

دستگاه های ذره ای

مطالعات ما تا کنون محدود به یک ذره می شده است

چگونه دستگاهی واقعی از ذرات شامل N ذره را مطالعه کنیم؟

برای یافتن پاسخ سوال فوق به صورت زیر عمل می کنیم

برای سادگی دستگاهی متشکل از 3 ذره را در نظر بگیرید

هر ذره تشکیل دهنده جسم از قانون دوم نیوتن تبعیت می کند

$$f_i = \frac{dp_i}{dt}$$

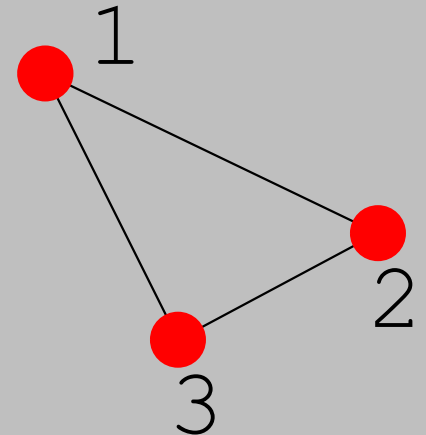
نیروی وارد بر ذره i -ام

$$f_i = f_i^{ext} + f_i^{int}$$

نیرو می تواند به بخشهای داخلی
و خارجی تقسیم شود

$$F = \sum_{i=1}^N f_i = \sum_{i=1}^N (f_i^{ext} + f_i^{int})$$

نیروی کل را از جمع روی
نیروی وارد بر تک تک
ذرات به دست می آوریم:



$$\sum_{i=1}^N f_i^{int} = 0$$

$$F = \sum_{i=1}^N (f_i^{ext} + f_i^{int}) = \sum_{i=1}^N f_i^{ext}$$

پس:

یعنی ذرات داخلی به یکدیگر نیرو وارد نمی کنند و جسم فقط تحت تاثیر نیروی خارجی است

$$F = \sum_{i=1}^N f_i^{ext} = \sum_{i=1}^N \frac{dp_i}{dt}$$

$$F = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N p_i \right)$$

جمع مشتقها
مساوی است
با مشتق
مجموع

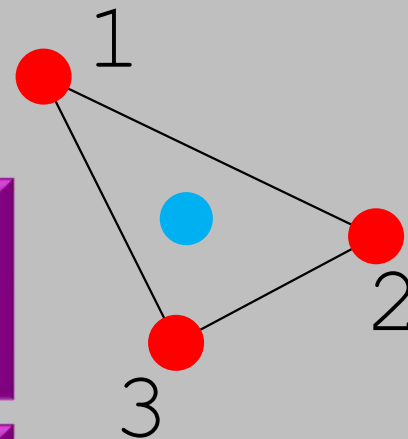
$$F = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N p_i \right) = \frac{d}{dt} (P) = \frac{dP}{dt}$$

بنابراین حرکت مجموعه ای از ذرات مانند حرکت یک ذره قابل انجام است اگر از اندازه حرکت کل ذرات به جای اندازه حرکت تک تک ذرات استفاده کنیم

مرکز جرم

اگر به جای حرکت مجموعه ای از ذرات می توان حرکت یک ذره را بررسی کرد، آن ذره کجاست؟

آن ذره در واقع یک ذره مجازی است که جرم آن برابر جرم کل جسم است و مکان آن در مرکز جرم جسم واقع شده است



مرکز جرم یک نقطه ریاضی است که یک تعریف ریاضی دقیق دارد و می تواند بر مرکز ثقل منطبق باشد یا نباشد

مرکز جرم چیست؟

$$F = \frac{dP}{dt}$$

$$F = M\ddot{R}$$

فرض کنید که جرم این نقطه ریاضی M و مکان آن R باشد

$$F = M\ddot{R} = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N p_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{dr_i}{dt} \right)$$

$$M \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i \right)$$

$$MR = \sum_{i=1}^N m_i r_i$$

$$R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i r_i$$

مکان مرکز جرم که چیزی جز میانگین مکان جرمهای تشکیل دهنده جسم نیست

$$x_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

$$y_{\text{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i y_i}{M}$$

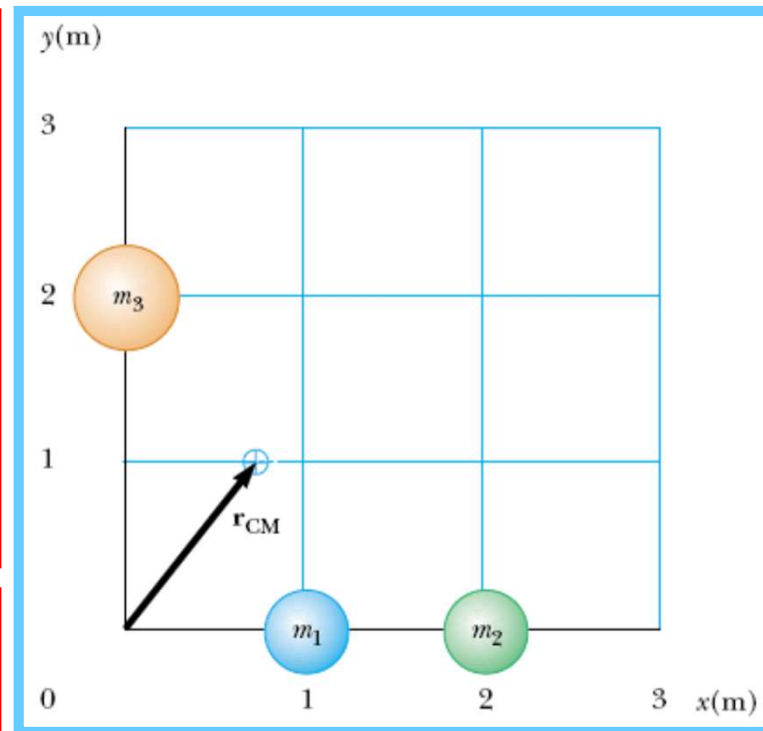
$$z_{\text{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = x_{\text{CM}} \hat{\mathbf{i}} + y_{\text{CM}} \hat{\mathbf{j}} + z_{\text{CM}} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\sum_i m_i x_i \hat{\mathbf{i}} + \sum_i m_i y_i \hat{\mathbf{j}} + \sum_i m_i z_i \hat{\mathbf{k}}}{M}$$

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

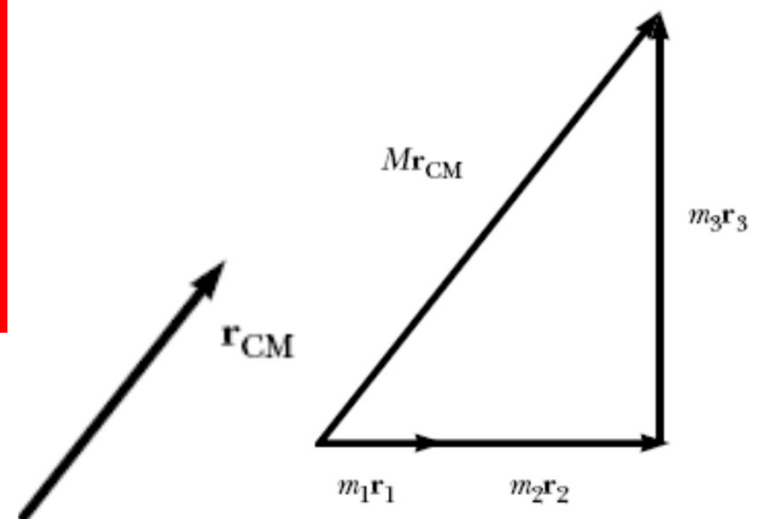
$$\mathbf{r}_i \equiv x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{\mathbf{k}}$$

$$\begin{aligned}
 x_{\text{CM}} &= \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\
 &= \frac{(1.0 \text{ kg})(1.0 \text{ m}) + (1.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m}) + (2.0 \text{ kg})(0)}{1.0 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg} + 2.0 \text{ kg}} \\
 &= \frac{3.0 \text{ kg} \cdot \text{m}}{4.0 \text{ kg}} = 0.75 \text{ m}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y_{\text{CM}} &= \frac{\sum_i m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\
 &= \frac{(1.0 \text{ kg})(0) + (1.0 \text{ kg})(0) + (2.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m})}{4.0 \text{ kg}} \\
 &= \frac{4.0 \text{ kg} \cdot \text{m}}{4.0 \text{ kg}} = 1.0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

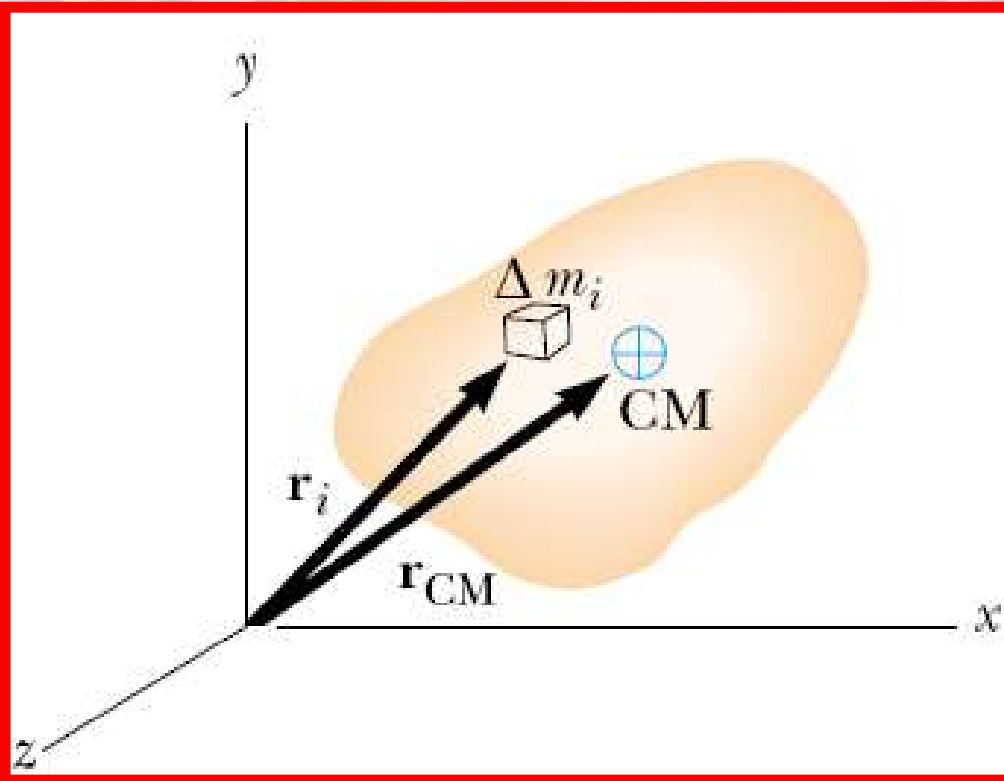
$$\mathbf{r}_{\text{CM}} \equiv x_{\text{CM}} \hat{\mathbf{i}} + y_{\text{CM}} \hat{\mathbf{j}} = (0.75 \hat{\mathbf{i}} + 1.0 \hat{\mathbf{j}}) \text{ m}$$



