

پٹانسیل الکتریکی



اختلاف پتانسیل و پتانسیل الکتریکی

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

کار انجام شده (dW) توسط میدان الکتریکی ($\vec{E}$) روی بار آزمون (q_0) برای یک جابه جایی بینهایت کوچک ($d\vec{s}$)

$$dU = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

تغییر انرژی پتانسیل دستگاه بار-میدان (dU) برای یک جابه جایی بینهایت کوچک ($d\vec{s}$)

کار انجام شده روی یک دستگاه توسط نیروهای خارجی سبب افزایش ولی توسط نیروهای داخلی سبب کاهش انرژی پتانسیل آن دستگاه می شوند

علامت منفی ناشی از آن است که کار توسط میدان روی بار انجام می شود، پس انرژی دستگاه بار-میدان کاهش می یابد

$$\Delta U = U_B - U_A \\ = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

تغییر انرژی پتانسیل دستگاه بار-میدان (ΔU) برای یک جابه جایی متناهی ($\Delta\vec{s}$) از نقطه A به نقطه B

انتگرال گیری در امتداد مسیری انجام می شود که بار آزمون q_0 روی آن هنگام رفتن از A به B حرکت می کند

این انتگرال گیری روی خط (مسیر) به مسیر حرکت بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدایی A و انتهایی B بستگی دارد

زیرا نیروی $q_0 \vec{E}$ کنسرواتیو یا بقادار است

نیرویی که فقط تابعی از مکان باشد، و کرل آن صفر شود، کنسرواتیو (بقادار) نامیده می شود، زیرا به قضیه بقا مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل منجر می گردد.

حال به تعریف پتانسیل مستقل از بار آزمون می پردازیم

برای یک مکان داده شده از بار آزمون در میدان، دستگاه بار-میدان یک انرژی پتانسیل U ، نسبت به وضعیت ساختاری ای (configuration) از دستگاه که در آن $U = 0$ باشد، دارد

تقسیم کردن انرژی پتانسیل بر بار آزمون یک کمیت فیزیکی را به دست می دهد که فقط به چشمه توزیع بار بستگی دارد

انرژی پتانسیل بر واحد بار $\frac{U}{q_0}$ مستقل از مقدار q_0 است و دارای یک مقدار در هر نقطه در یک میدان الکتریکی دارد

$$V = \frac{U}{q_0}$$

این کمیت، $\frac{U}{q_0}$ ، انرژی پتانسیل بر واحد بار یا پتانسیل الکتریکی یا به طور ساده پتانسیل نام دارد

پتانسیل یک کمیت اسکالر است، زیرا انرژی پتانسیل و بار آزمون هر دو اسکالرند

همان طور که تغییر انرژی پتانسیل دستگاه بار-میدان (dU) برای یک جابه جایی متناهی ($\Delta \vec{S}$) از نقطه A به نقطه B را تعریف کردیم، می توانیم تغییر پتانسیل دستگاه رانیز به صورت زیر تعریف کنیم:

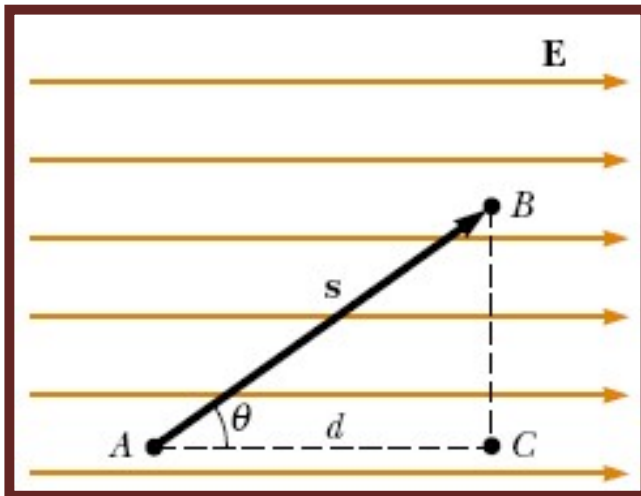
$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q_0} = \frac{U_B - U_A}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

اختلاف پتانسیل در یک میدان الکتریکی یکنواخت

$$V_B - V_A = \Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_A^B (E \cos 0^\circ) ds = - \int_A^B E ds$$

$$\Delta V = -E \int_A^B ds = -Ed$$

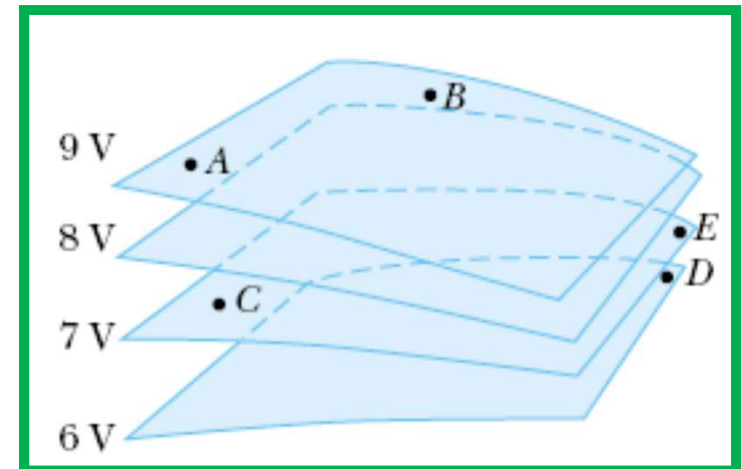
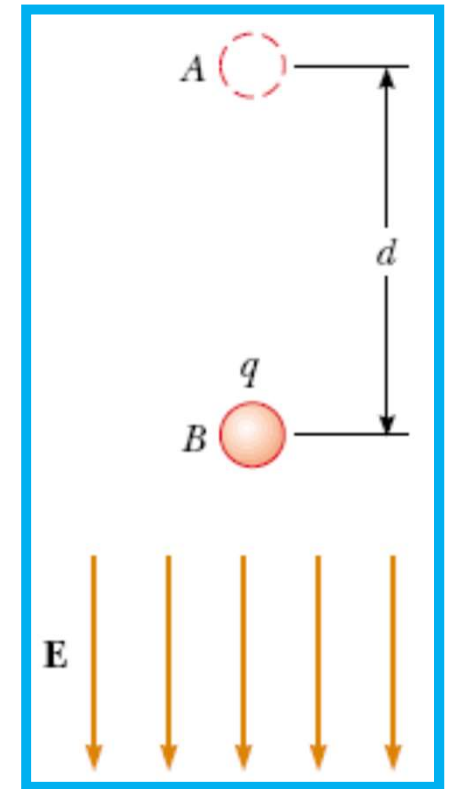
$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 Ed$$



