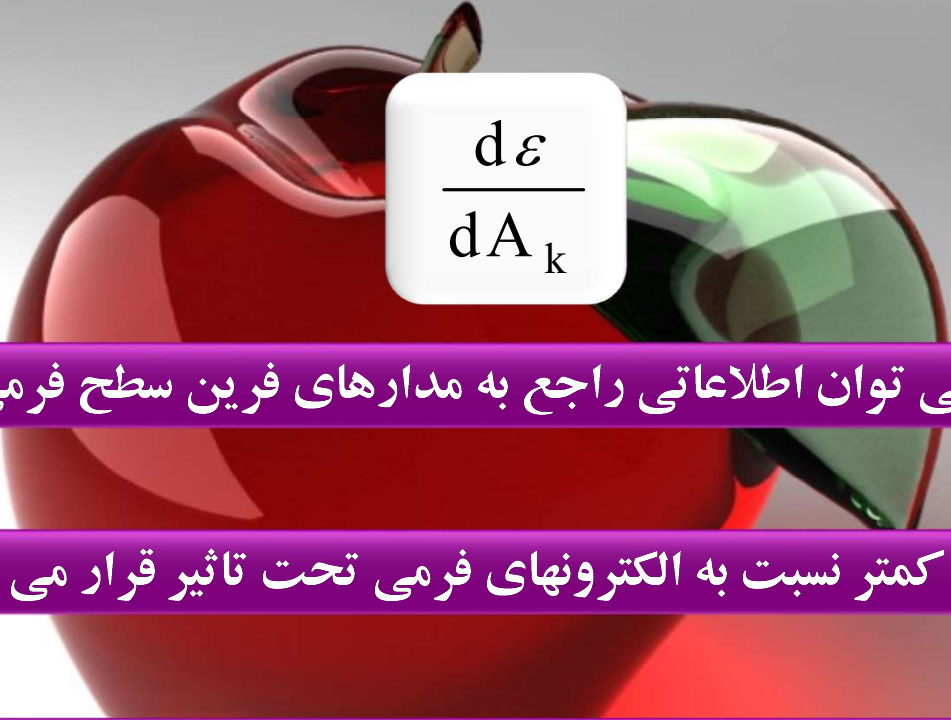


$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_c = \frac{2\pi eB}{\hbar^2} \frac{d\varepsilon}{dA_k}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*}$$

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{dA_k}{d\varepsilon}$$

پس با دانستن جرم موثر یا دوره تناوب یا فرکانس سیکلوترونی به ازای اندازه ها و جهتهای مختلف میدان مغناطیسی می توانیم اطلاعاتی راجع به کمیت زیر به دست آوریم


$$\frac{d\varepsilon}{dA_k}$$

که با استفاده از آن می توان اطلاعاتی راجع به مدارهای فرین سطح فرمی به دست آورد

الکترونهای داخلی تر کمتر نسبت به الکترونهای فرمی تحت تاثیر قرار می گیرند

و از بین الکترونهای فرمی نیز آنهایی که روی سطح فرین هستند بیشتر تحت تاثیر قرار می گیرند

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}},$$

$$\hbar \dot{\mathbf{k}} = (-e) \frac{1}{c} \mathbf{v}(\mathbf{k}) \times \mathbf{H}.$$

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{k_1}^{k_2} \frac{dk}{|\dot{\mathbf{k}}|}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{\hbar^2 c}{eH} \int_{k_1}^{k_2} \frac{dk}{|(\partial \varepsilon / \partial \mathbf{k})_{\perp}|}$$

