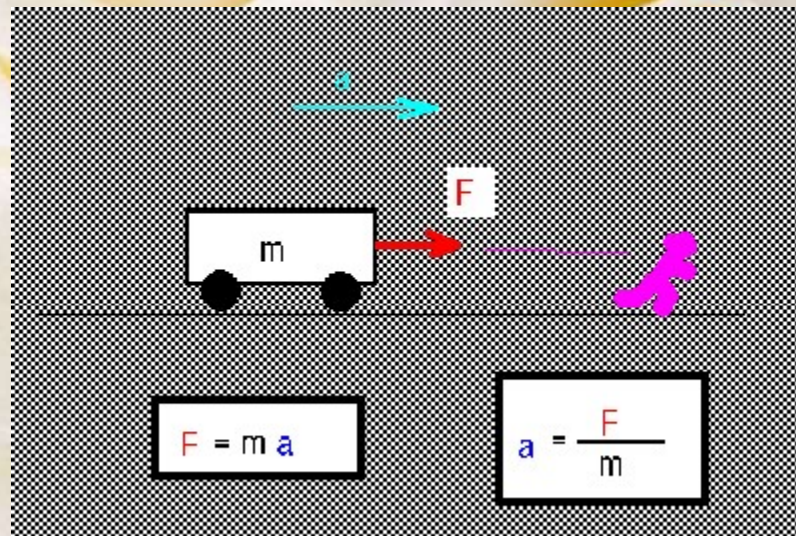


# چند مساله مقدماتی در مکانیک

از فصل 2 به طور سیستماتیک مطالعه مکانیک کلاسیک آغاز می شود

در اینجا به عنوان حسن ختام به حل چند مساله مقدماتی اکتفا می کنیم  
تا قوانین نیوتن مرور شوند

(1) حرکت یک جسم تحت تاثیر یک نیروی ثابت



$$F = ma$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a dt$$

$$dv = \frac{1}{m} F dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t F \frac{1}{m} dt$$

$$v - v_0 = F \frac{1}{m} t$$

$$v = v_0 + F \frac{1}{m} t$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + F \frac{1}{m} t$$

$$dx = \left( v_0 + F \frac{1}{m} t \right) dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left( v_0 + F \frac{1}{m} t \right) dt$$

$$x - x_0 = v_0 \int_0^t dt + \frac{F}{m} \int_0^t t dt$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

## (2) سقوط آزاد

$$F = -mg$$

$$F = ma$$

$$-mg = ma$$

$$-g = a$$

$$-g = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = -gdt$$

$$\int_{v_0}^v dv = -g \int_0^t dt$$

$$v - v_0 = -gt$$

$$v = v_0 - gt$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - gt$$

$$dx = (v_0 - gt)dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t (v_0 - gt)dt$$

$$x = v_0 \int_0^t dt - g \int_0^t t dt$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\frac{da}{dt} = J$$

$$da = Jdt$$

$$\int_{a_0}^a da = \int_0^t Jdt$$

$$a \Big|_{a_0}^a = Jt \Big|_0^t$$

$$a - a_0 = J(t - 0)$$

$$a = a_0 + Jt$$

$$\frac{dv}{dt} = Jt + a_0$$

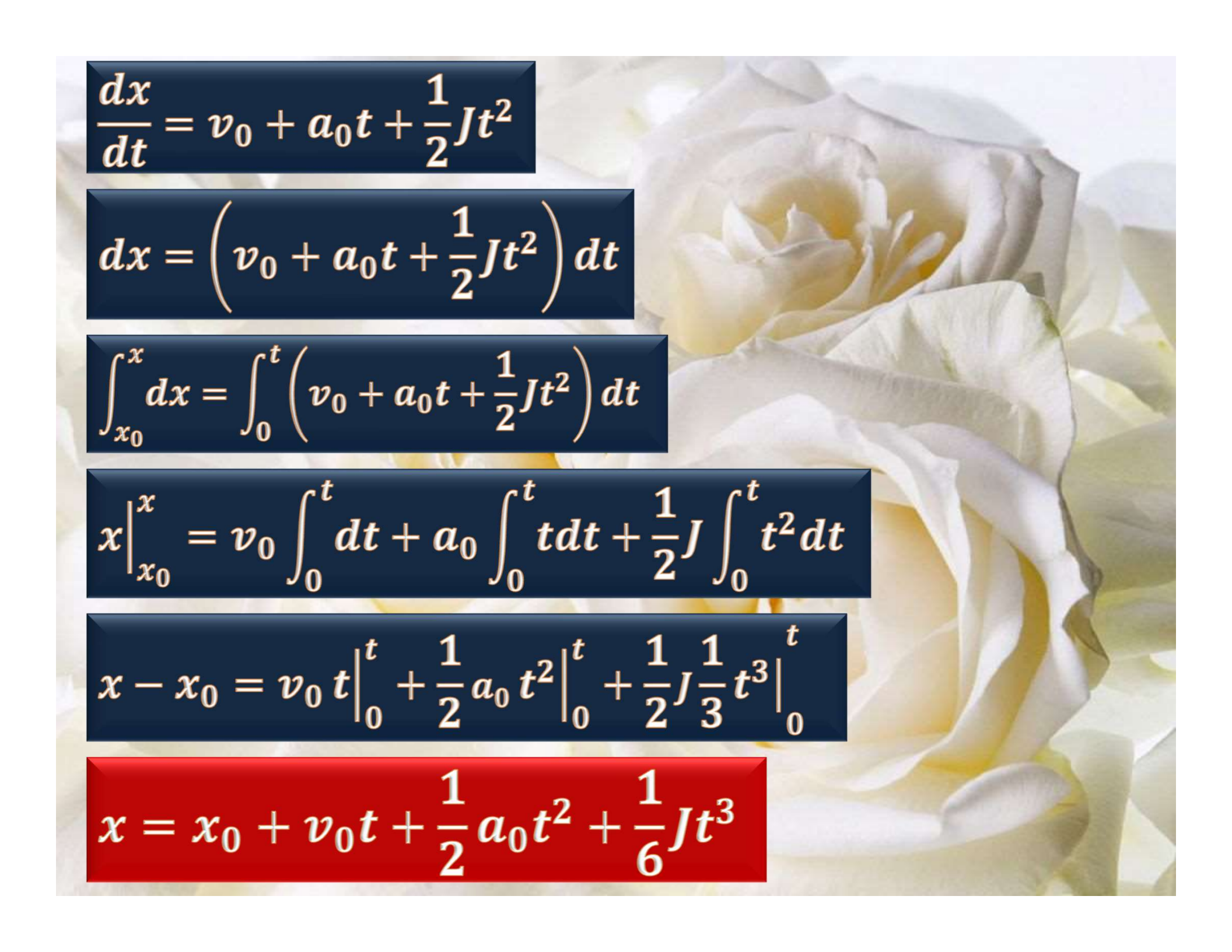
$$dv = (Jt + a_0)dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t (Jt + a_0)dt$$

$$v \Big|_{v_0}^v = J \int_0^t tdt + a_0 \int_0^t dt$$

$$v - v_0 = \frac{1}{2}Jt^2 \Big|_0^t + a_0 t \Big|_0^t$$

$$v = v_0 + a_0t + \frac{1}{2}Jt^2$$


$$\frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t + \frac{1}{2} J t^2$$

$$dx = \left( v_0 + a_0 t + \frac{1}{2} J t^2 \right) dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left( v_0 + a_0 t + \frac{1}{2} J t^2 \right) dt$$

$$x \Big|_{x_0}^x = v_0 \int_0^t dt + a_0 \int_0^t t dt + \frac{1}{2} J \int_0^t t^2 dt$$

$$x - x_0 = v_0 t \Big|_0^t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \Big|_0^t + \frac{1}{2} J \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \frac{1}{6} J t^3$$