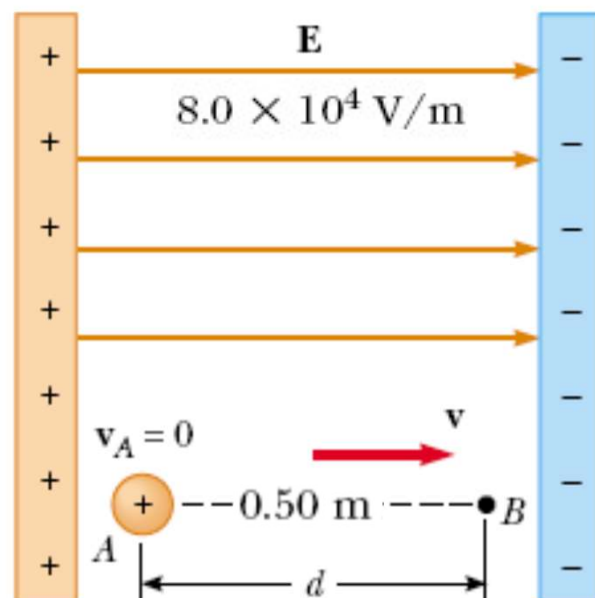
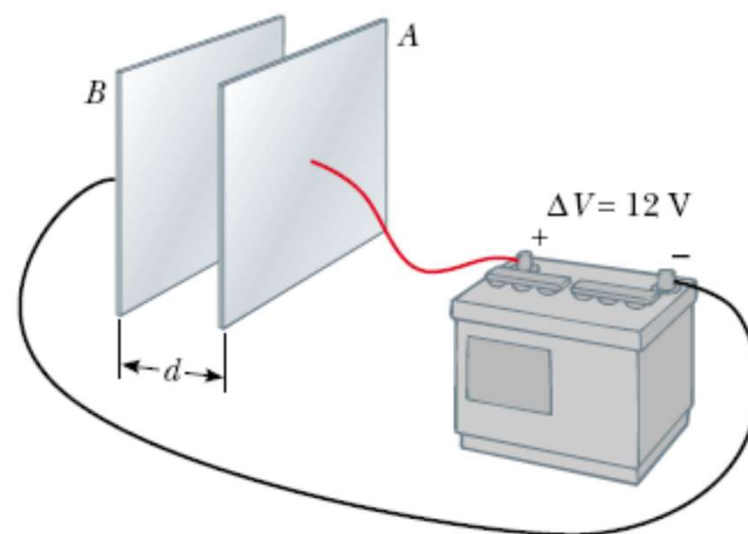
$$\Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \mathbf{E} \cdot \int_A^B d\mathbf{s} = - \mathbf{E} \cdot \mathbf{s}$$

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = -q_0 E s \cos \theta = -q_0 Ed$$

Therefore, $V_B = V_C$. The name equipotential surface is given to any surface consisting of a continuous distribution of points having the same electric potential.



$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12 \text{ V}}{0.30 \times 10^{-2} \text{ m}} = 4.0 \times 10^3 \text{ V/m}$$



$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) + e \Delta V = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{-(2e \Delta V)}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{-2(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(-4.0 \times 10^4 \text{ V})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}}$$

$$= 2.8 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\Delta V = -Ed = -(8.0 \times 10^4 \text{ V/m})(0.50 \text{ m}) = -4.0 \times 10^4 \text{ V}$$

$$\Delta U = q_0 \Delta V = e \Delta V$$

$$= (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(-4.0 \times 10^4 \text{ V})$$

$$= -6.4 \times 10^{-15} \text{ J}$$

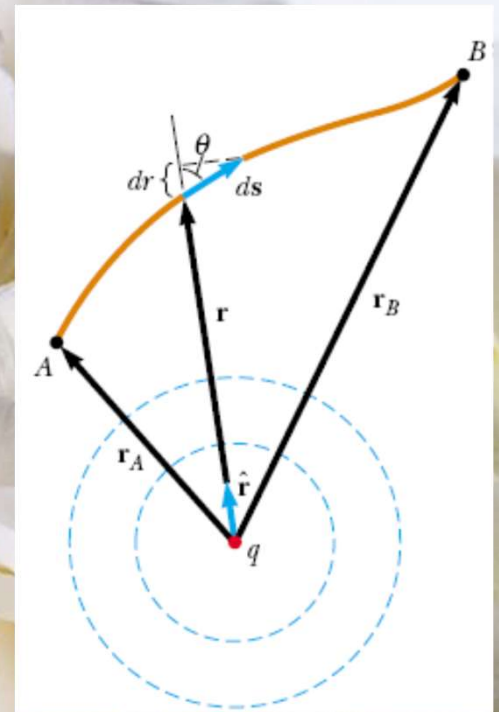
پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل بارهای نقطه ای

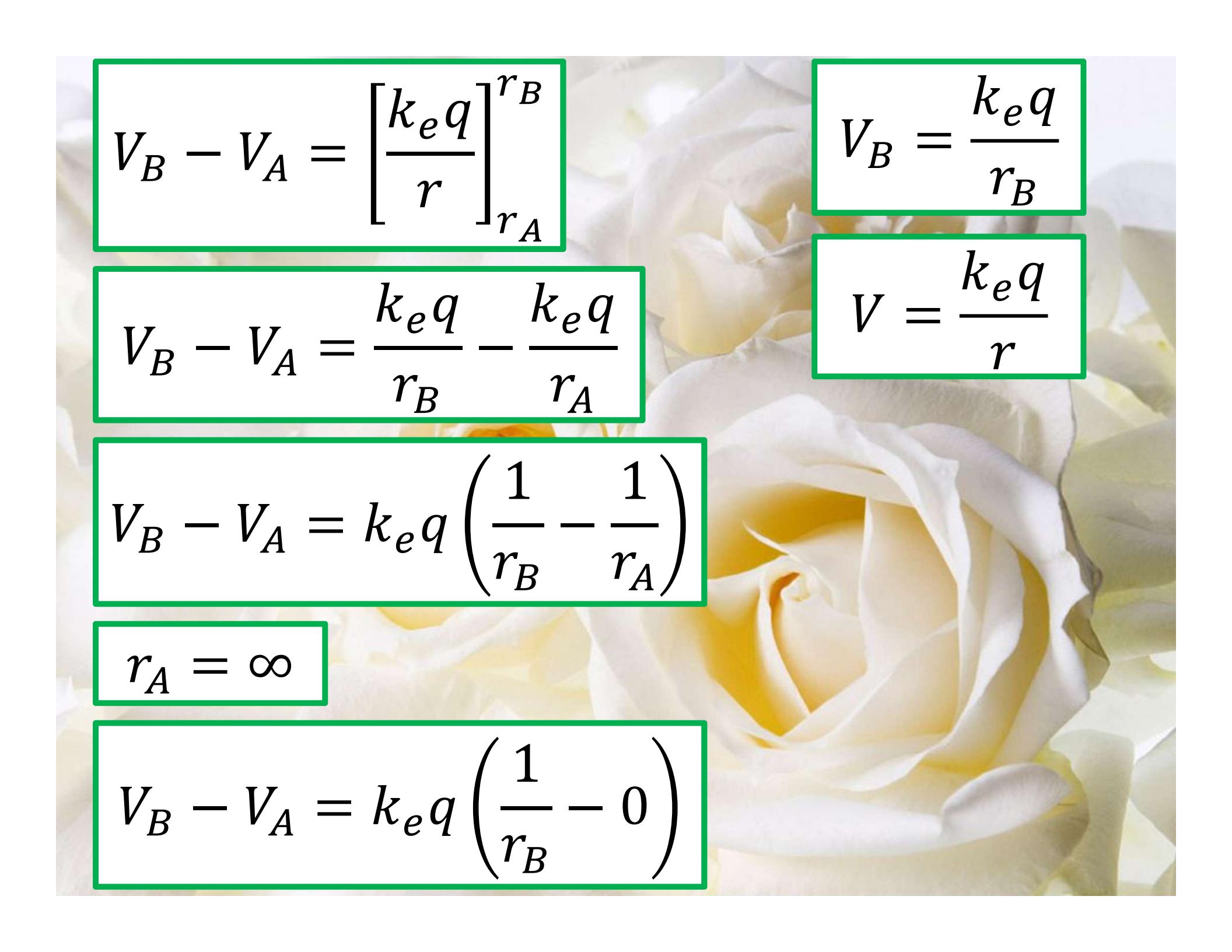
$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$V_B - V_A = - \int_A^B \frac{k_e q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

$$V_B - V_A = - \int_A^B \frac{k_e q}{r^2} ds \cos\theta$$

$$V_B - V_A = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{k_e q}{r^2} dr$$




$$V_B - V_A = \left[\frac{k_e q}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B = \frac{k_e q}{r_B}$$

$$V_B - V_A = \frac{k_e q}{r_B} - \frac{k_e q}{r_A}$$

$$V = \frac{k_e q}{r}$$

$$V_B - V_A = k_e q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$r_A = \infty$$

$$V_B - V_A = k_e q \left(\frac{1}{r_B} - 0 \right)$$

این معادله بیان می کند که انتگرال $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ مستقل از مسیر بین نقاط A و B است