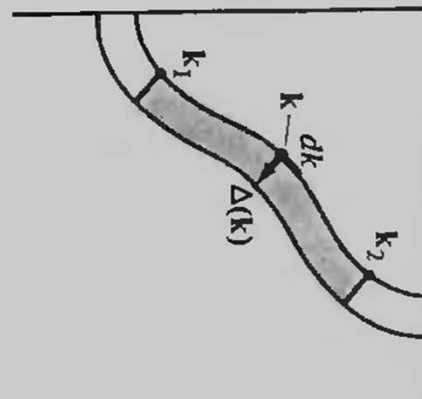
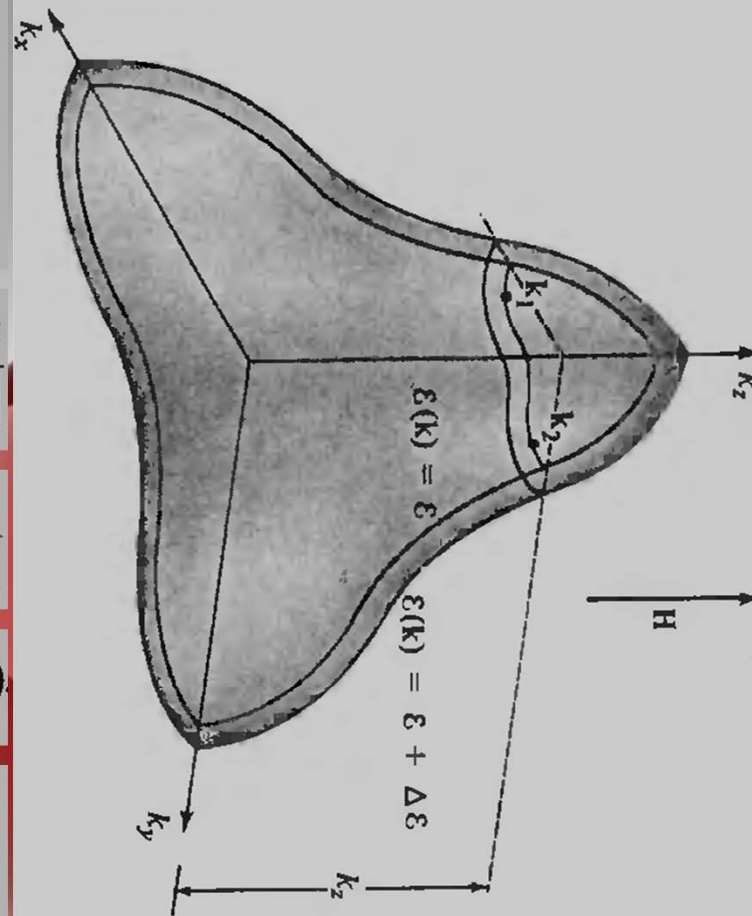
$$\Delta \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{k}} \cdot \Delta(\mathbf{k}) = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{k}} \right)_{\perp} \cdot \Delta(\mathbf{k})$$

$$\Delta \varepsilon = \left| \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{k}} \right)_{\perp} \right| \Delta(k)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{\hbar^2 c}{eH} \frac{1}{\Delta \varepsilon} \int_{k_1}^{k_2} \Delta(k) dk$$

$$t_2 - t_1 = \frac{\hbar^2 c}{eH} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial \varepsilon}$$

$$T(\varepsilon, k_z) = \frac{\hbar^2 c}{eH} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} A(\varepsilon, k_z).$$



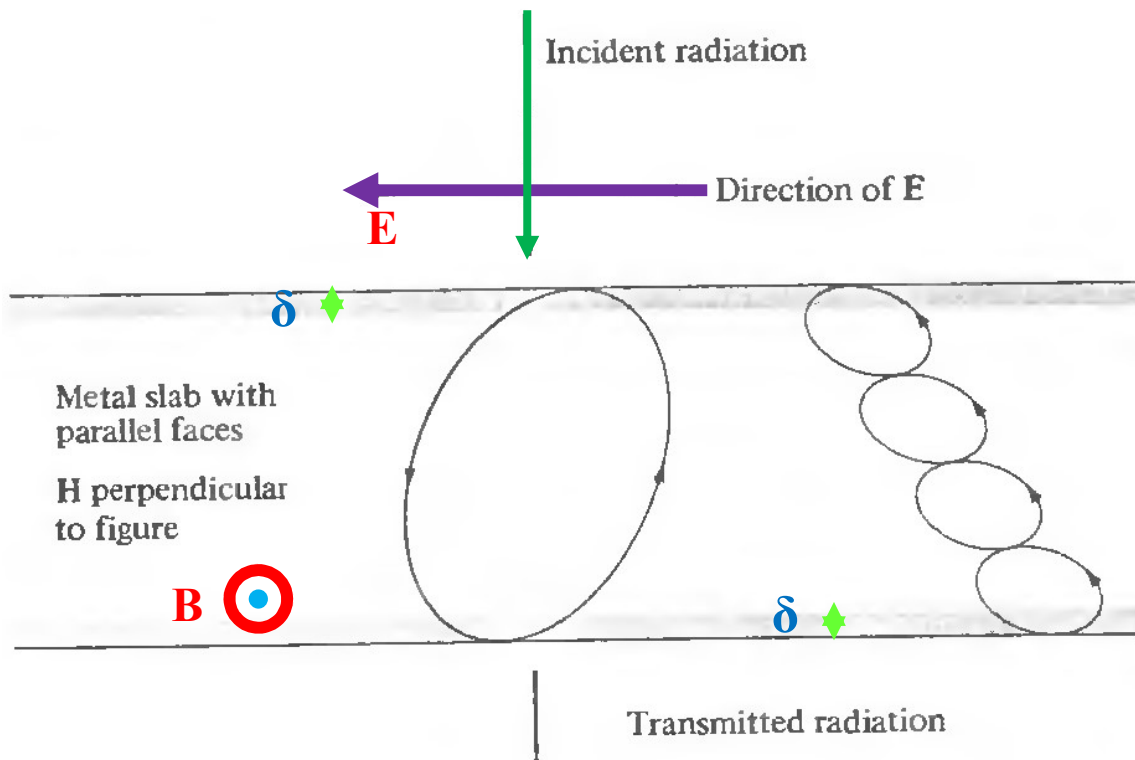
$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m c}{eH}$$