## سقوط آزاد اجسام

یک جسم در حال سقوط آزاد به سمت پایین با شتاب ثابت  $g$  شتاب می یابد

در این صورت کافی است که در روابط زیر به جای  $a$  شتاب  $-g$  قرار دهیم:

$$v = at + v_0$$

$$v = -gt + v_0$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_A = 0$$

$$t_A = 0$$

$$v_A = 20 \text{ m/s}$$

$$a_A = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$$

A

$$v_B = 0 = -gt_B + v_A$$

$$= -9.8t_B + 20$$

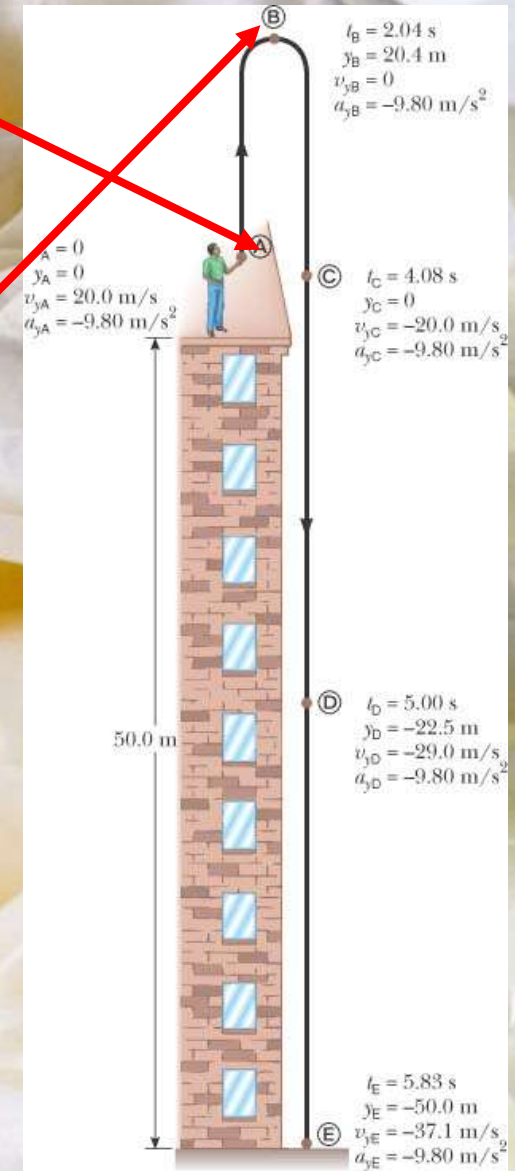
$$a_B = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$$

$$t_B = -\frac{20}{-9.8} = 2.04 \text{ s}$$

$$y_B = -\frac{1}{2}gt_B^2 + v_At_B + y_A$$

$$y_B = -\frac{1}{2}9.8(2.04)^2 + 20 \times 2.04 + 0 = 20.408$$

B



$$a_C = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$$

$$t_C = 2t_B = 4.08 \text{ s}$$

$$y_C = 0$$

$$v_C = -v_A = -20 \text{ m/s}$$

$$a_D = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$$

$$t_D = 5 \text{ s}$$

$$y_D = -\frac{1}{2}g(t_D - t_C)^2$$

$$+ v_C(t_D - t_C)$$

$$= -\frac{1}{2}9.8 \times (5 - 4.08)^2 - 20 \times (5 - 4.08) + 0 = -22.5$$

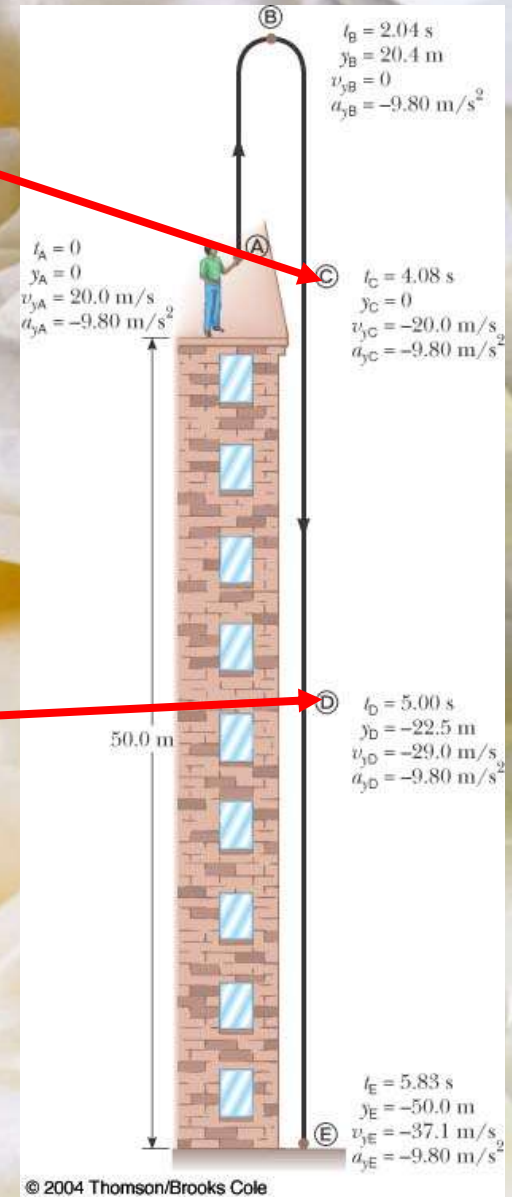
$$v_D = -g(t_D - t_C) + v_C$$

$$= -g(5 - 4.08) + v_C$$

$$= -29.0$$

C

D



$$a_E = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$$

$$y_E = -50 \text{ m}$$

$$v_E^2 - v_D^2 = -2g(y_E - y_D)$$

$$v_E = -\sqrt{29^2 - 2 \times 9.8 \times (-50 + 22.5)}$$

$$v_E = -37.148 \text{ m/s}$$

$$v_E = -g(t_E - t_D) + v_D$$

$$-37.1 = -9.8(t_E - 5) - 29$$

$$t_E = \frac{(-37.1 + 29)}{-9.8} + 5$$

$$= 5.83 \text{ s}$$

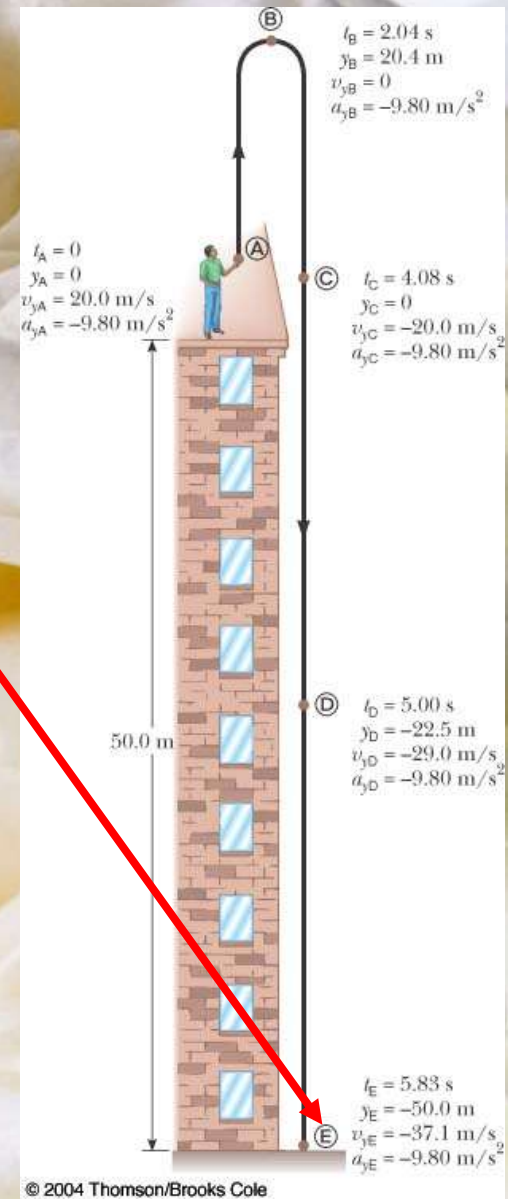
$$Y_E = -\frac{1}{2}gt_E^2 + v_A t_E + Y_A$$

$$-50 = -\frac{1}{2}9.8t_E^2 + 20t_E + 0$$

$$t_E = \frac{-4.9 \pm \sqrt{100 + 4.9 \times 50}}{4.9} = \begin{cases} 5.83 \text{ s} \\ -1.75 \text{ s} \end{cases}$$