مرکز جرم یک جسم پیوسته را چگونه به دست آوریم؟

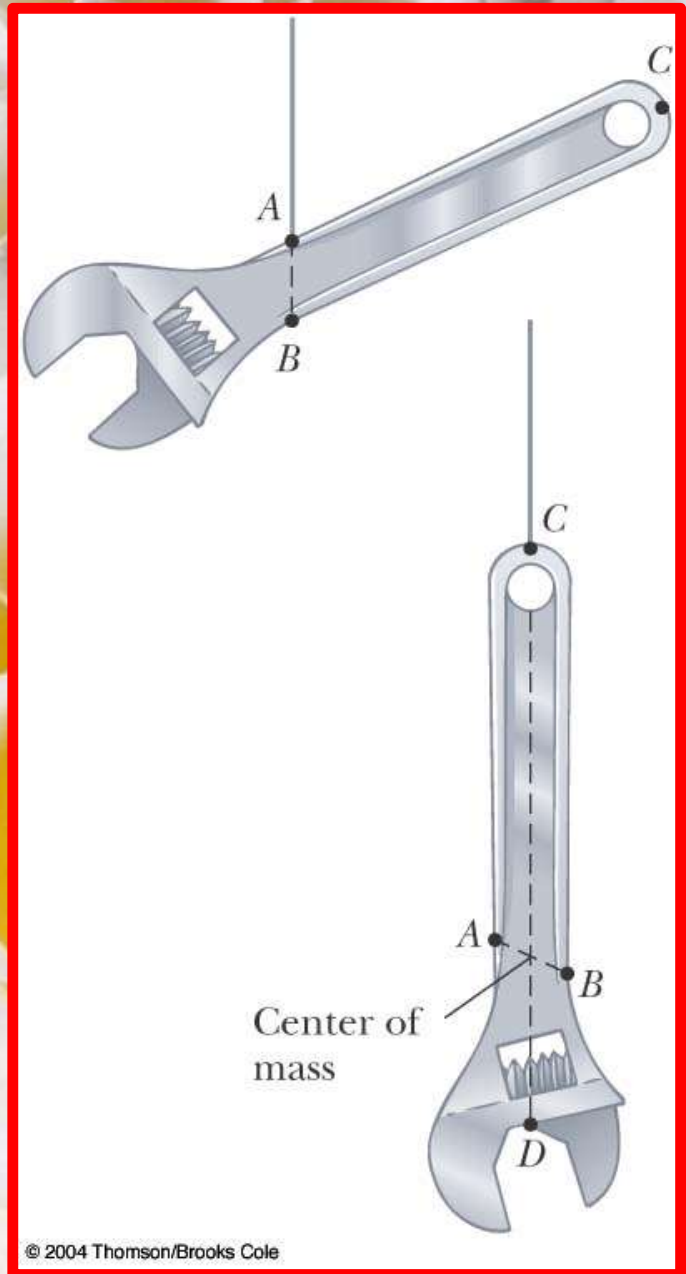
روش نظری

روش تجربی



$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV$$

$$M = \int dm = \int \rho(\mathbf{r}) dV$$



$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\lambda}{M} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

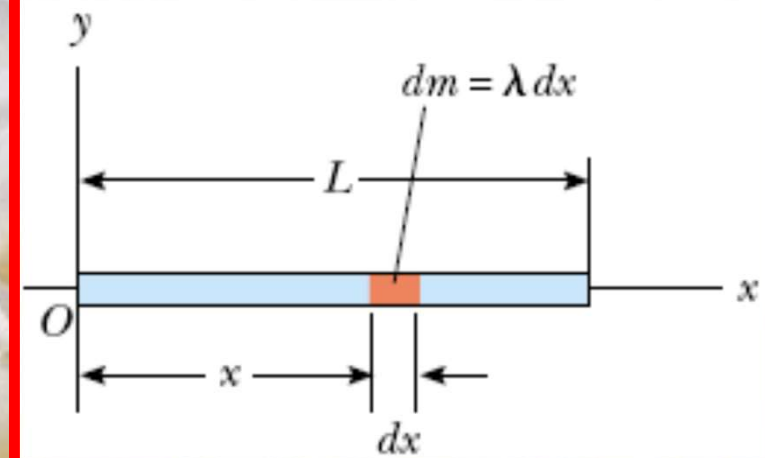
$$\lambda = M/L$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{L^2}{2M} \left(\frac{M}{L} \right) = \frac{L}{2}$$

$$\lambda = \alpha x$$

$$\begin{aligned} x_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{1}{M} \int_0^L x \alpha x dx \\ &= \frac{\alpha}{M} \int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha L^3}{3M} \end{aligned}$$

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L \alpha x dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$



$$x_{\text{CM}} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \frac{2}{3}L$$

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int_S \mathbf{r} dm = \frac{\sigma}{M} \int_S \mathbf{r} dx dy = \frac{1}{A} \int_S \mathbf{r} dx dy$$

$$M = \int_S \sigma dx dy$$

$$= \sigma \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} dy$$

$$= \sigma \int_0^a \left(\frac{b}{a} x \right) dx$$

$$= \frac{\sigma b}{a} \frac{a^2}{2} =$$

$$= \sigma \frac{1}{2} ab = \sigma A$$

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{\sigma}{M} \int_S \mathbf{r} dx dy = \frac{1}{A} \int_S \mathbf{r} dx dy$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{A} \int_0^a x dx \int_0^{\frac{b}{a}x} dy =$$

$$\frac{1}{A} \int_0^a \left(\frac{b}{a} x \right) x dx =$$

$$\frac{1}{A} \frac{b}{a} \frac{1}{3} a^3 =$$

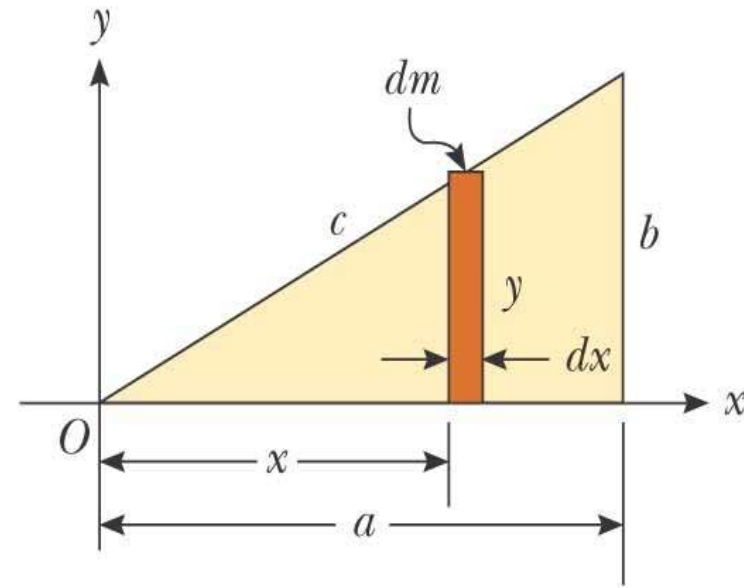
$$\frac{2}{3} a$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{1}{A} \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} y dy =$$