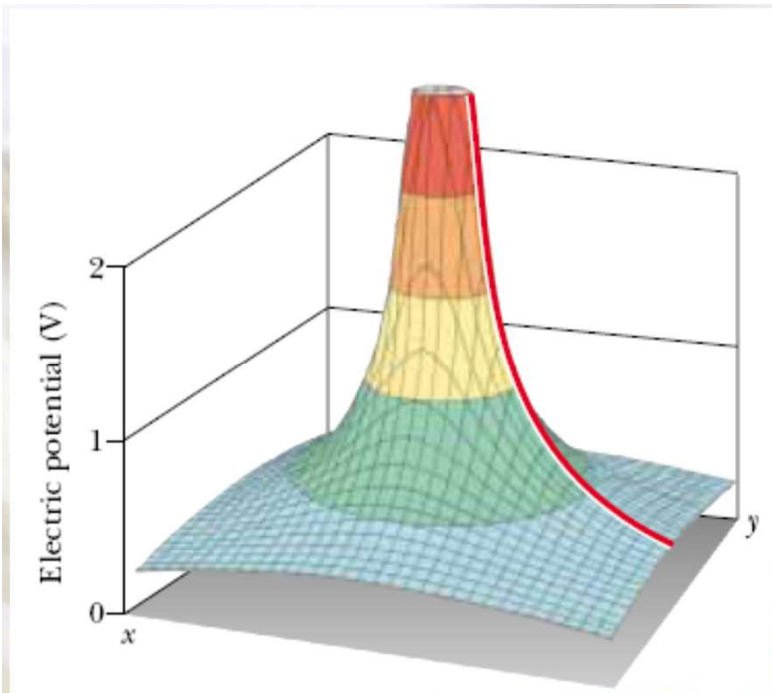
با ضرب پتانسیل در بار آزمون q_0 که بین نقاط A و B حرکت می کند، ملاحظه می کنیم که انتگرال $q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$ هم مستقل از مسیر است

انتگرال $q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$ کار انجام شده توسط میدان الکتریکی است، و استقلال از مسیر آن به ما می گوید که نیروی الکتریکی کنسرواتیو است

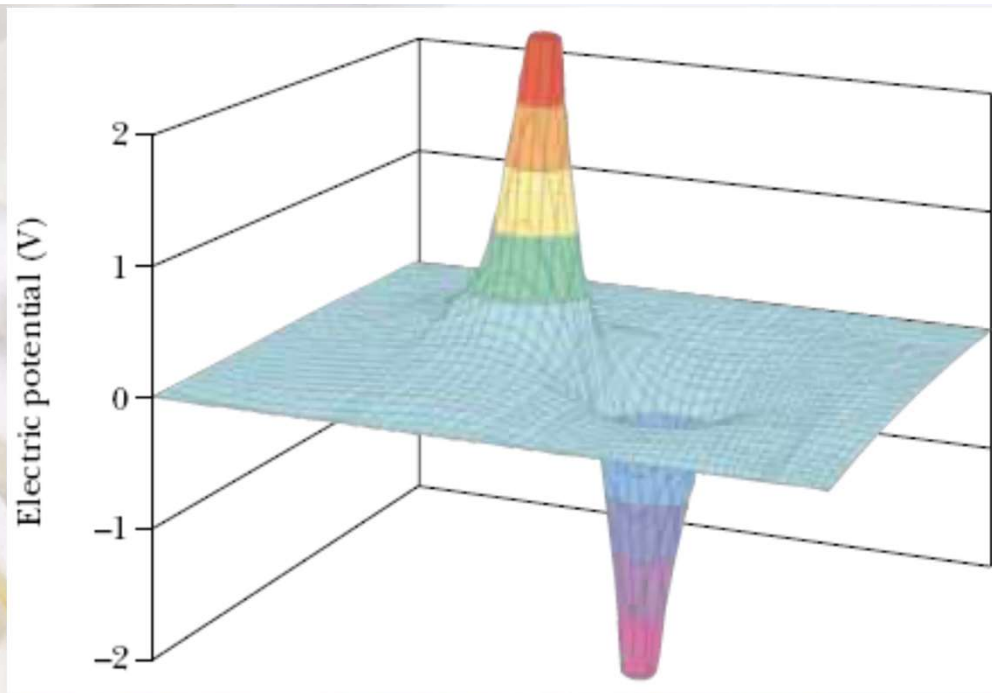
میدان کنسرواتیو را به صورت میدانی تعریف می کنیم که به یک نیروی کنسرواتیو مربوط شده باشد.

بنابراین میدان الکتریکی یک بار نقطه ای یک میدان کنسرواتیو است

بعلاو نتیجه به دست آمده به ما می گوید که پتانسیل بین دو نقطه A و B فقط به مختصه های شعاعی بستگی دارد

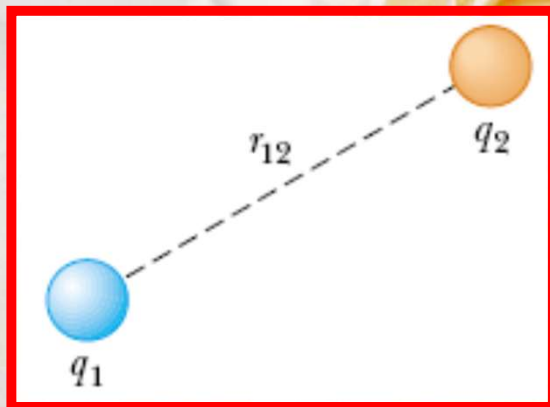
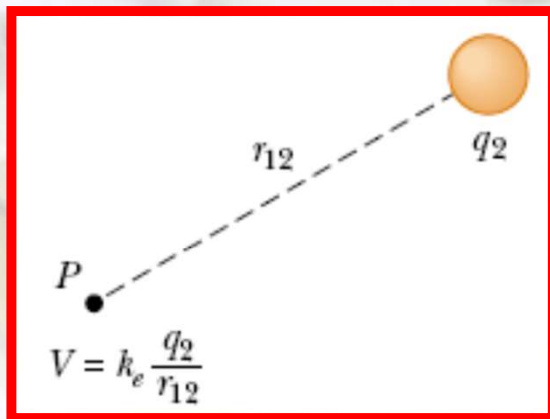