ق ق  
غ ق ق

E



## آزمون 2

### آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۷

دروس تخصصی ۱ (فیزیک پایه (۱، ۲ و ۳)، فیزیک جدید، ترمودینامیک و مکانیک آماری، ریاضی فیزیک (۱ و ۲)):

۳۱- سه پرده موازی که فاصله بین هر دو پرده مجاور  $d$  است در نظر بگیرید. گلوله‌ای در جهت عمود بر پرده‌ها و در مجاورت با پرده اول به سمت پرده اول شلیک می‌شود. از نیروی گرانش صرف‌نظر کنید ولی حرکت در راستای افقی را کند شونده با شتاب ثابت در نظر بگیرید. اگر فاصله زمانی بین سوراخ شدن پرده‌های اول و دوم  $t_1$  و بین سوراخ شدن پرده‌های دوم و سوم  $t_2$  باشد، سرعت گلوله در لحظه سوراخ کردن پرده دوم کدام است؟

$$d \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 t_2 (t_2 + t_1)} \quad (۱)$$

$$\frac{d}{2} \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 t_2 (t_2 + t_1)} \quad (۲)$$

$$d \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} \quad (۳)$$

$$\frac{d}{2} \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} \quad (۴)$$

### آزمون 3

## آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۹

دروس تخصصی ۱ (فیزیک پایه (۱، ۲ و ۳)، فیزیک جدید، ترمودینامیک و مکانیک آماری، ریاضی فیزیک (۱ و ۲)):

۳۱- جسمی از ارتفاع  $h$  رها می‌شود. اگر نیمه دوم مسیر را در یک ثانیه طی کند، مقدار  $h$  چند متر است؟ ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$ )

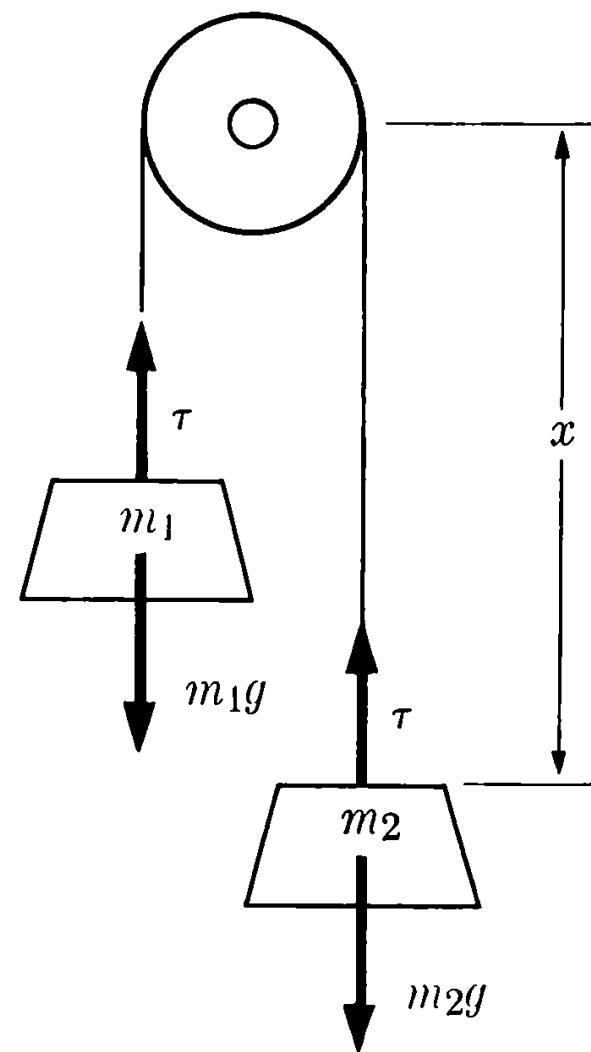
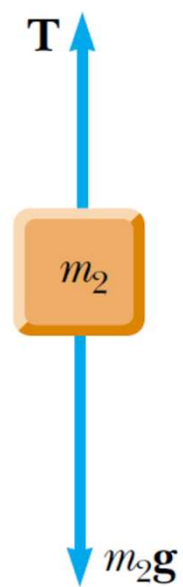
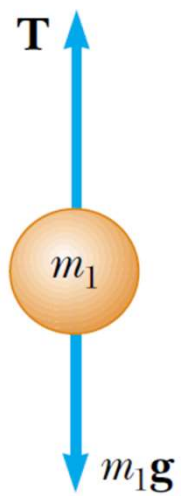
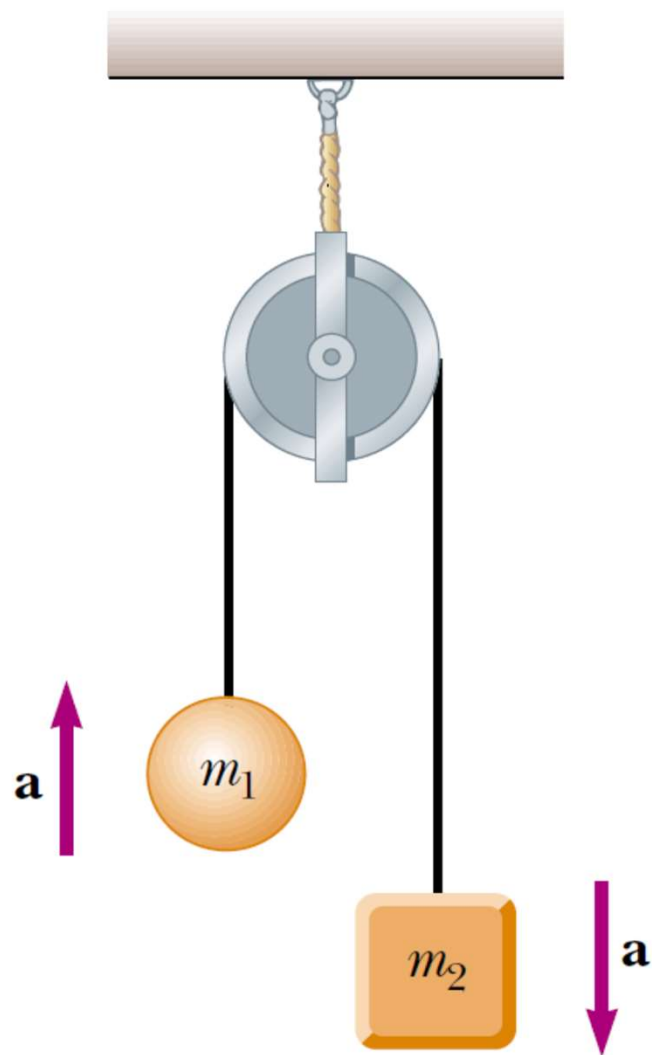
(۱) ۲/۴