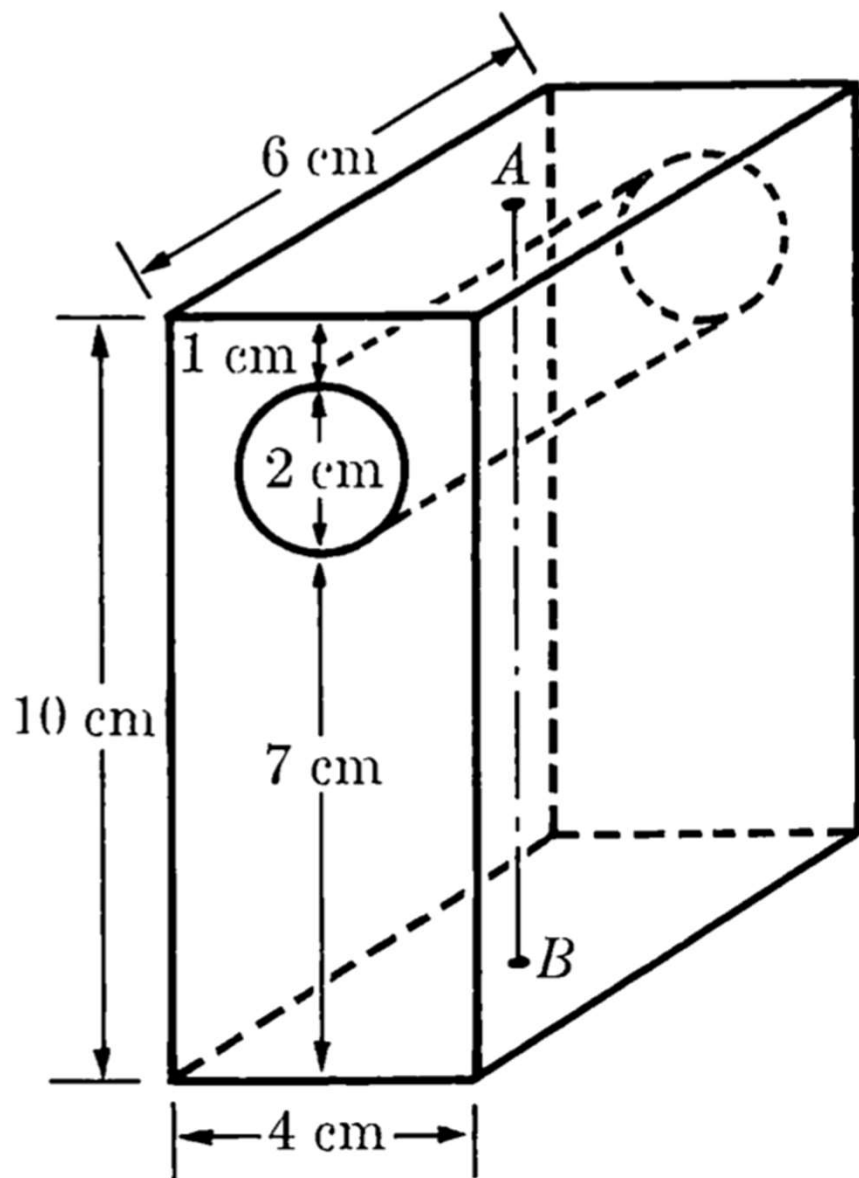
$$\frac{1}{A} \int_0^a \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} x \right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{A} \frac{1}{6} \frac{b^2}{a^2} a^3 =$$

$$\frac{1}{3} b$$



(b)



$$z_{CM} = \frac{Mz_M + (-m)z_m}{M + (-m)}$$

$$z_{CM} = \frac{\rho V_M \times 5 - \rho V_m \times 2}{\rho V_M - \rho V_m}$$

$$z_{CM} = \frac{5V_M - 2V_m}{V_M - V_m}$$

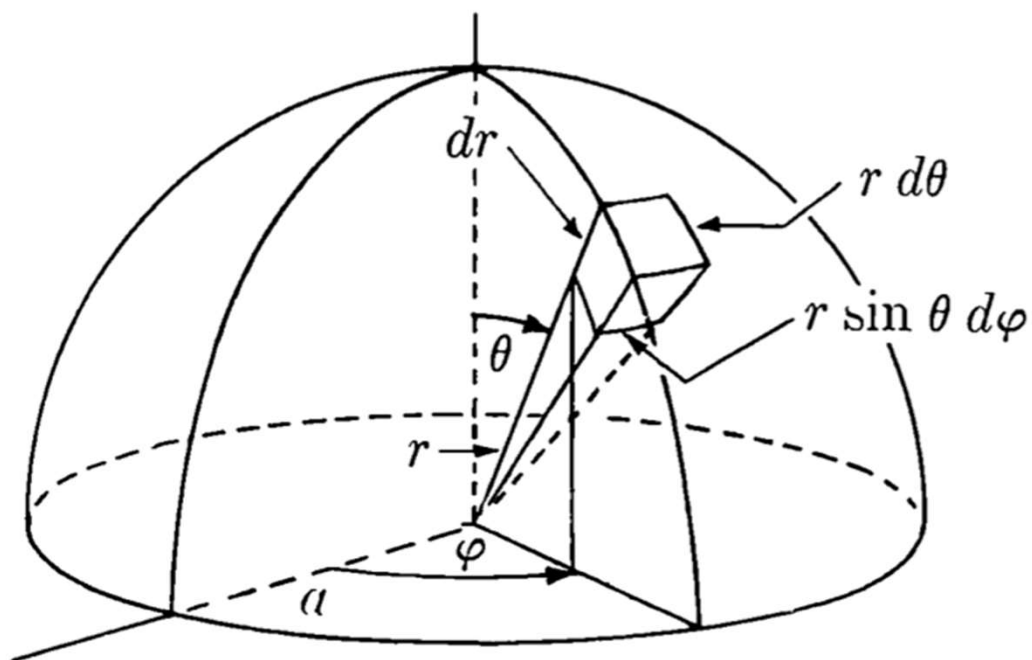
$$z_{CM} = \frac{5abc - 2\pi R^2 b}{abc - \pi R^2 b}$$

$$z_{CM} = \frac{5 \times 4 \times 6 \times 10 - 2\pi 1^2 \times 6}{4 \times 6 \times 10 - \pi 1^2 \times 6}$$

$$z_{CM} = \frac{5 \times 4 \times 6 \times 10 - 2 \times 6\pi}{240 - 6\pi}$$

$$z_{CM} = \frac{1200 - 12\pi}{240 - 6\pi} \cong 5.255$$

مرکز جرم مکعب مستطبی که
یک استوانه از آن در آورده
شده است را به دست آورید



$$z_{CM} = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

$$z = r \cos \theta$$

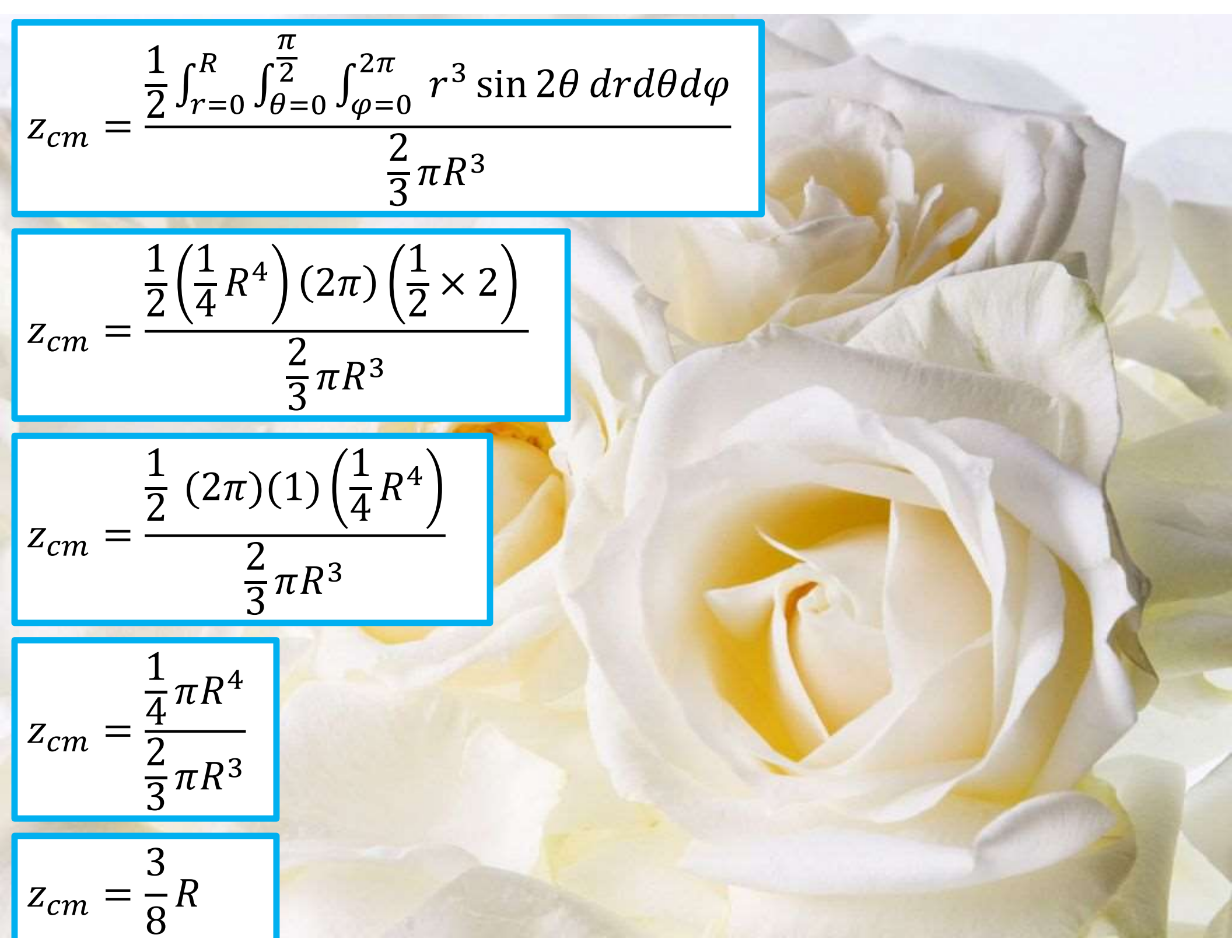
$$dm = \rho_0 dV$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

مرکز جرم یک نیم کره توپ را به دست آورید

$$z_{cm} = \frac{\int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} r \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi}{\int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi}$$

$$z_{cm} = \frac{\frac{1}{2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^3 \sin 2\theta dr d\theta d\phi}{(2\pi)(1) \left(\frac{1}{3} R^3 \right)}$$