$$m^*(\varepsilon, k_z) = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial A(\varepsilon, k_z)}{\partial \varepsilon}$$

$$m^* = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k^2} \right)^{-1}$$

پس با داشتن جرم موثر
می توان سطح فرمی را
به دست آورد

(ب) پدیده گانت-ماخر



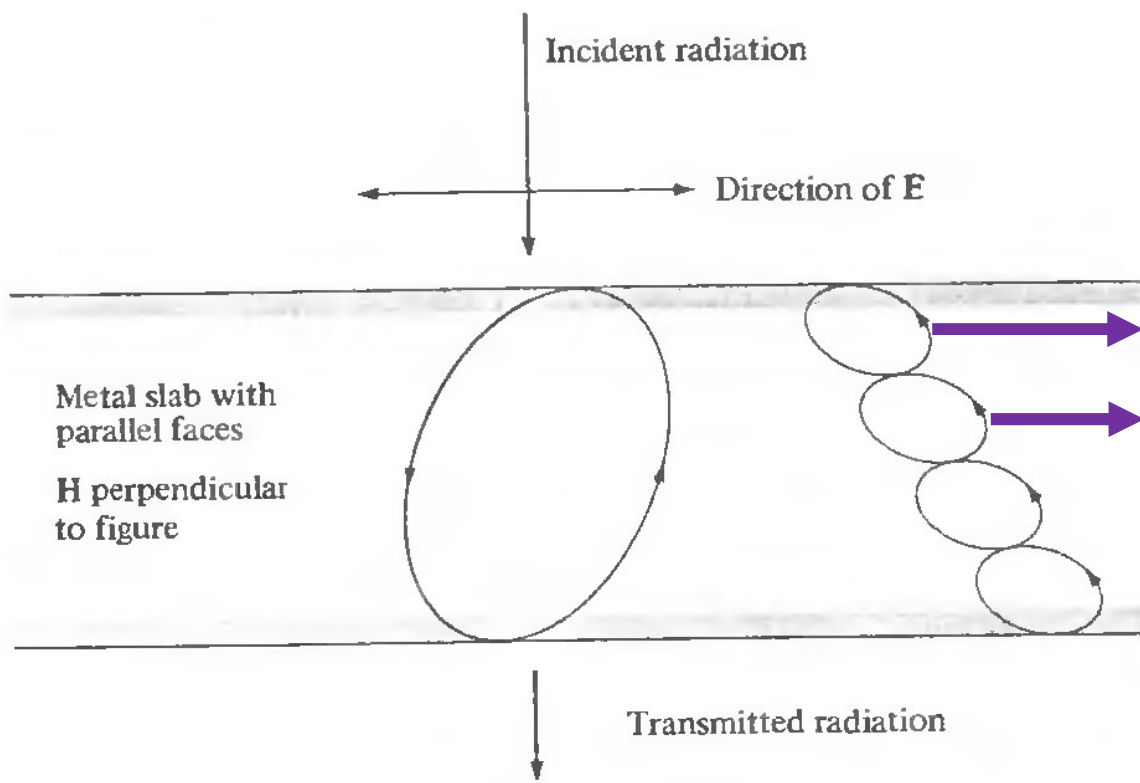
در این روش فیلم نازک از یک بلور
فلزی را انتخاب می کنیم.