(۲) ۱۰

(۳) ۳۸/۲

(۴) ۵۸/۳

### 3) قرقره آتوود



$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$F_1 = -m_1g + \tau$$

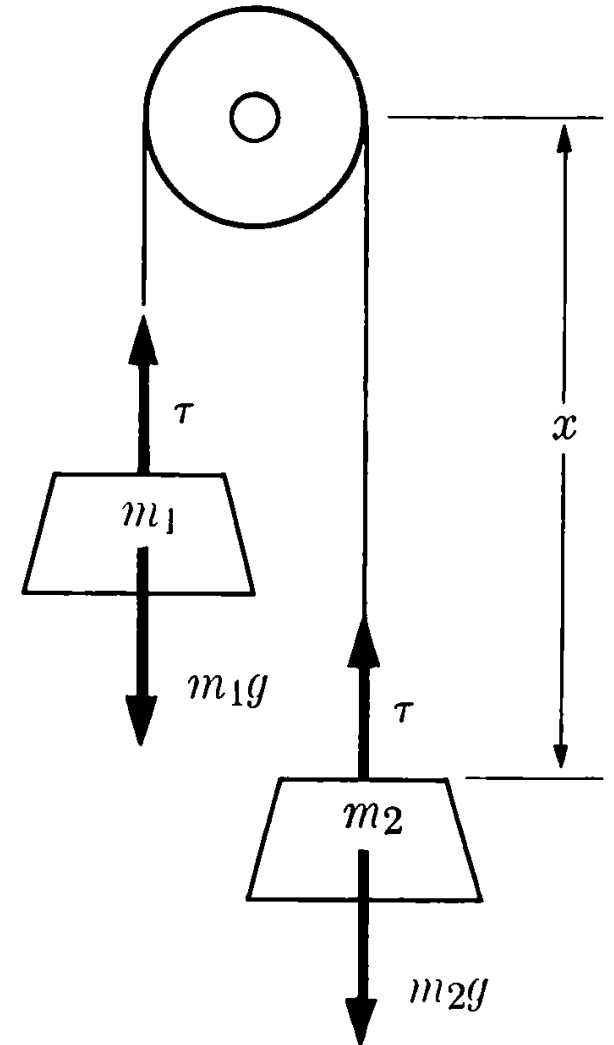
$$F_2 = m_2g - \tau$$

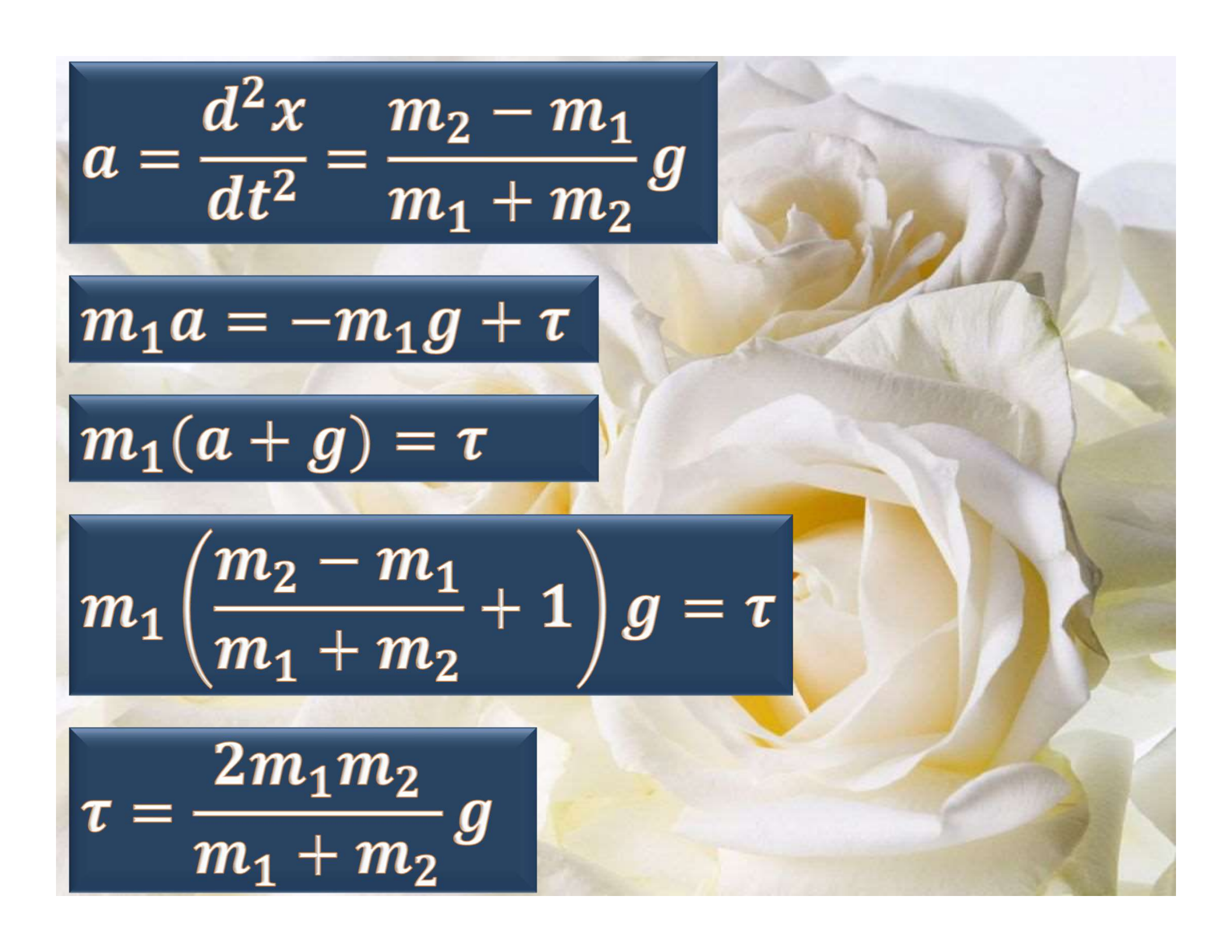
$$m_1a = -m_1g + \tau$$

$$m_2a = m_2g - \tau$$

+

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$$




$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$m_1 a = -m_1 g + \tau$$

$$m_1 (a + g) = \tau$$

$$m_1 \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + 1 \right) g = \tau$$

$$\tau = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$\tau = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$m_1 = m_2$$