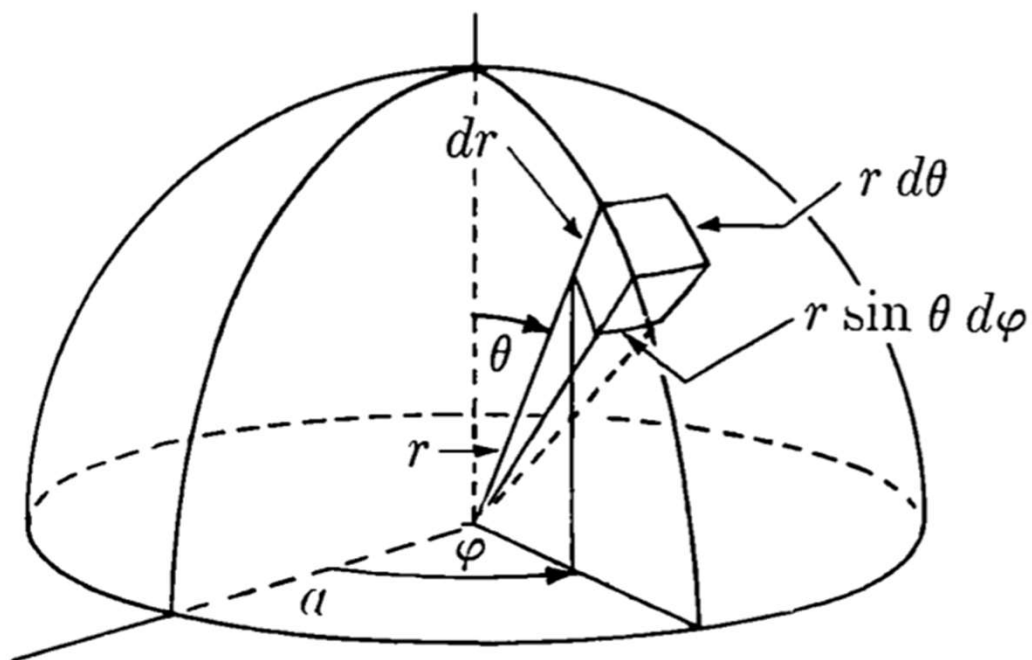

$$Z_{cm} = \frac{\frac{1}{2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3 \sin 2\theta \, dr d\theta d\varphi}{\frac{2}{3} \pi R^3}$$

$$Z_{cm} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} R^4 \right) (2\pi) \left(\frac{1}{2} \times 2 \right)}{\frac{2}{3} \pi R^3}$$

$$Z_{cm} = \frac{\frac{1}{2} (2\pi)(1) \left(\frac{1}{4} R^4 \right)}{\frac{2}{3} \pi R^3}$$

$$Z_{cm} = \frac{\frac{1}{4} \pi R^4}{\frac{2}{3} \pi R^3}$$

$$Z_{cm} = \frac{3}{8} R$$



$$z_{CM} = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

$$z = R \cos \theta$$

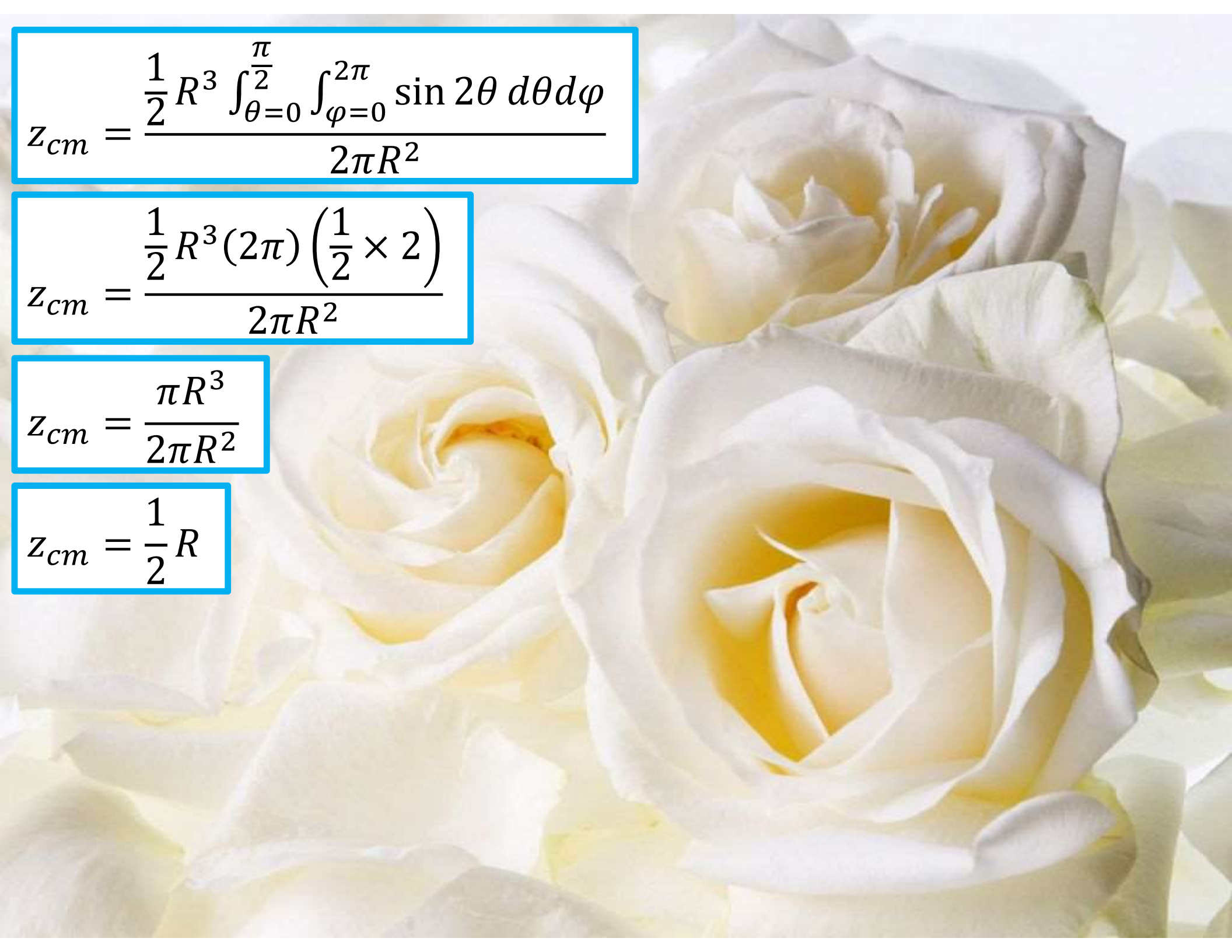
$$dm = \sigma_0 dA$$

$$dA = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

مرکز جرم یک نیم کره تو خالی را به دست آورید

$$z_{cm} = \frac{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}$$

$$z_{cm} = \frac{\frac{1}{2} R^3 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin 2\theta d\theta d\varphi}{(R^2)(2\pi)(1)}$$

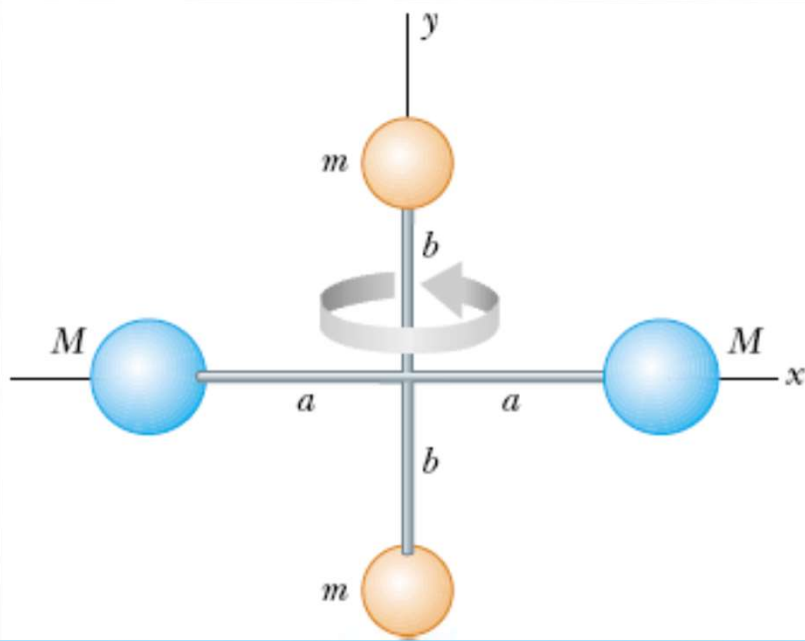
The background of the entire image is a close-up photograph of several white roses. The petals are layered and show some yellowing at the edges, suggesting they might be older or a specific variety. The lighting is soft, creating gentle shadows and highlights on the petal surfaces.
$$Z_{cm} = \frac{\frac{1}{2} R^3 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin 2\theta \, d\theta d\varphi}{2\pi R^2}$$

$$Z_{cm} = \frac{\frac{1}{2} R^3 (2\pi) \left(\frac{1}{2} \times 2 \right)}{2\pi R^2}$$

$$Z_{cm} = \frac{\pi R^3}{2\pi R^2}$$

$$Z_{cm} = \frac{1}{2} R$$

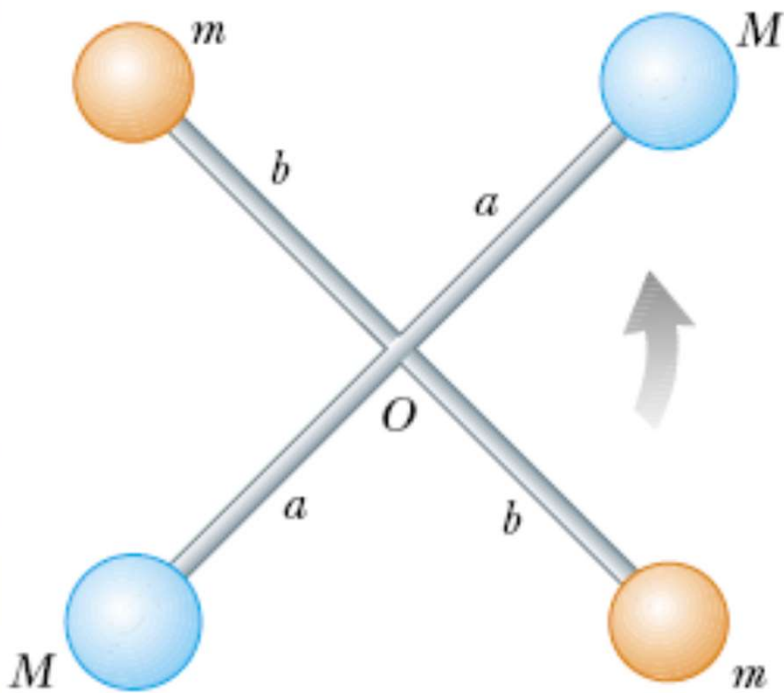
مثال: انرژی جنبشی دورانی سیستم نشان داده شده در شکل را به دست آورید