$$V = \frac{k_e q}{r}$$

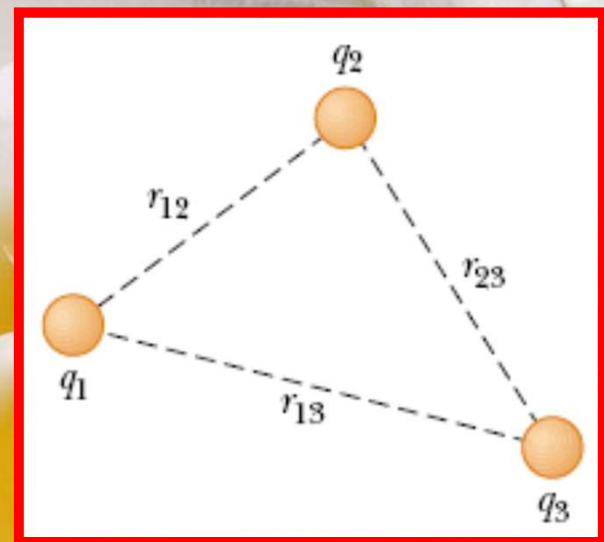


$$V = \frac{k_e q}{r_1} - \frac{k_e q}{r_2}$$

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{k_e q_i}{r_i}$$

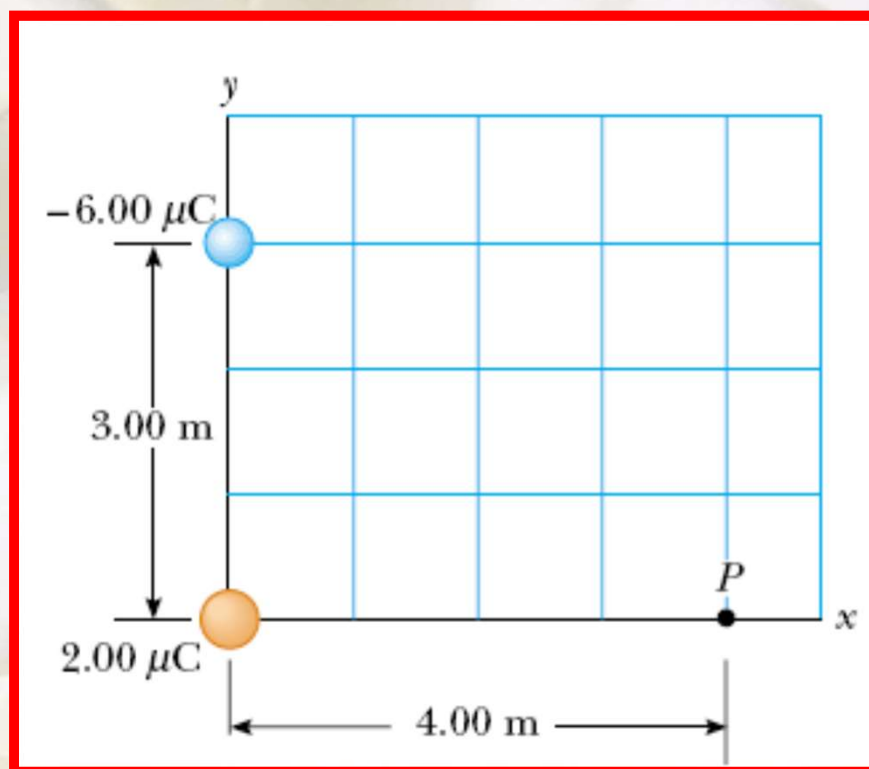


$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



$$U = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

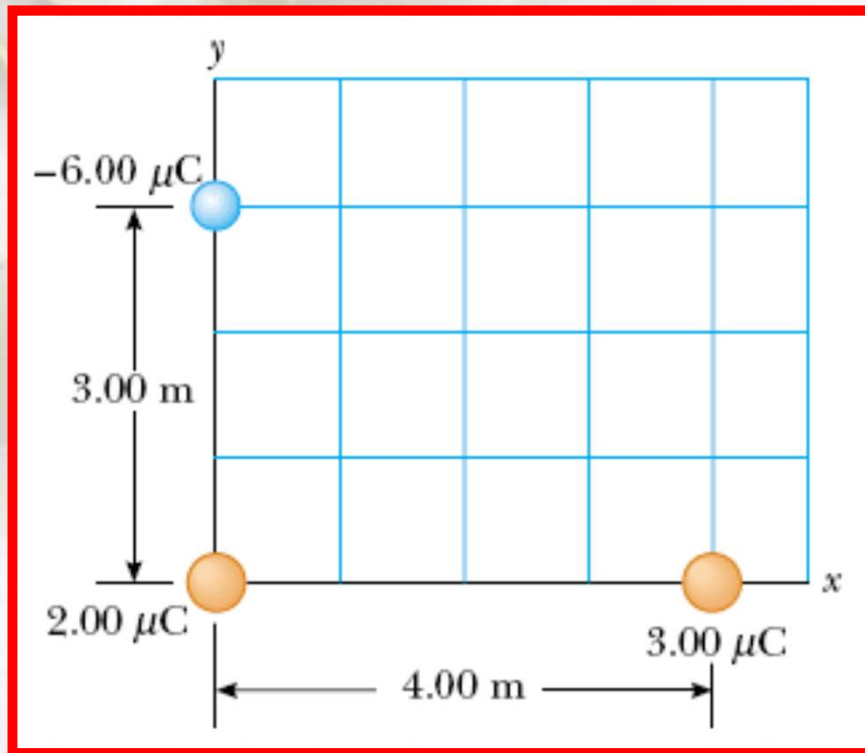
مثال: الف) پتانسیل الکتریکی را در شکل زیر در نقطه P به دست آورید:



$$V_P = k_e \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

$$\begin{aligned} V_P &= (8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \\ &\times \left(\frac{2.00 \times 10^{-6} \text{ C}}{4.00 \text{ m}} - \frac{6.00 \times 10^{-6} \text{ C}}{5.00 \text{ m}} \right) \\ &= -6.29 \times 10^3 \text{ V} \end{aligned}$$

مثال: ب) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی را پس از آن که بار سومی از بینهایت به آرامی به نقطه P آورده شد حساب کنید:



چرا این جواب صحیح است؟

چون:

انرژی پتانسیل قبل از بار سوم:

$$U_i = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

و انرژی پتانسیل بعد از بار سوم:

$$U_f = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

$$\Delta U = q_3 V_P - 0$$

$$= (3.00 \times 10^{-6} \text{ C})(-6.29 \times 10^3 \text{ V})$$

$$= -1.89 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$\Delta U = U_f - U_i = k_e q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) = q_3 V_P$$

سطوح همپتانسیل یک بار نقطه ای را به دست آورید

$$V = k_e \frac{q}{r} = \text{Constant}$$

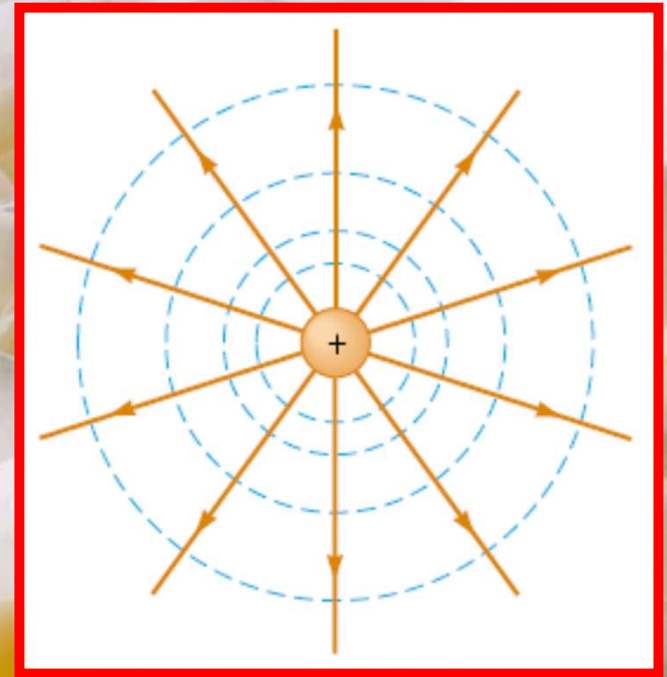
$$k_e \frac{q}{r} = C_1$$

$$r = k_e \frac{q}{C_1} = \text{Constant}$$

$$r = C_2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C_2 = R$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