اگر

$$m_2 \gg m_1$$

اگر

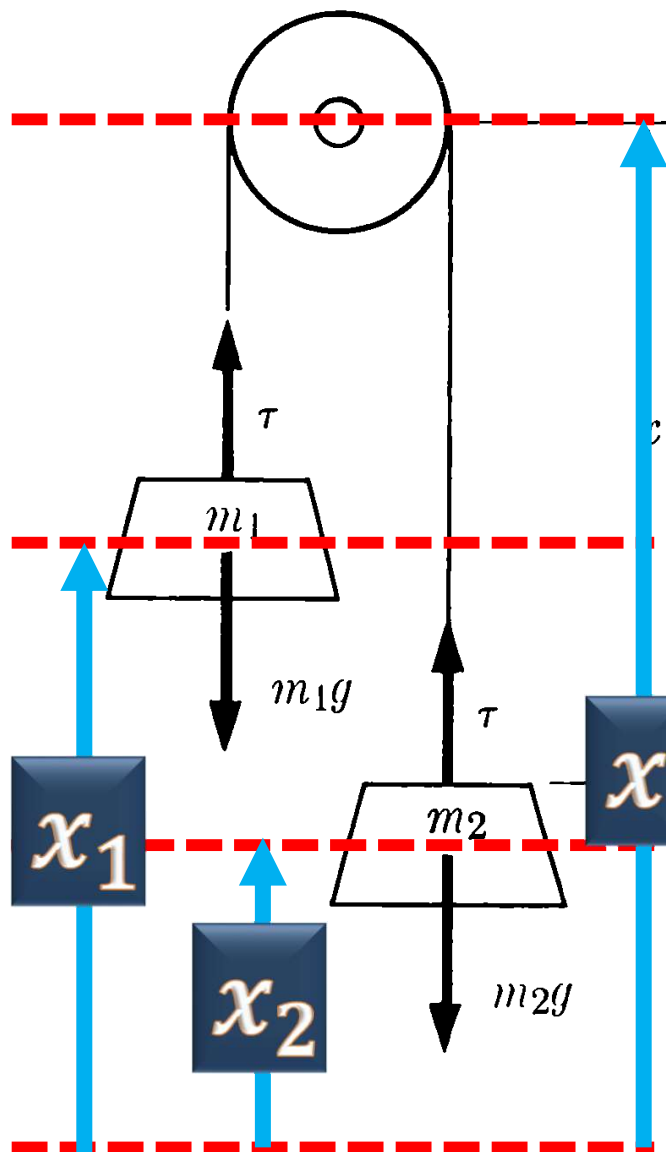
$$a = 0$$

$$a = g$$

$$\tau = m_1 g = m_2 g$$

$$\tau = 2m_1 g$$

تمرین 3: قرقه آتوود را هنگامی که با نیروی ثابت  $F$  به بالا کشیده می شود مورد بررسی قرار دهید



شتاب را بدون در نظر گرفتن نیروی کشش نخ  
به دست آورید

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2 = E$$

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2 = E$$

$$m_1 \dot{x}_1 \ddot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 \ddot{x}_2 + m_1 g \dot{x}_1 + m_2 g \dot{x}_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = cte.$$

قید

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_1 = -\dot{x}_2$$

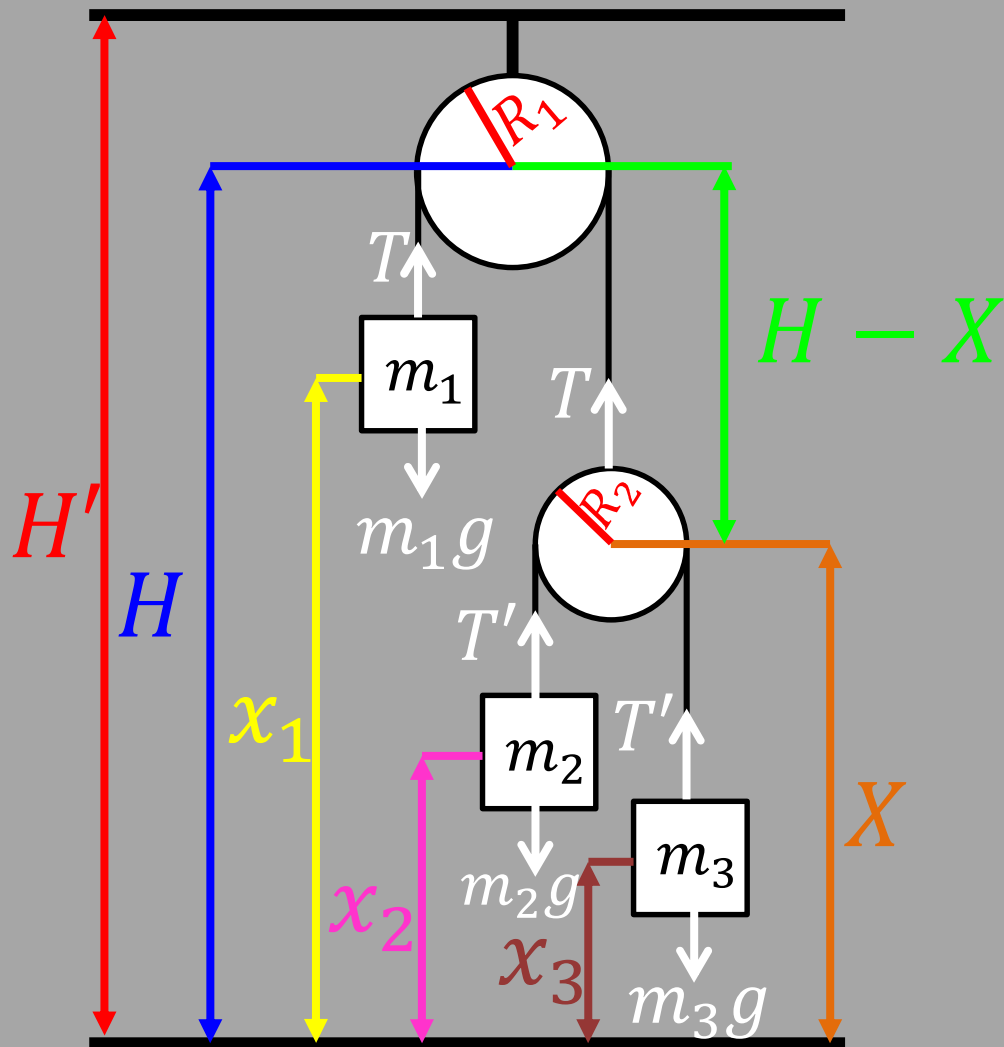
$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$$

$$(m_1 + m_2) \dot{x}_1 \ddot{x}_1 + (m_1 - m_2) g \dot{x}_1 = 0$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = (m_2 - m_1) g$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

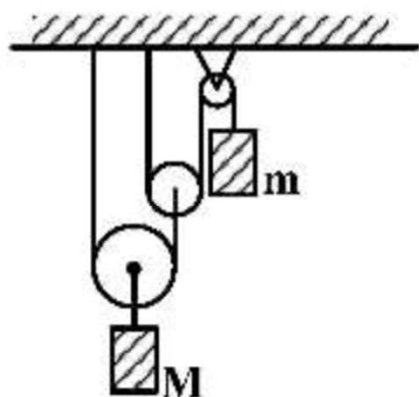
تمرین 4: در شکل زیر شتابها و نیروهای کشش نخها را به دست آورید. از جرم نخها و جرم قرقره ها صرف نظر کنید



## آزمون 4

### آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۹

۳۲- در شکل زیر مکعب‌های به جرم  $m$  و  $M$  در امتداد قائم حرکت می‌کنند. اگر از جرم قرقه‌ها و نخ‌ها چشم‌پوشی شود و  $M = ۳m$ ، شتاب مکعب به جرم  $m$  بر حسب  $g$  شتاب جاذبه کدام است؟