$$I_y = \sum_{i=1}^4 m_i r_i^2$$

$$= Ma^2 + Ma^2 + m \times 0^2 + m \times 0^2 = 2Ma^2$$

$$K_R = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} \times 2Ma^2 \omega^2 = Ma^2 \omega^2$$



$$I_z = \sum_{i=1}^4 m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2$$

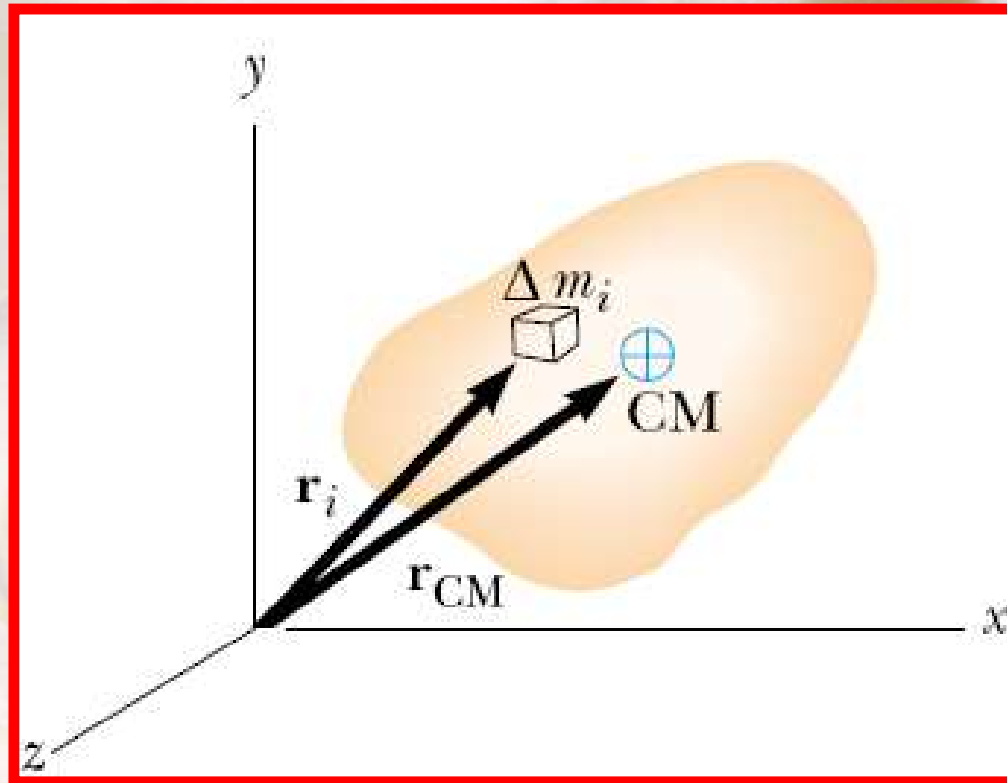
$$= 2Ma^2 + 2mb^2 = 2(Ma^2 + mb^2)$$

$$K_R = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} \times 2(Ma^2 + mb^2) \omega^2$$

$$= (Ma^2 + mb^2) \omega^2$$

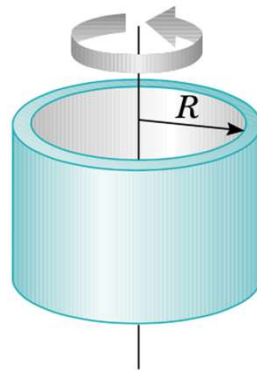
if $M \gg m \Rightarrow I_z = 2Ma^2 = I_y \Rightarrow K_R = Ma^2 \omega^2$

گشتاور لختی دورانی اجسام پیوسته



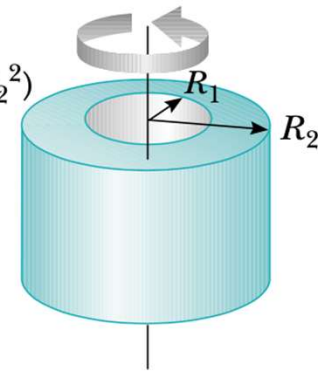
$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

Hoop or thin
cylindrical shell
 $I_{\text{CM}} = MR^2$

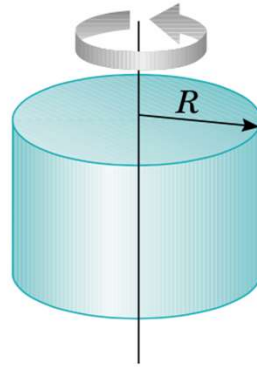


Hollow cylinder

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$

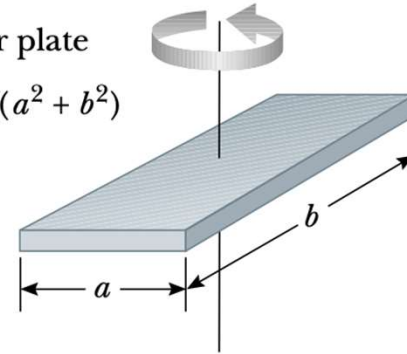


Solid cylinder
or disk
 $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2} MR^2$



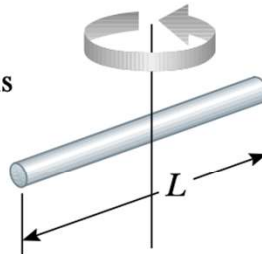
Rectangular plate

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



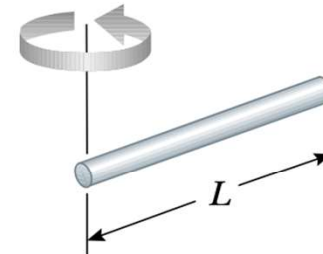
Long thin rod
with rotation axis
through center

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} ML^2$$

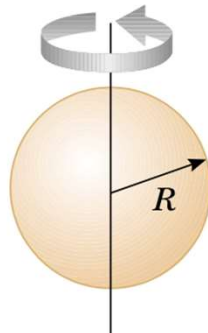


Long thin
rod with
rotation axis
through end

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

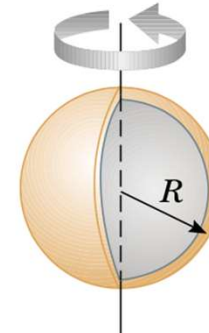


Solid sphere
 $I_{\text{CM}} = \frac{2}{5} MR^2$



Thin spherical
shell

$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{3} MR^2$$



مثال: گشتاور لختی دورانی میله نشان داده شده در شکل را حول محور y به دست آورید

$$I = \int r^2 dm$$

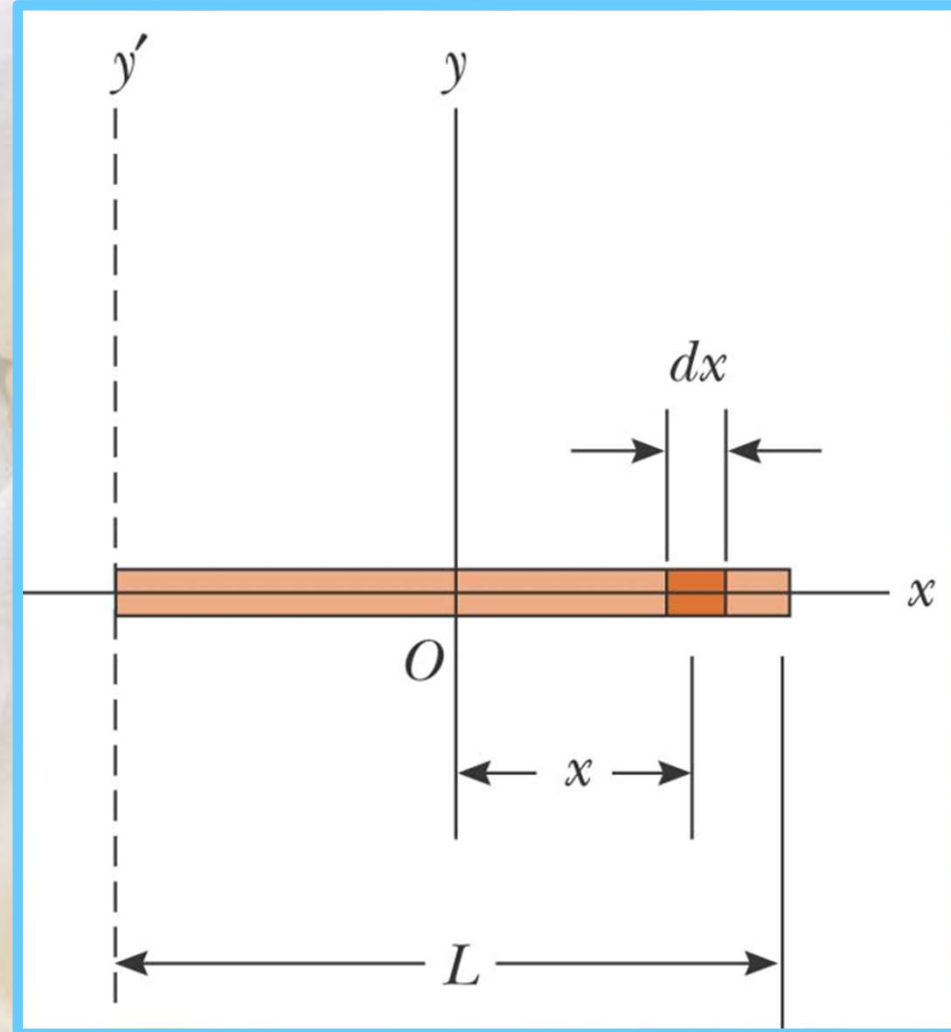
$$I_{CM} = I_y = \int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \lambda_0 dx$$