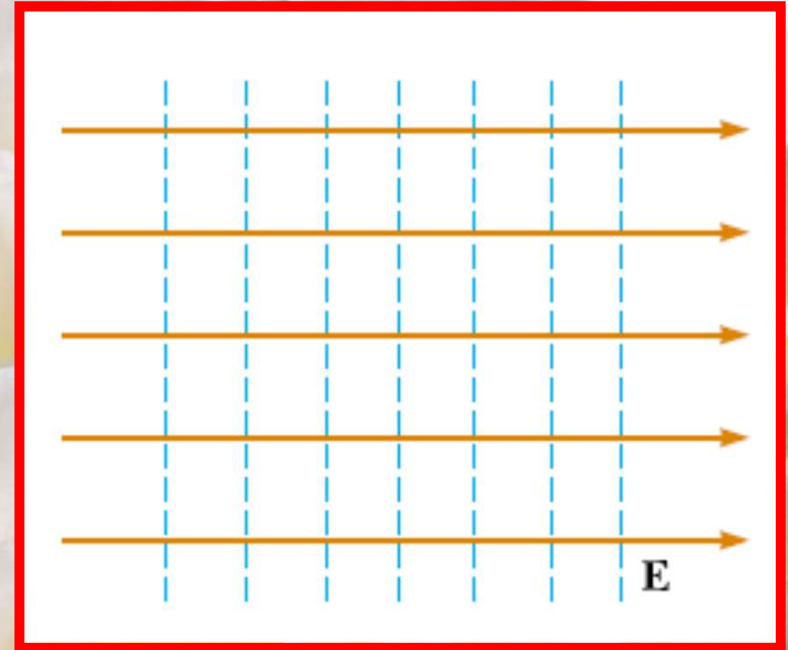
سطوح همپتانسیل یک میدان الکتریکی یکنواخت را به دست آورید

$$V = \vec{E} \cdot \vec{d} = \text{Constant}$$

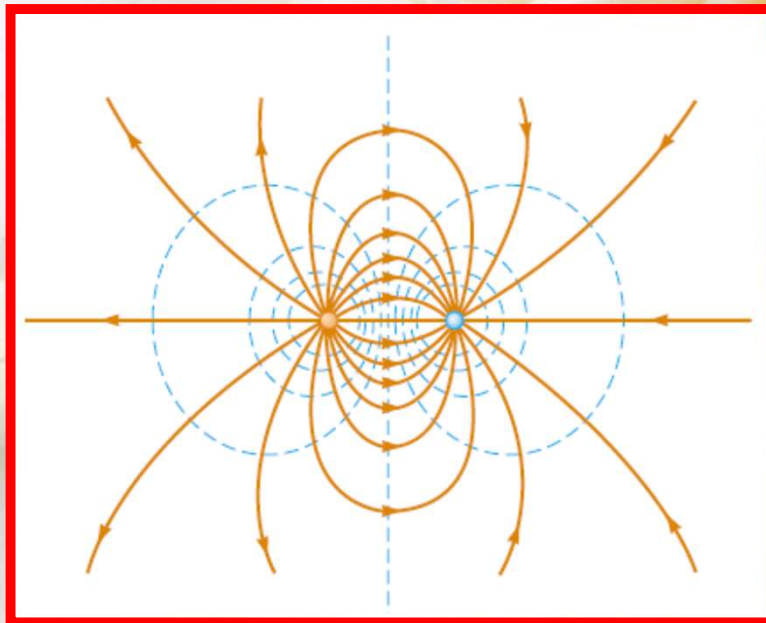
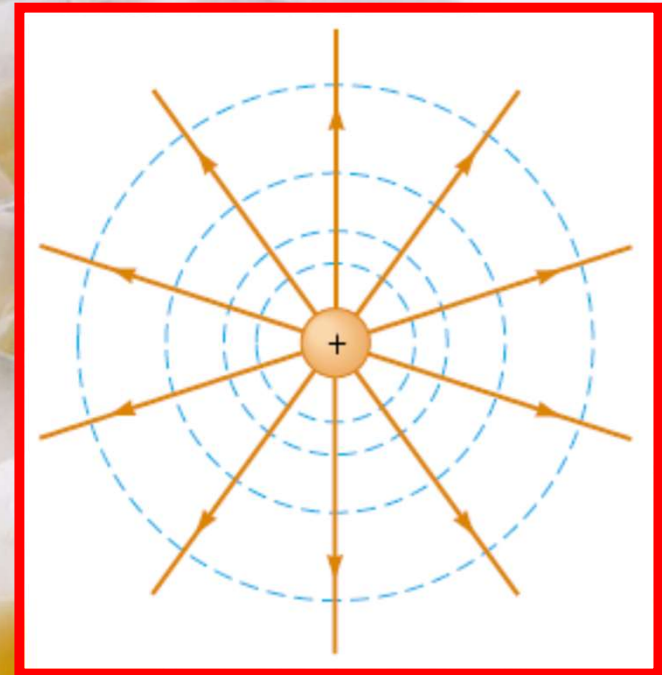
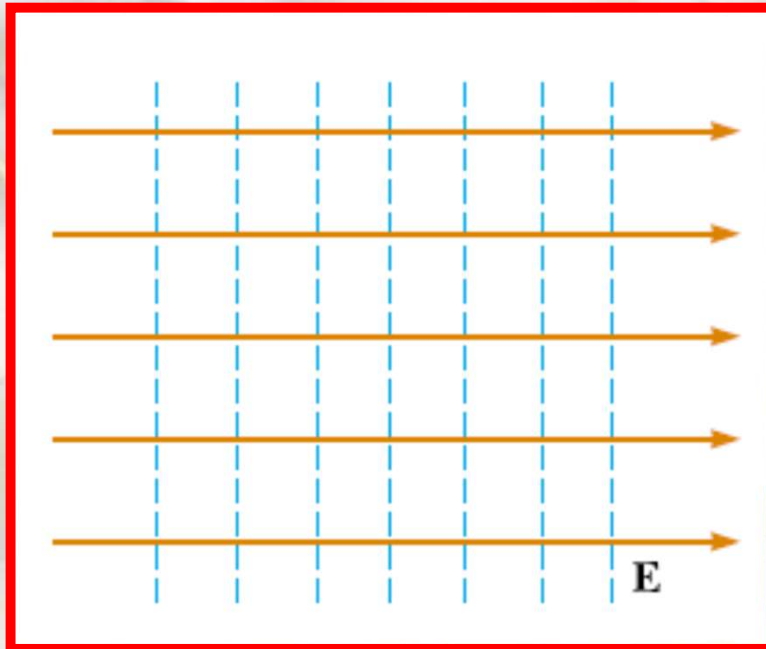
$$(E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) \cdot (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) = C$$

$$E_x x + E_y y + E_z z = C$$

$$ax + by + cz + d = 0$$



محاسبه میدان الکتریکی با استفاده از پتانسیل الکتریکی



$$\Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$dV = - \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$E_x = - \frac{dV}{dx}$$

مثال: میدان الکتریکی پتانسیل الکتریکی زیر را به دست آورید:

$$V = 3x^2y + y^2 + yz$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y + y^2 + yz) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y) = 3y \frac{d}{dx} (x^2) = 6xy$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y + y^2 + yz) = 3x^2 + 2y + z$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (3x^2y + y^2 + yz) = y$$

$$\vec{E} = -6xy\hat{i} - (3x^2 + 2y + z)\hat{j} - y\hat{k}$$

Quick Quiz 25.8 In a certain region of space, the electric potential is zero everywhere along the x axis. From this we can conclude that the x component of the electric field in this region is (a) zero (b) in the $+x$ direction (c) in the $-x$ direction.

(a). If the potential is constant (zero in this case), its derivative along this direction is zero.