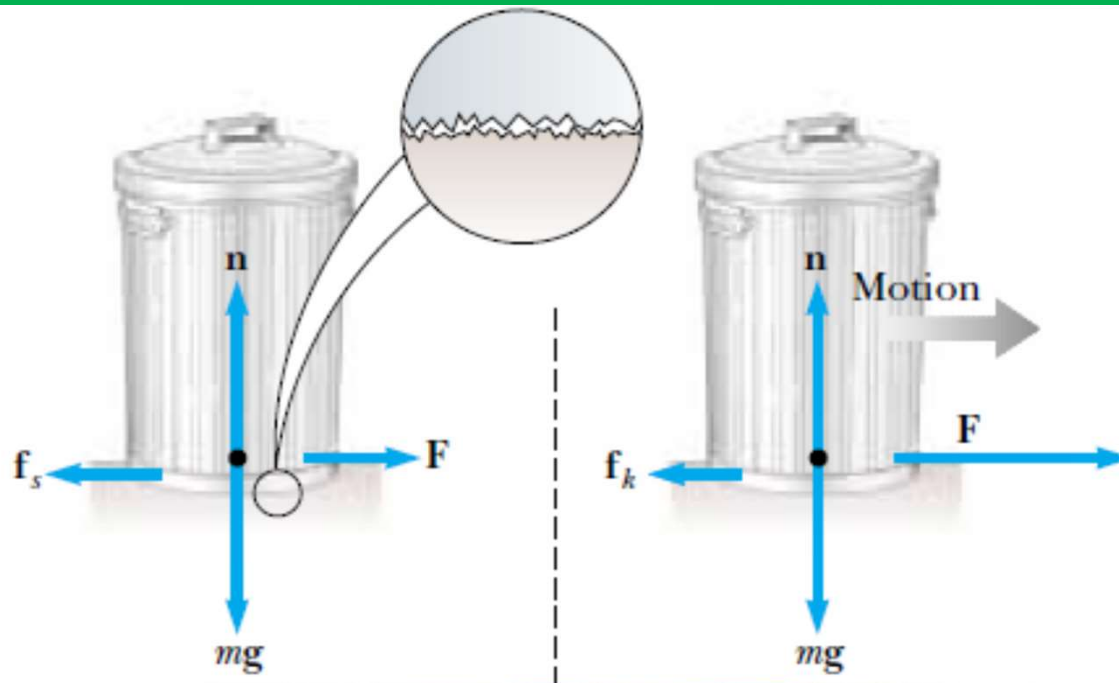
(۱) به سمت پایین  $\frac{g}{۱۶}$

(۲) به سمت پایین  $\frac{۴g}{۱۹}$

(۳) به سمت بالا  $\frac{g}{۱۶}$

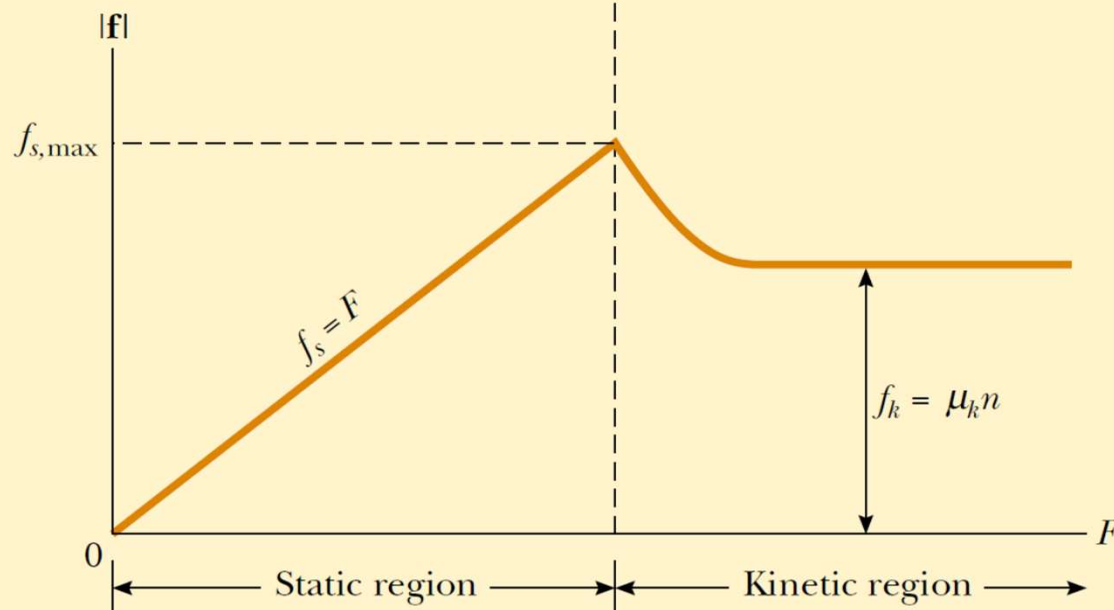
(۴) به سمت بالا  $\frac{۴g}{۱۹}$

## منشا نیروی اصطحکاک



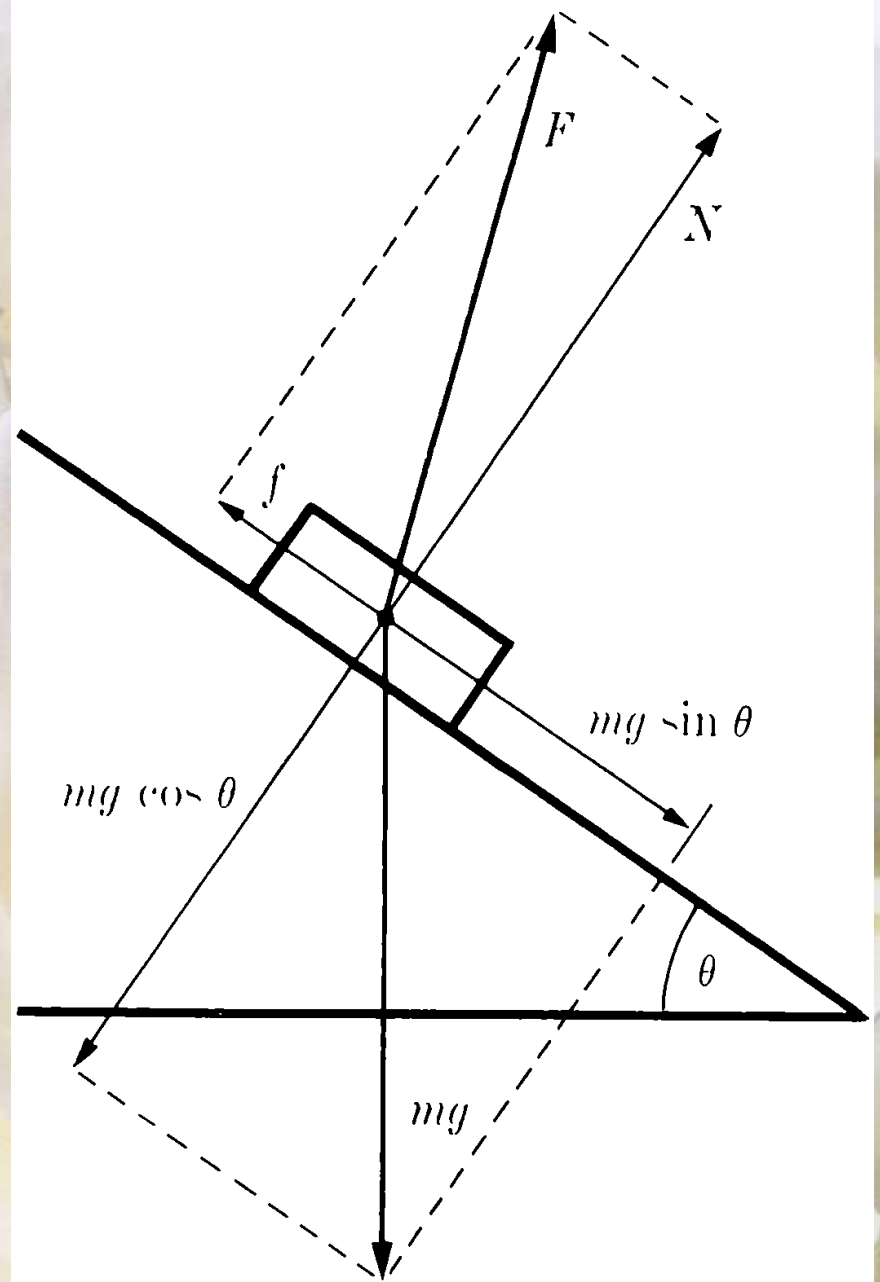
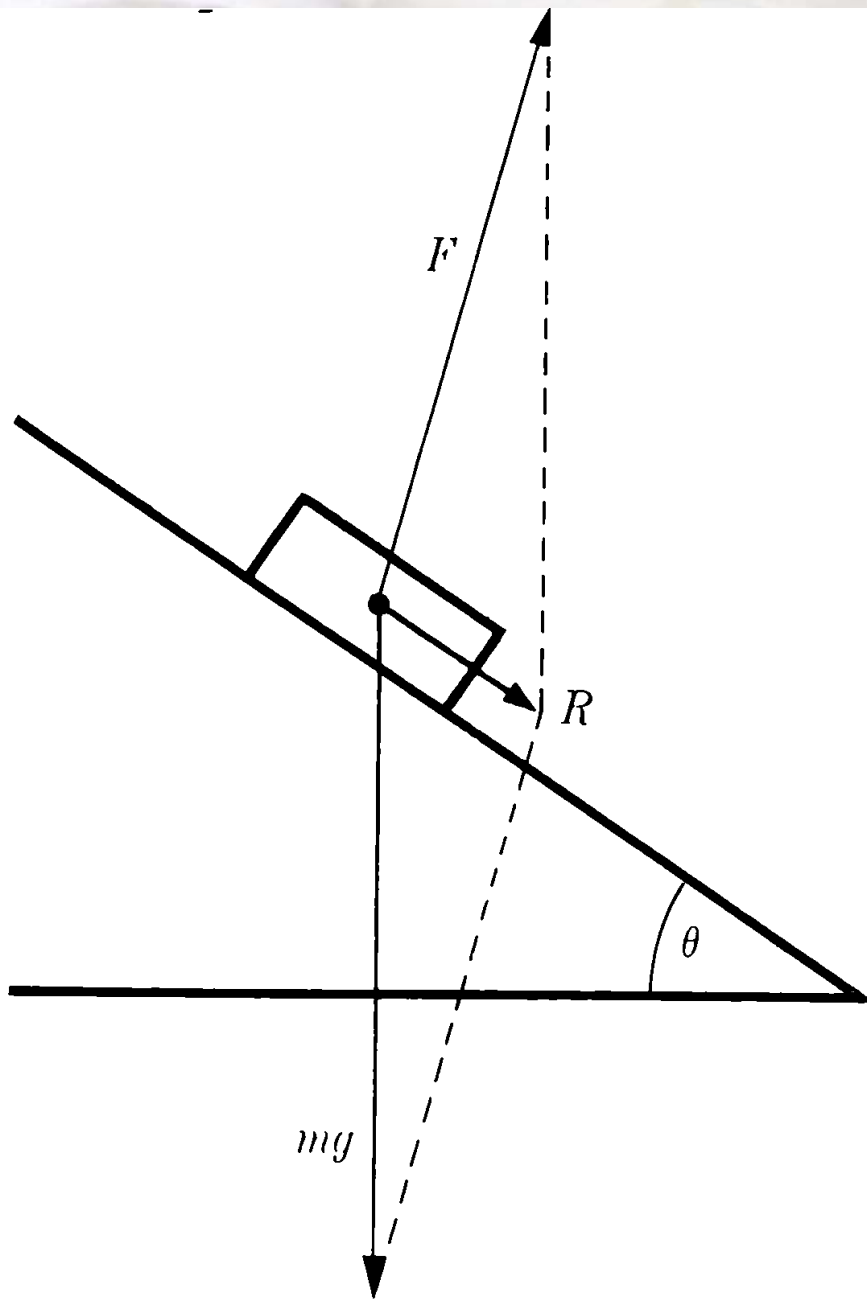
Coefficients of Friction<sup>a</sup>

|                             | $\mu_s$  | $\mu_k$ |
|-----------------------------|----------|---------|
| Steel on steel              | 0.74     | 0.57    |
| Aluminum on steel           | 0.61     | 0.47    |
| Copper on steel             | 0.53     | 0.36    |
| Rubber on concrete          | 1.0      | 0.8     |
| Wood on wood                | 0.25–0.5 | 0.2     |
| Glass on glass              | 0.94     | 0.4     |
| Waxed wood on wet snow      | 0.14     | 0.1     |
| Waxed wood on dry snow      | —        | 0.04    |
| Metal on metal (lubricated) | 0.15     | 0.06    |
| Ice on ice                  | 0.1      | 0.03    |
| Teflon on Teflon            | 0.04     | 0.04    |
| Synovial joints in humans   | 0.01     | 0.003   |



تکلیف پژوهشی 1: چرا  
و در چه صورت  
ضریب اصطحکاک  
دینامیکی از ضریب  
اصطحکاک استاتیکی  
می تواند بزرگتر باشد؟