$$I_y = \lambda_0 \int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx$$

$$I_y = \lambda_0 \frac{1}{3} \left(\frac{L^3}{8} - \frac{(-L)^3}{8} \right)$$

$$I_y = \lambda_0 \frac{1}{3} \left(\frac{L^3}{4} \right) = \frac{1}{12} \lambda_0 L L^2 = \frac{1}{12} M L^2$$

$$I_{CM} = \frac{1}{12} M L^2$$



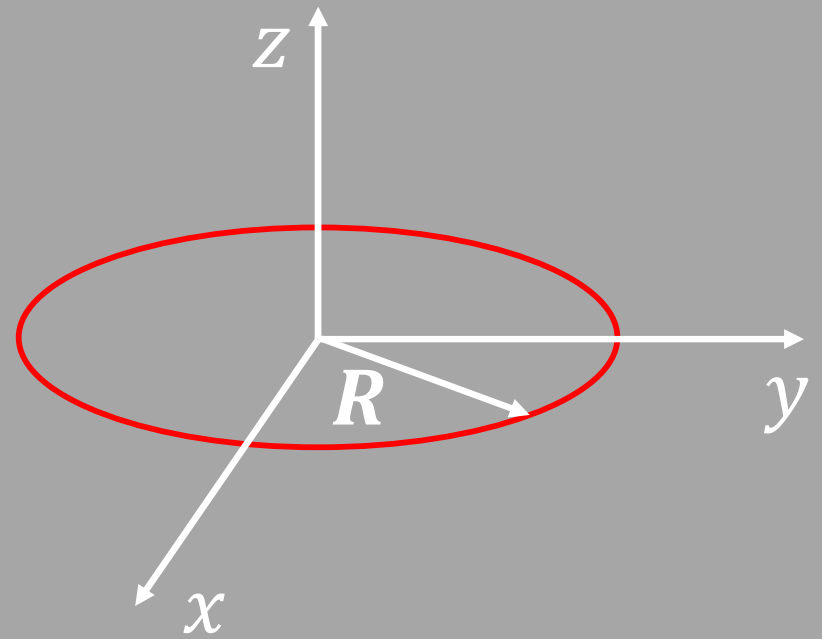
مثال: گشتاور لختی دورانی حلقه دایره ای نشان داده شده در شکل را به دست آورید

$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

$$I = R^2 \int \lambda dl = R^2 \lambda \int dl = R^2 \lambda L = MR^2$$

$$L = \int dl = \int_{\varphi=0}^{2\pi} R d\varphi = 2\pi R$$



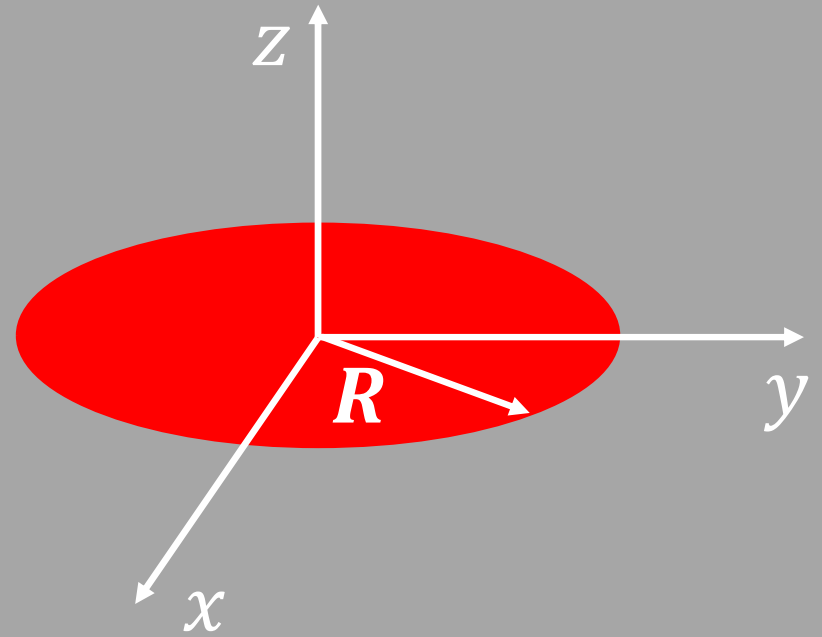
مثال: گشتاور لختی دورانی دیسک دایره ای نشان داده شده در شکل را به دست آورید

$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma da$$

$$I = \sigma \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r^2 r dr d\varphi$$

$$I = \sigma 2\pi \frac{1}{4} R^4 = \sigma \pi R^2 \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} M R^2$$



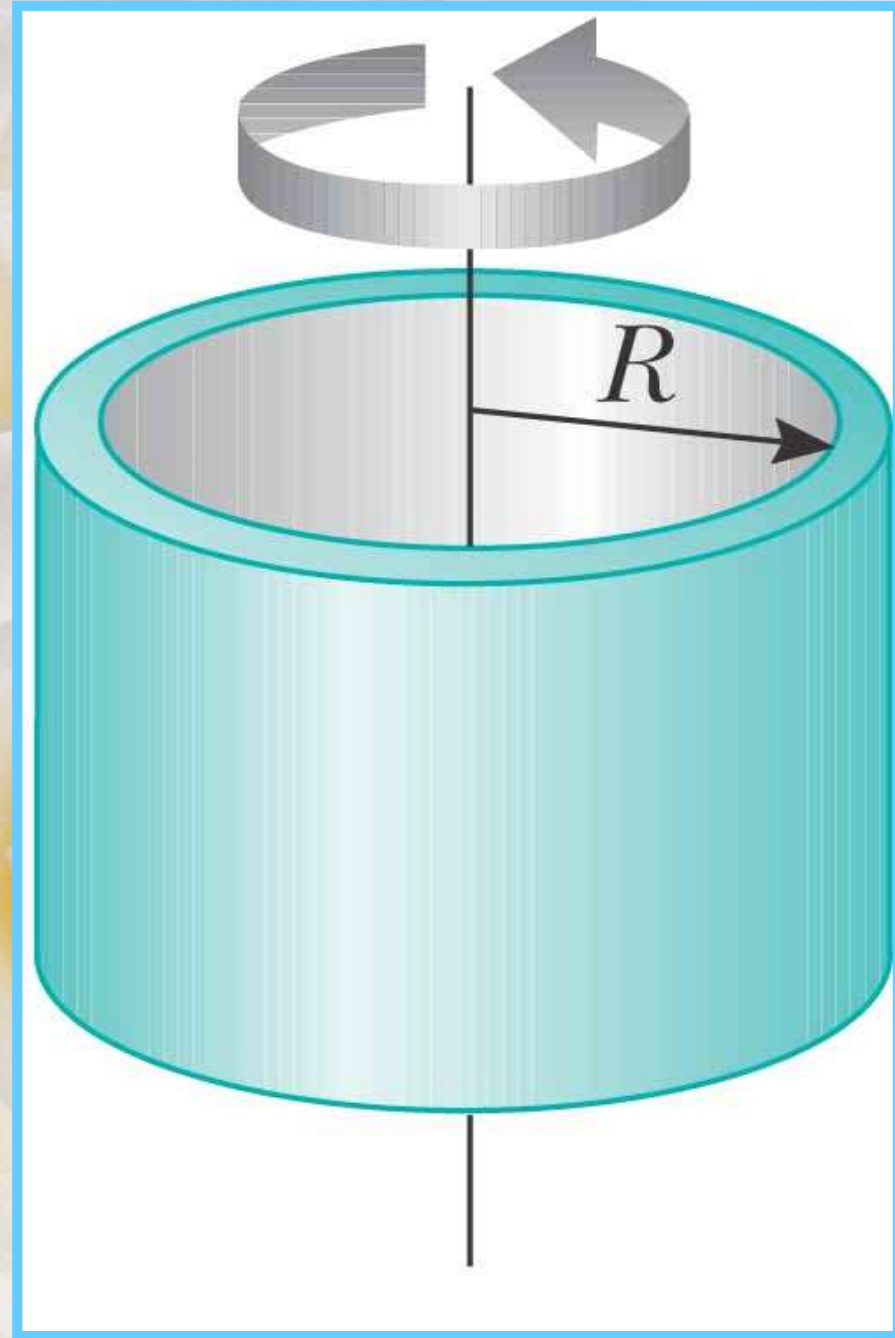
مثال: گشتاور لختی دورانی پوسته استوانه ای نشان داده شده در شکل را به دست آورید

$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

$$\begin{aligned} I &= R^2 \int \sigma da = R^2 \sigma \int da \\ &= R^2 \sigma A = R^2 \sigma 2\pi RL = MR^2 \end{aligned}$$

$$A = \int da = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L R d\varphi dz = 2\pi RL$$