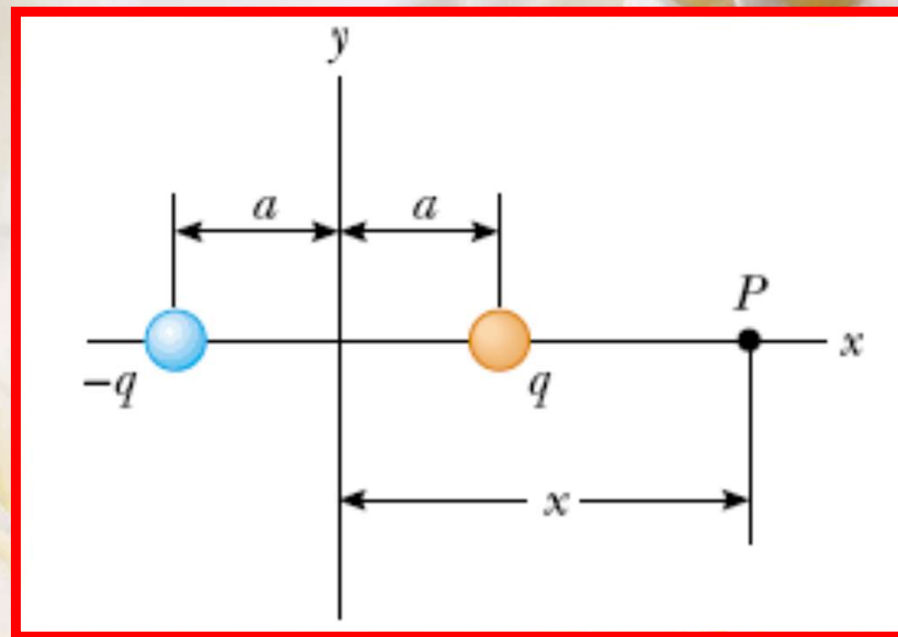
دقت کنید که پتانسیل باید در همه جا صفر باشد تا بتوان نتیجه گرفت که میدان نیز صفر است

یعنی اگر پتانسیل در یک نقطه صفر باشد نمی توان نتیجه گرفت که میدان نیز صفر است

Quick Quiz 25.9 In a certain region of space, the electric field is zero. From this we can conclude that the electric potential in this region is (a) zero (b) constant (c) positive (d) negative.

(b). If the electric field is zero, there is no change in the electric potential and it must be constant. This constant value *could be* zero but does not *have to be* zero.

مثال: الف) پتانسیل الکتریکی دو قطبی زیر را در نقطه P واقع در سمت راست دوقطبی به دست آورید:



$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x - a} - \frac{q}{x + a} \right) = \frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

(ب) پتانسیل و میدان الکتریکی را در فواصل خیلی دور به دست آورید

$$V \approx \frac{2k_e qa}{x^2} \quad (x \gg a)$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{4k_e qa}{x^3} \quad (x \gg a)$$

(ج) پتانسیل و میدان الکتریکی را در نقطه ای دلخواه بین دو قطبی روی محور x-ها به دست آورید:

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{a-x} - \frac{q}{a+x} \right) = \frac{2k_e qx}{a^2 - x^2}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{2k_e qx}{a^2 - x^2} \right) = -2k_e q \left(\frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2} \right)$$

$$x = 0$$

(د) پتانسیل و میدان الکتریکی در مرکز دو قطبی؟

$$V = \frac{2k_e q(0)}{a^2 - 0^2} = 0$$

$$E_x = -2k_e q \frac{a^2 + 0^2}{(a^2 - 0^2)^2} = -\frac{2k_e q}{a^2}$$

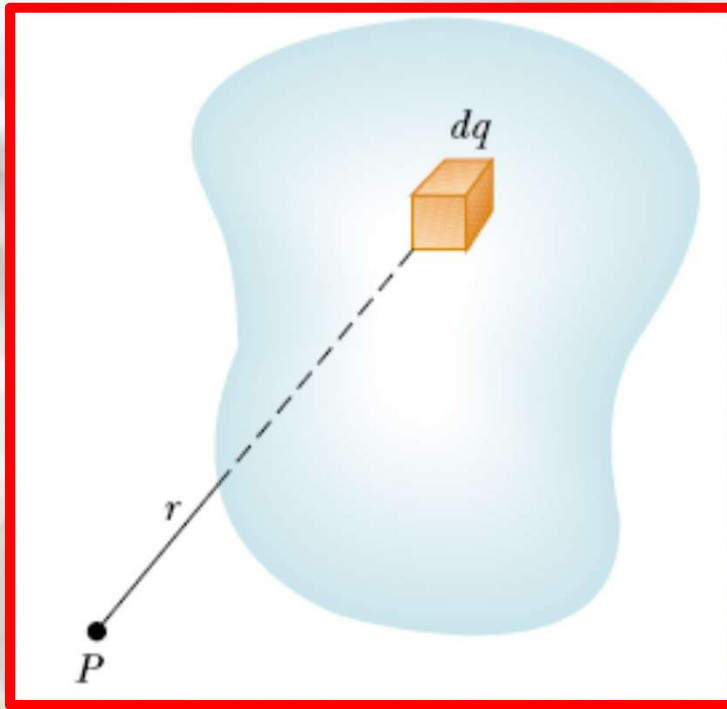
(و) پتانسیل الکتریکی دو قطبی زیر را در نقطه P واقع در سمت چپ دوقطبی به دست آورید:

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x+a} - \frac{q}{x-a} \right) = -\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

که مقدار آن با پتانسیل الکتریکی دو قطبی در نقطه P واقع در سمت راست دوقطبی برابر است ولی با علامت منفی

نکته: پتانسیل الکتریکی در سمت چپ و سمت راست دوقطبی هرگز صفر نمی شود مگر در بینهایت، ولی پتانسیل الکتریکی بین دوقطبی در مرکز آن صفر می شود

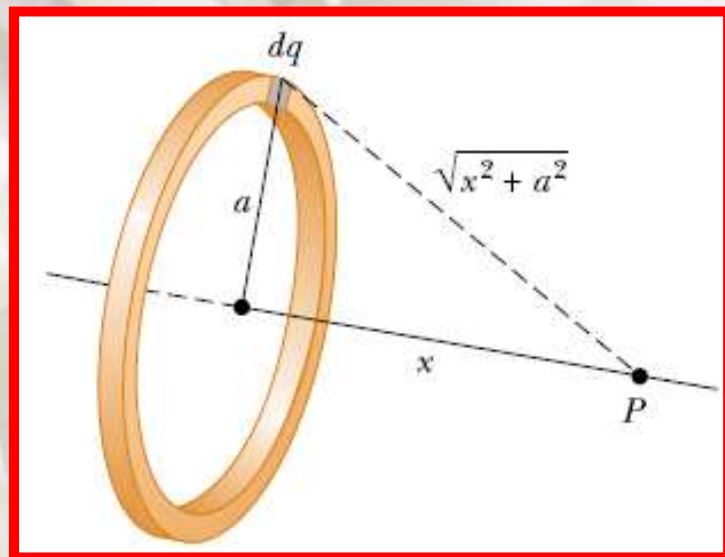
پتانسیل الکتریکی توزیع بارهای پیوسته



$$dV = k_e \frac{dq}{r}$$

$$V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

مثال: الف) پتانسیل الکتریکی حلقه بار دار زیر را که در آن بار به صورت یکنواخت توزیع شده است را در نقطه P به دست آورید



$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$V = \frac{k_e}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

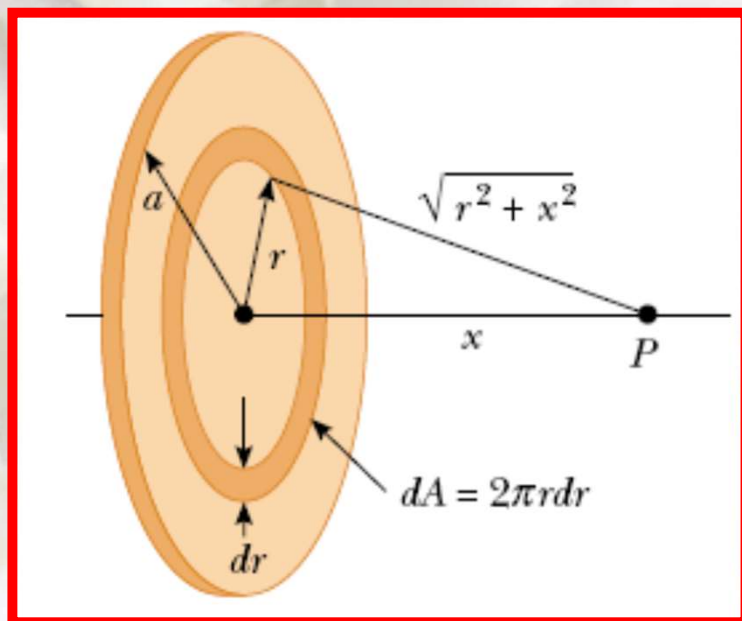
ب) میدان الکتریکی را در نقطه P به دست آورید