#### (4) سطح شیب دار



$$R = ma$$

$$R = mg \sin \theta - f$$

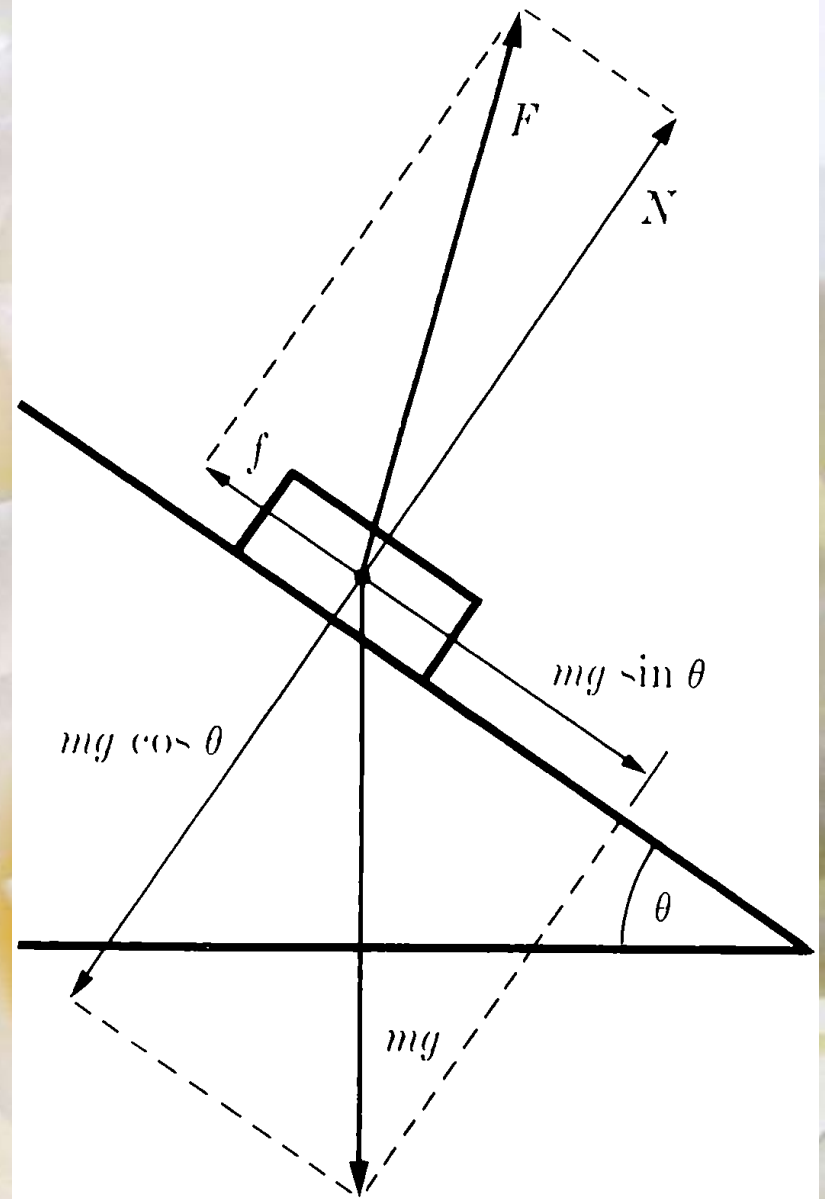
$$0 = N - mg \cos \theta$$

نیروی اصطحاک متناسب با نیروی  
قائم است

$$f = \mu N = \mu mg \cos \theta$$

$$R = ma$$
$$= mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$$



شتاب سر خوردن به پایین

$$a = g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

چون در این صورت جهت نیروی اصطحکاک  $f$  و در نتیجه علامت آن عوض می شود

شتاب لغزیدن به بالا (در صورت داشتن سرعت اولیه به بالا)

اکنون می توان مکان و سرعت جسم را در هر لحظه از زمان با جایگزینی شتابهای فوق در معادلات حرکت به دست آمده در مساله حرکت ذره تحت نیروی ثابت به دست آورد:

$$v = v_0 + g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t^2$$

اگر جسم ساکن باشد نیروی اصطحاک  $f$  می تواند هر مقداری که در شرط زیر صدق کند را داشته باشد

$$f \leq f_s = \mu_s N$$

$$N = mg \cos \theta$$

$$\mu_s = \tan \theta_0$$

که در آن ضریب اصطحاک استاتیک معمولا از ضریب اصطحاک دینامیک کوچکتر است

$$R = 0 = mg \sin \theta - f$$

در حالت استاتیک داریم که:

$$mg \sin \theta = f$$

$$mg \sin \theta = f \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$$

$$\sin \theta \leq \mu_s \cos \theta$$

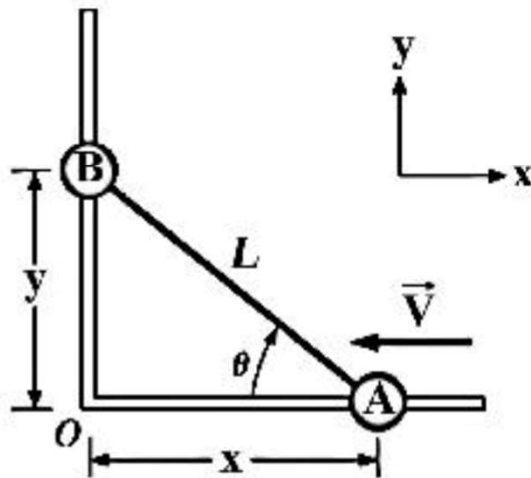
$$\mu_s \geq \tan \theta$$

$$\tan \theta_0 \geq \tan \theta$$

## آزمون 5

### آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۴۰۰

۳۲- دو جسم A و B توسط میله صلب به طول  $L$  به یکدیگر متصل شده‌اند. این دو جسم مطابق شکل زیر در امتداد دو ریل عمود بر هم می‌لغزند. اگر جسم A با تندی ثابت  $12 \text{ m/s}$  به سمت چپ بلغزد تندی لغزش جسم B وقتی که زاویه  $\theta = 60^\circ$  باشد تقریباً چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۶/۹

(۲) ۱۳/۹

(۳) ۱۵/۴

(۴) ۱۲/۵

تمرین 5: مساله سطح شیب دار را در غیاب اصطحکاک بین سطح شیب دار و سطح زمین حل کنید

(4) محاسبه فاصله متوسط زمین تا ماه

سرعت ماه

$$F = G \frac{M_m M_e}{r^2}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$g = G \frac{M_e}{R_e^2}$$

$$F = M_m a = M_m \frac{v^2}{r}$$

$$g R_e^2 = G M_e$$

$$M_m \frac{v^2}{r} = M_m \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$F = \frac{M_m g R_e^2}{r^2}$$

$$\frac{M_m g R_e^2}{r^2} = M_m \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$\frac{gR_e^2}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$r^3 = \frac{gR_e^2 T^2}{4\pi^2}$$

$$g = 9.802 \text{ m/s}^2$$

$$R = 6.368 \text{ km}$$

$$T = 27\frac{1}{3} \text{ days}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{gR_e^2 T^2}{4\pi^2}}$$

این معادله اولین بار توسط نیوتن به دست آمد

این معادله کاملاً صحیح نیست، زیرا

مدار ماه دایره کامل نیست

زمین در مرکز مدار ماه ساکن نیست

شتاب گرانش زمین باید به دلیل چرخش زمین تصحیح شود (آونگ فوکو)

$$r = 383000 \text{ km}$$

که با اندازه گیریهای دقیقتر، 385000 km در توافق است

تمرین 6: فاصله خورشید و زمین؟

## آزمون 6

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۷

مجموعه فیزیک (کد ۱۲۰۴)

132F

صفحه ۷

۳۳- جسمی با سرعت  $kV_e$  به طور عمودی از سطح زمین به سمت بالا پرتاب می‌شود.  $V_e$  سرعت فرار و  $k < 1$ . با صرف نظر از مقاومت هوا، بیشترین ارتفاعی که جسم نسبت به مرکز زمین به شعاع  $R$  بالا می‌رود چقدر است؟

$$\frac{R}{k^2} \quad (1)$$

$$\frac{R}{1-k^2} \quad (2)$$

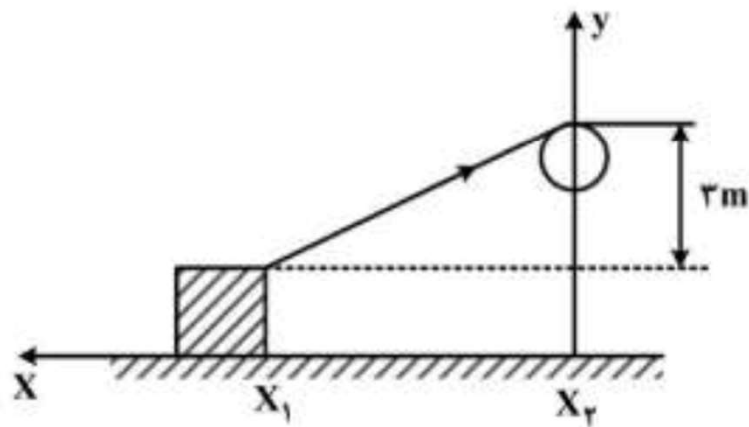
$$\frac{R}{1-2k^2} \quad (3)$$

$$\frac{R}{1+k^2} \quad (4)$$

## آزمون 7

### آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۸

۳۳- مطابق شکل زیر بسته‌ای به جرم  $۱۶\text{ kg}$  روی سطح افقی بدون اصطکاکی توسط ریسمان سبکی از نقطه  $x_1 = ۴\text{ m}$  تا  $x_2 = ۰$  جابه‌جا می‌شود. کشش در ریسمان  $۲۰\text{ N}$  و بسته ابتدا ساکن است. اگر بسته همواره روی زمین بماند، سرعت بسته در نقطه  $x_2$  چند متر بر ثانیه است؟



- (۱)  $\sqrt{۵}$
- (۲)  $۲\sqrt{۲}$
- (۳) ۲
- (۴)  $\sqrt{۲,۵}$