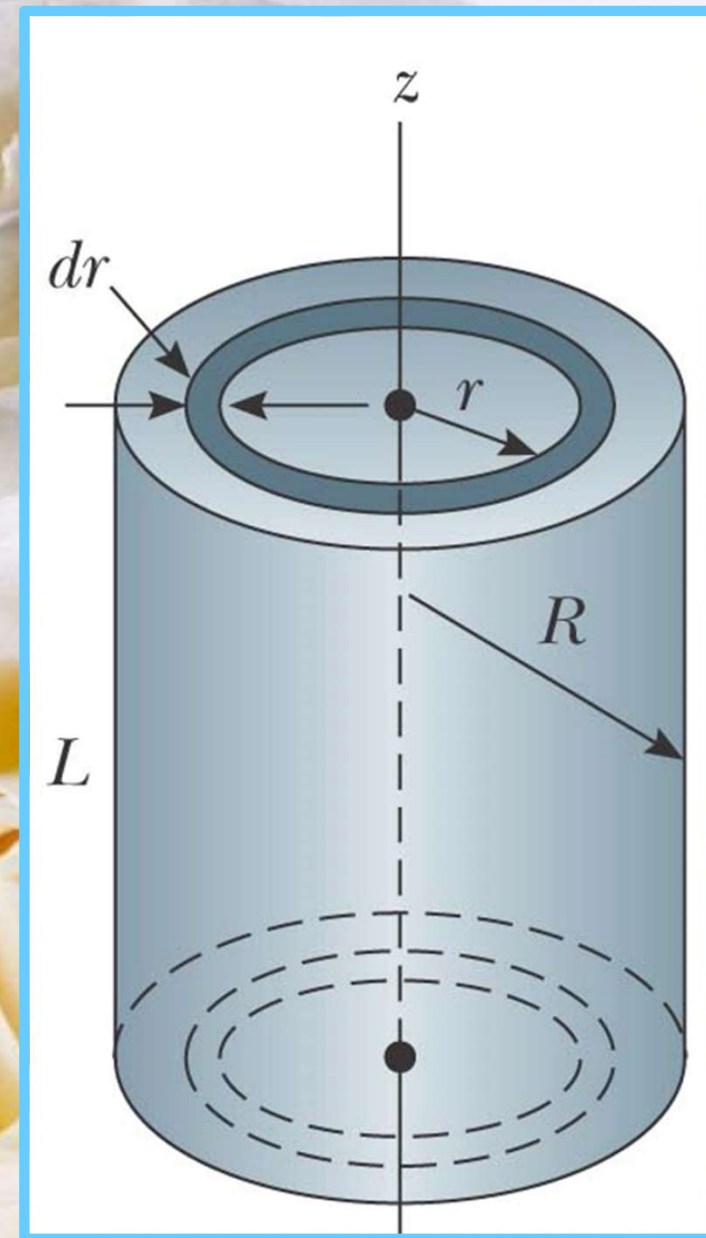
مثال: گشتاور لختی دورانی استوانه توپر نشان داده شده در شکل را به دست آورید

$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int_{\rho=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L r^2 \rho_0 \rho d\rho d\varphi dz$$

$$I = \rho_0 \int_{\rho=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \rho^2 \rho d\rho d\varphi dz$$

$$\begin{aligned} I &= \rho_0 2\pi L \int_{\rho=0}^R \rho^3 d\rho = \rho_0 2\pi L \frac{1}{4} R^4 \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \pi R^2 L R^2 = \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned}$$



پس گشتاور لختی دورانی استوانه توپر کوچکتر از پوسته استوانه ای هم جرم آن است

مثال: گشتاور لختی دورانی یک کره توپ را به دست آورید

$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int \rho^2 \rho_0 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\rho = \sqrt{r^2 - z^2}$$

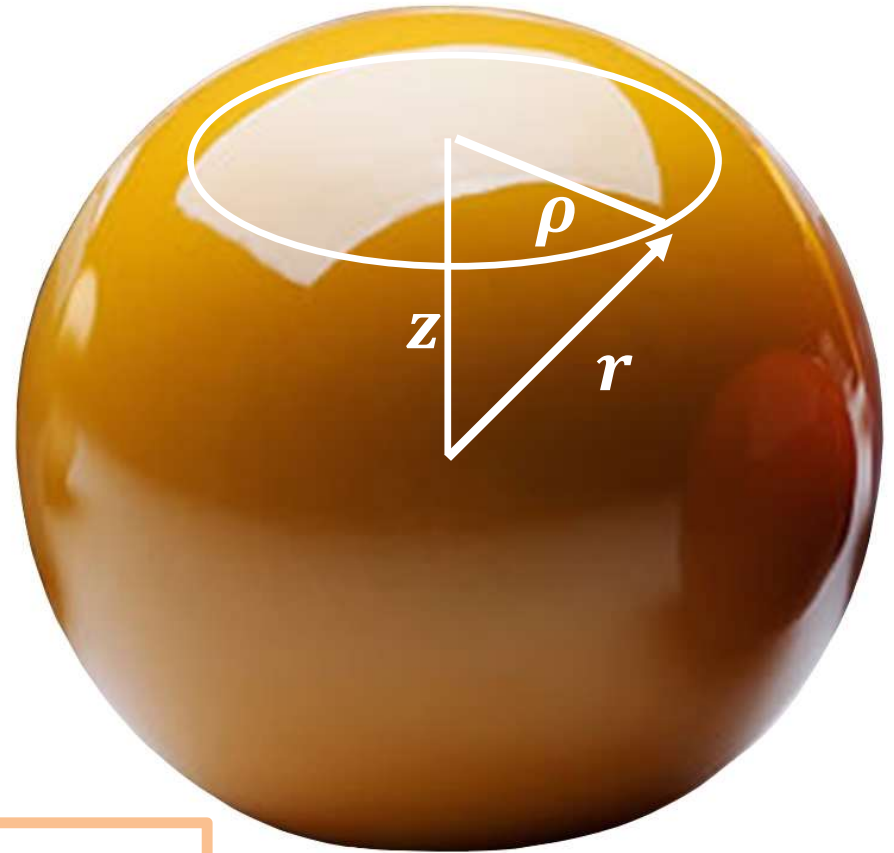
$$z = r \cos \theta$$

$$\rho^2 = r^2 - r^2 \cos^2 \theta$$

$$\rho^2 = r^2 (1 - \cos^2 \theta) = r^2 \sin^2 \theta$$

$$I = \rho_0 \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 (1 - \cos^2 \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$I = 2\pi \frac{R^5}{5} \rho_0 \left[\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right]$$



$$I = 2\pi \frac{R^5}{5} \rho_0 \left[\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right]$$

$$I = \rho_0 \pi R^3 \frac{2}{5} R^2 \left[\left((-\cos \theta)_0^{\pi} - \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right) \right]$$

$$\cos \theta = u$$

$$-\sin \theta d\theta = du$$

$$I = \rho_0 \pi R^3 \frac{2}{5} R^2 \left[\left(2 + \int u^2 du \right) \right]$$

$$I = \rho_0 \pi R^3 \frac{2}{5} R^2 \left[\left(2 + \frac{1}{3} (u^3) \right) \right]$$

$$I = \rho_0 \pi R^3 \frac{2}{5} R^2 \left[\left(2 + \frac{1}{3} (\cos^3 \theta)_0^{\pi} \right) \right]$$

$$I = \rho_0 \pi R^3 \frac{2}{5} R^2 \left[\left(2 + \frac{1}{3} (-2) \right) \right]$$

$$I = \rho_0 \pi R^3 \frac{2}{5} R^2 \left[\frac{4}{3} \right]$$

$$I = \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{2}{5} R^2$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

مثال: گشتاور لختی دورانی یک کره تو خالی را به دست آورید

$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int \rho^2 \sigma_0 R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\rho = \sqrt{R^2 - z^2}$$

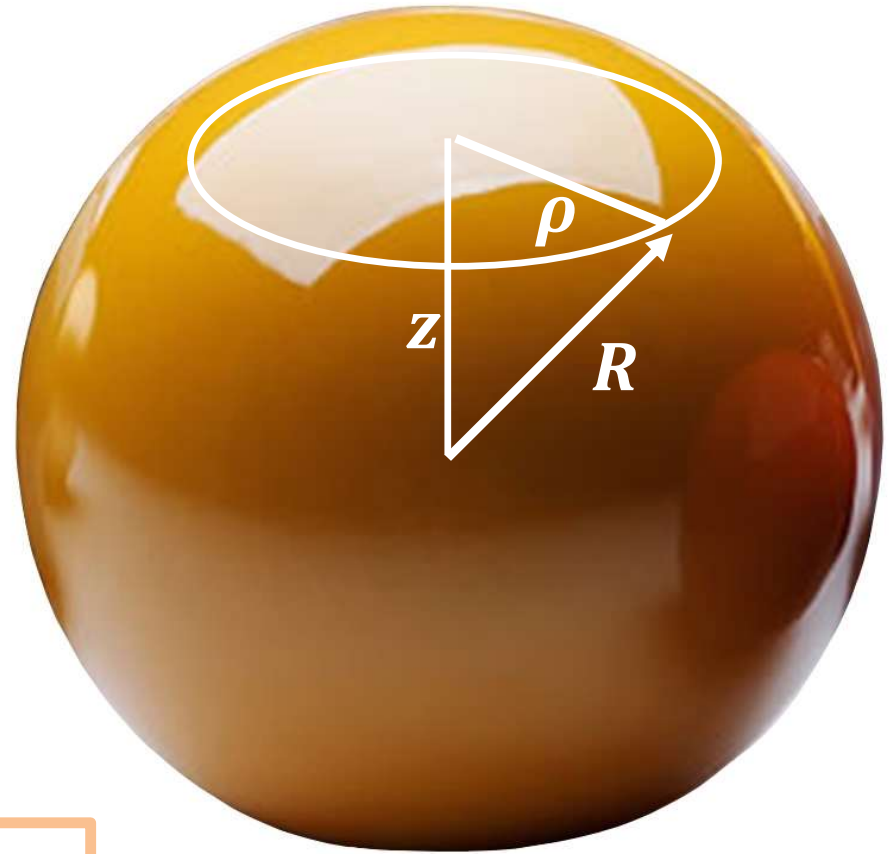
$$z = R \cos \theta$$

$$\rho^2 = R^2 - R^2 \cos^2 \theta$$

$$\rho^2 = R^2 (1 - \cos^2 \theta) = R^2 \sin^2 \theta$$

$$I = \sigma_0 R^4 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\phi$$

$$I = 2\pi \sigma_0 R^4 \left[\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right]$$



$$I = 2\pi\sigma_0 R^4 \left[\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \, d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \right]$$

$$I = 2\pi\sigma_0 R^4 \left[\left((-\cos\theta)_0^{\pi} - \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \right) \right]$$

$$\cos\theta = u$$

$$-\sin\theta d\theta = du$$

$$I = 2\pi\sigma_0 R^4 \left[\left(2 + \int u^2 du \right) \right]$$

$$I = 2\pi\sigma_0 R^4 \left[\left(2 + \frac{1}{3} (u^3) \right) \right]$$

$$I = 2\pi\sigma_0 R^4 \left[\left(2 + \frac{1}{3} (\cos^3 \theta)_0^{\pi} \right) \right]$$