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e Q \frac{d}{dx} (x^2 + a^2)^{-1/2}$$

$$= -k_e Q \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + a^2)^{-3/2} (2x)$$

$$E_x = \frac{k_e Q x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

مثال: الف) پتانسیل الکتریکی دیسک بار دار زیر را که در آن بار به صورت یکنواخت توزیع شده است را در نقطه P به دست آورید



$$dV = \frac{k_e dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k_e \sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

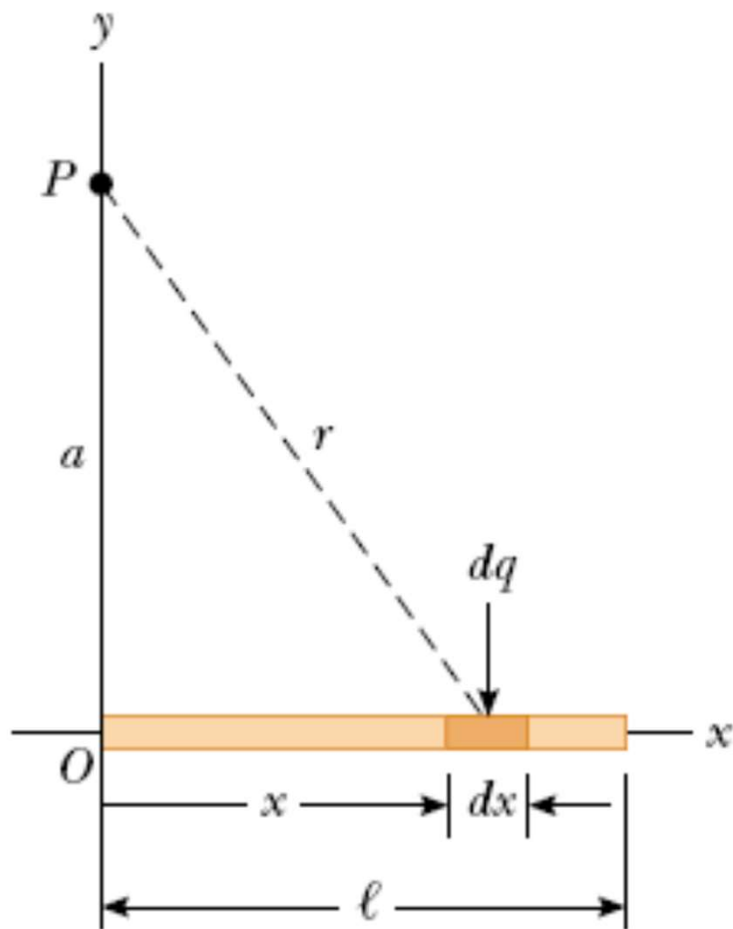
$$V = \pi k_e \sigma \int_0^a \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \pi k_e \sigma \int_0^a (r^2 + x^2)^{-1/2} 2r dr$$

$$V = 2\pi k_e \sigma [(x^2 + a^2)^{1/2} - x]$$

ب) میدان الکتریکی را در نقطه P به دست آورید

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k_e \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$$

مثال: پتانسیل الکتریکی میله بار دار زیر را که در آن بار به صورت یکنواخت توزیع شده است را در نقطه P به دست آورید



$$dV = \frac{k_e dq}{r} = \frac{k_e \lambda dx}{\sqrt{y^2 + x^2}}$$

$$V = k_e \lambda \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{y^2 + x^2}}$$

$$V = k_e \lambda \int_0^l \frac{dx}{y \sqrt{1 + (x/y)^2}}$$

$$\frac{x}{y} = \tan \theta$$

$$x = y \tan \theta$$

$$dx = y(1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

$$V = k_e \lambda \int \frac{y(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{y \sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = k_e \lambda \int \sqrt{1 + \tan^2 \theta} d\theta = k_e \lambda \int \sec \theta d\theta$$

$$V = k_e \lambda \int \sec \theta d\theta = k_e \lambda \int \sec \theta \frac{\sec \theta + \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta = k_e \lambda \int \frac{\sec \theta \tan \theta + \sec^2 \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta$$

$$\sec \theta + \tan \theta = u$$

$$(\sec \theta \tan \theta + \sec^2 \theta) d\theta = du$$

$$V = k_e \lambda \int \frac{du}{u} = \ln |u|$$

$$V = k_e \lambda \ln |\sec \theta + \tan \theta|$$

$$\frac{x}{y} = \tan \theta$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + (x/y)^2} = \sqrt{y^2 + x^2} / y$$

$$V = k_e \lambda \ln \left| \frac{x + \sqrt{y^2 + x^2}}{y} \right|$$

$$V = k_e \lambda \ln \left| x + \sqrt{y^2 + x^2} \right| - k_e \lambda \ln y$$

$$V = k_e \lambda \left[\ln \left| x + \sqrt{y^2 + x^2} \right| - k_e \lambda \ln y \right]_0^l$$

$$V = k_e \lambda \left[\ln \left| l + \sqrt{y^2 + l^2} \right| - k_e \lambda \ln y - \ln |y| + k_e \lambda \ln y \right]$$

$$V = k_e \lambda \ln \left| \frac{l + \sqrt{y^2 + l^2}}{y} \right|$$

$$V = k_e \frac{Q}{l} \ln \left| \frac{l + \sqrt{y^2 + l^2}}{y} \right|$$

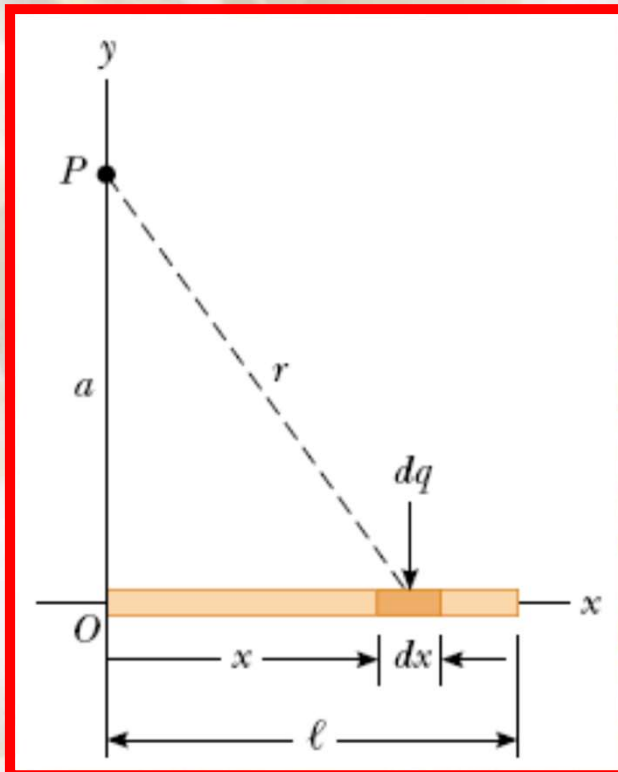
آیا در این مثال نیز می توان میدان الکتریکی این میله را در نقطه P با استفاده از پتانسیل الکتریکی به دست آمده در قسمت قبل به دست آورد؟