سپس آن را در یک میدان
مغناطیسی یکنواخت مطابق شکل
قرار می دهیم

حال یک میکروویو را مطابق شکل بر آن می تابانیم که جهت قطبش آن عمود بر میدان
مغناطیسی باشد

اگر ضخامت لایه به اندازه قطر یک مدار (یا مضرب
صحیحی از قطر یک مدار) حرکت الکترون ناشی از
میدان مغناطیسی باشد تشدید موج عبوری از طرف دیگر
لایه نازک مشاهده خواهد شد.

فقط الکترونیایی که به درون لایه
(ناحیه هاشور خورده) نفوذ می
کنند قادر به تابش به سمت دیگر
لایه هستند.



الکترون این مدار از میدان نفوذ کرده انرژی می گیرد

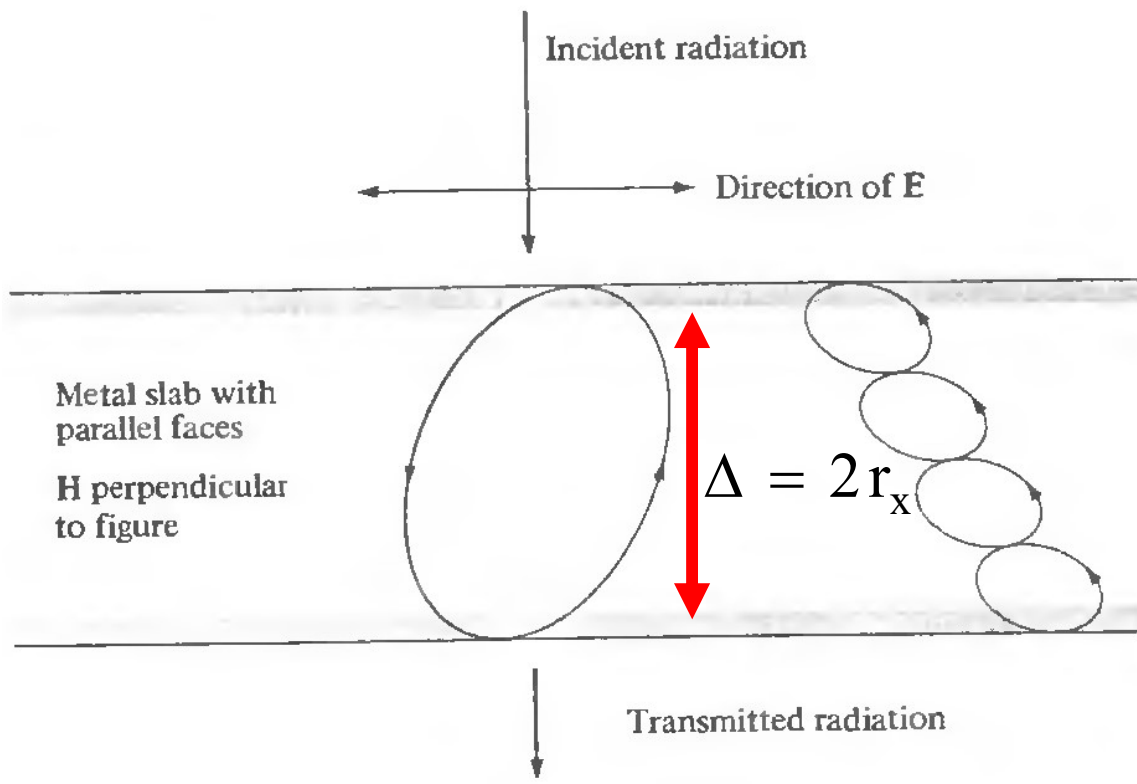
الکترون این مدار از میدان الکترون بالا انرژی کسب می کند

بدین ترتیب انتقال انرژی تا لایه های زیرین ادامه می یابد

و در نهایت از طرف دیگر لایه خارج می شود

مشاهده تشدید با تغییر میدان مغناطیسی معرف تشکیل مدارهای فرین ناشی از الکترونهای سطح فرمی است.

پس با تغییر اندازه و جهت میدان مغناطیسی می توان سطح فرمی را به دست آورد



$$2r_x = \frac{\hbar c}{e \delta B} 2k_y = \Delta$$

$$\delta B = \frac{2\hbar k_y c}{e} \frac{1}{\Delta}$$

به این ترتیب با تغییر میدان مغناطیسی مولفه عرضی بردار موج به دست می آید و از روی آن سطح فرمی با تغییر جهت های میدان و اندازه های آن به دست می آید.