پاسخ: خیر سوال: چرا؟

چون میدان در نقطه P دارای 2 مولفه است (یکی در راستای x یکی در راستای y)

مولفه میدان در راستای y را می توان اما در راستای x را نمی توان به دست آورد

چرا؟ چون پتانسیل به دست آمده فقط تابع y است

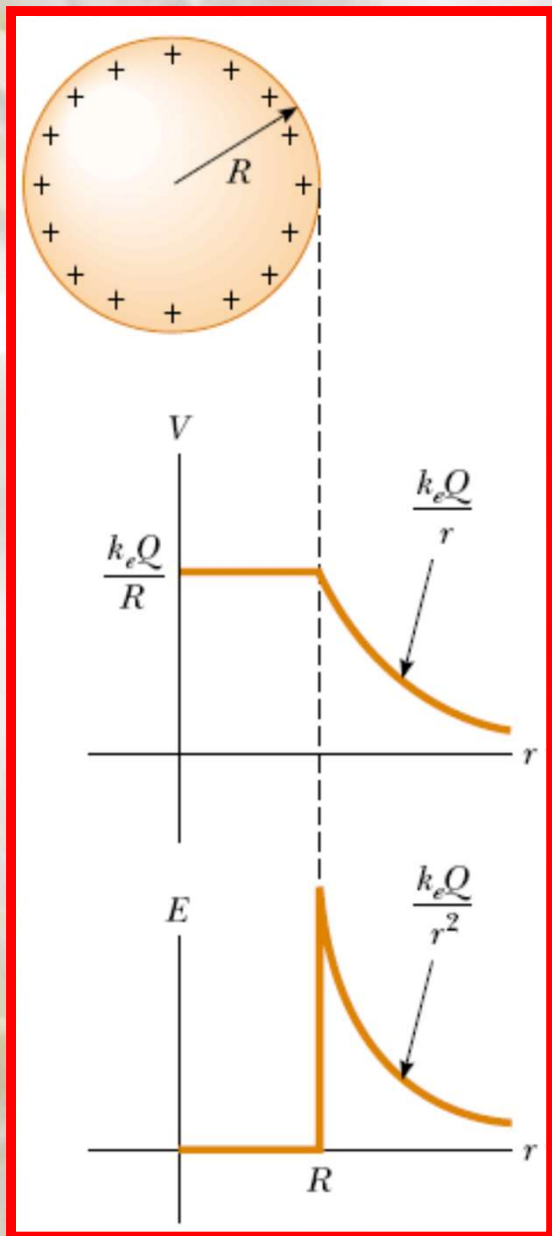


برای محاسبه مولفه x-میدان چه باید کرد؟

باید نقطه P را کلی در صفحه نظر بگیریم نه به طور خاص روی محور

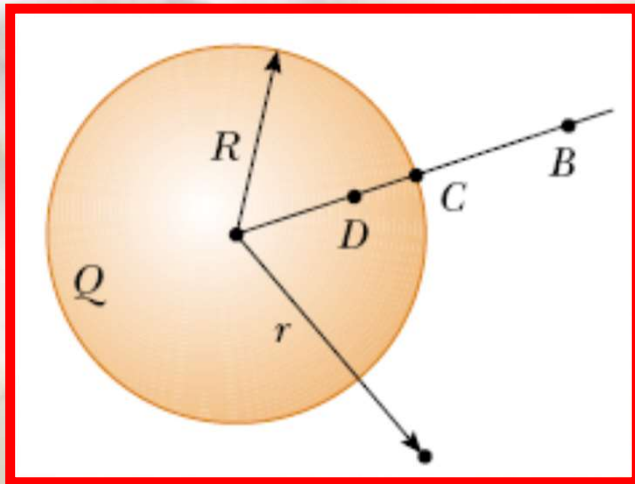
$$V = k_e \frac{Q}{l} \ln \left| \frac{l + \sqrt{y^2 + l^2}}{y} \right|$$

پتانسیل الکتریکی یک هادی بار دار



$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

پتانسیل الکتریکی یک عایق کروی باردار در خارج کره



$$E_r = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{for } r > R)$$

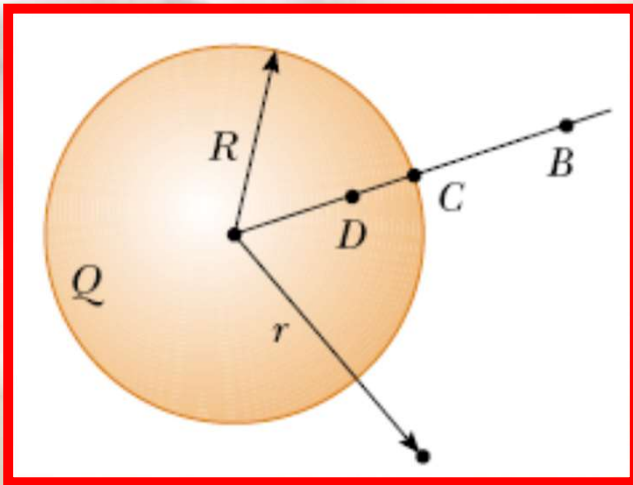
$$V_B - V_A = k_e Q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

$$V_B - 0 = k_e Q \left[\frac{1}{r_B} - 0 \right]$$

$$V_B = k_e \frac{Q}{r} \quad (\text{for } r > R)$$

$$V_C = k_e \frac{Q}{R} \quad (\text{for } r = R)$$

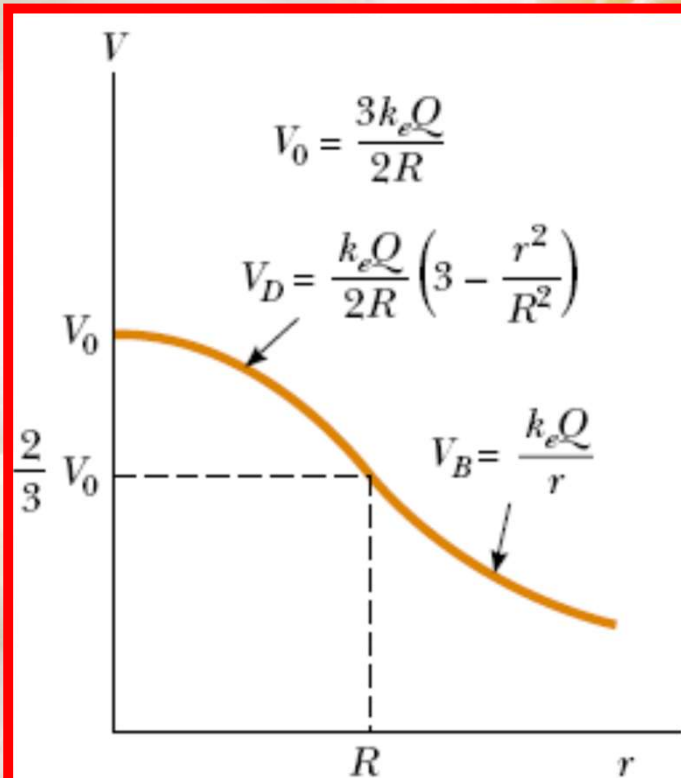
پتانسیل الکتریکی یک عایق کروی باردار در داخل کره



$$E_r = \frac{k_e Q}{R^3} r \quad (\text{for } r < R)$$

$$V_D - V_C = - \int_R^r E_r dr = - \frac{k_e Q}{R^3} \int_R^r r dr = \frac{k_e Q}{2R^3} (R^2 - r^2)$$

$$V_C = k_e Q / R$$



$$V_D = \frac{k_e Q}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (\text{for } r < R)$$