$$I = 2\pi\sigma_0 R^4 \left[\left(2 + \frac{1}{3} (-2) \right) \right]$$

$$I = 2\pi\sigma_0 R^4 \left[\frac{4}{3} \right]$$

$$I = \sigma_0 4\pi R^2 \frac{2}{3} R^2$$

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

اما گشتاور لختی دورانی به محور دوران بستگی دارد

مثال: گشتاور لختی دورانی میله نشان داده شده در شکل را حول محور y' به دست آورید

$$I = \int r^2 dm$$

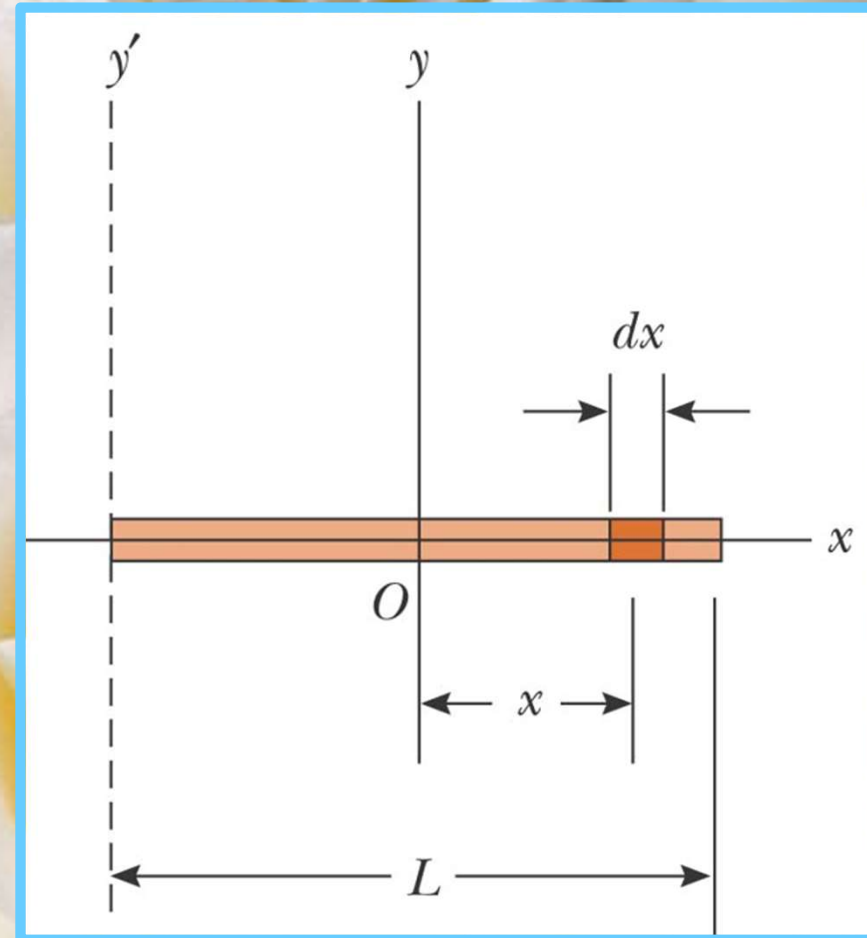
$$I_{y'} = \int_{x=0}^L x^2 \lambda_0 dx$$

$$I_{y'} = \lambda_0 \int_{x=0}^L x^2 dx$$

$$I_{y'} = \lambda_0 \frac{1}{3} (L^3 - 0^3)$$

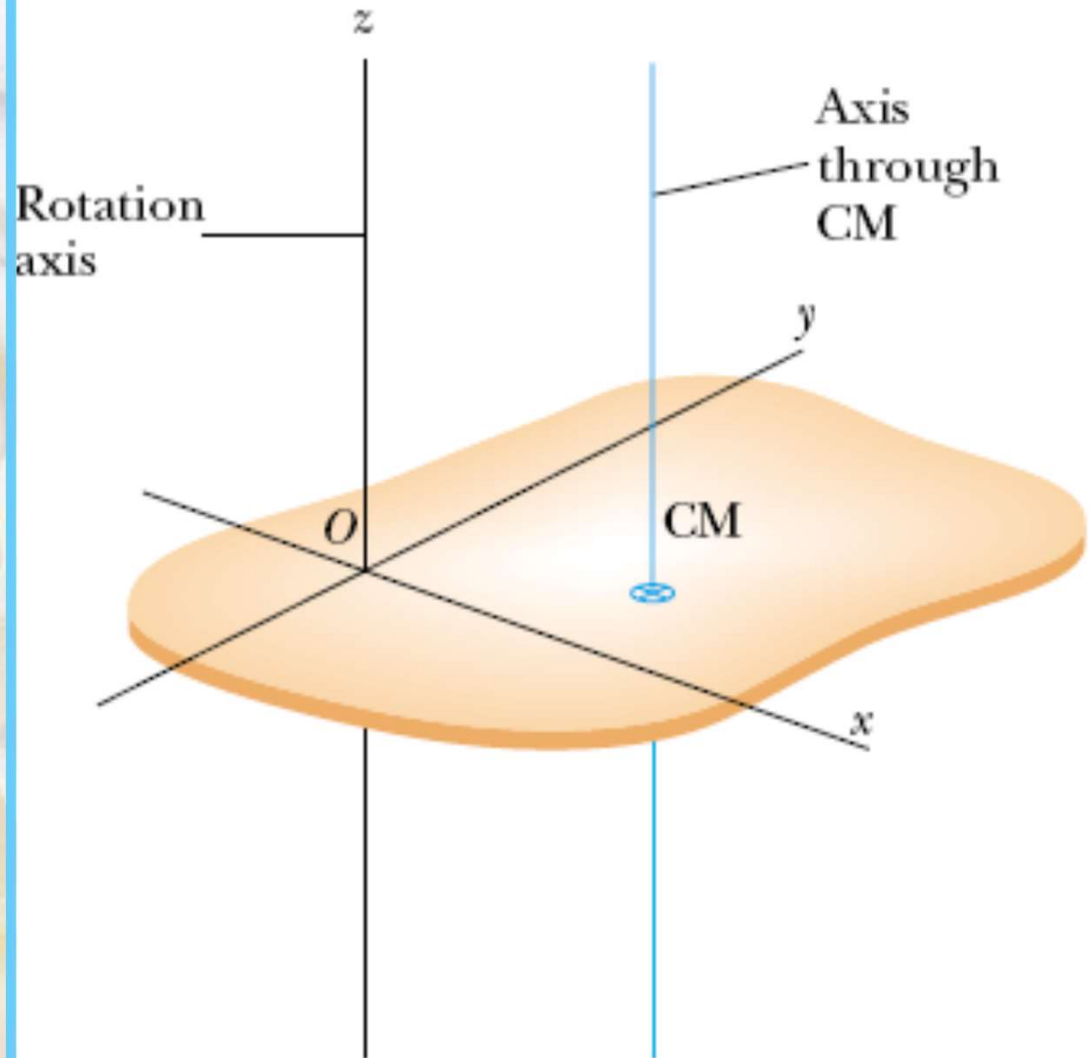
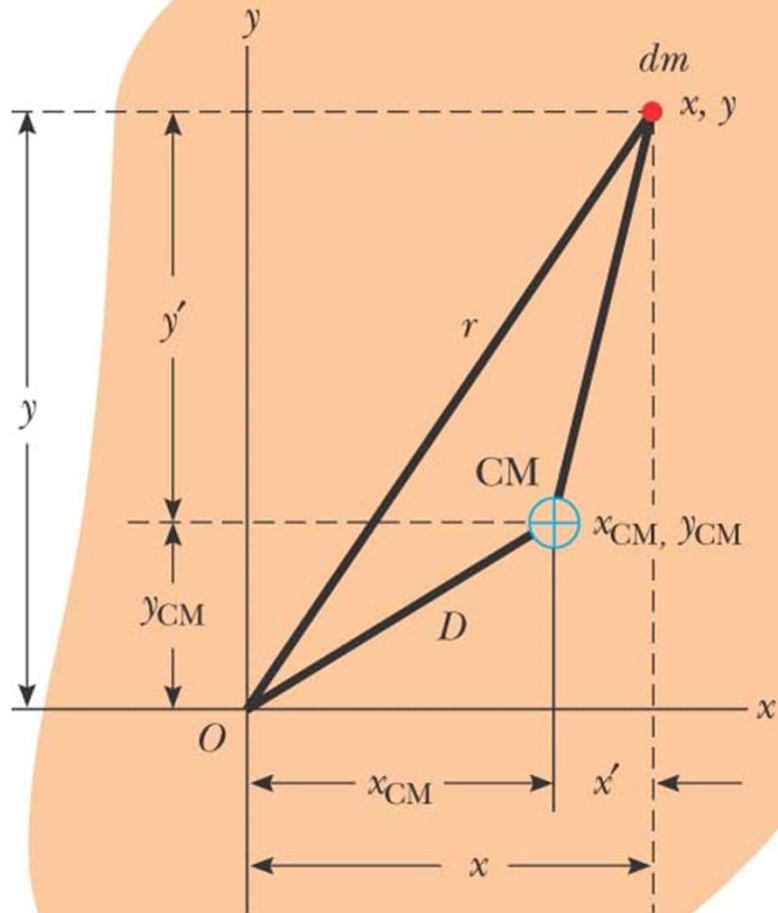
$$I_{y'} = \lambda_0 \frac{1}{3} (L^3) = \frac{1}{3} \lambda_0 L L^2 = \frac{1}{3} M L^2$$

$$I_{y'} = I_{CM} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} M L^2 + \frac{1}{4} M L^2 = \frac{1+3}{12} M L^2 = \frac{4}{12} M L^2 = \frac{1}{3} M L^2$$



$$I = I_{CM} + MD^2$$

قضیه محوره‌های موازی



$$I = \int r^2 dm$$

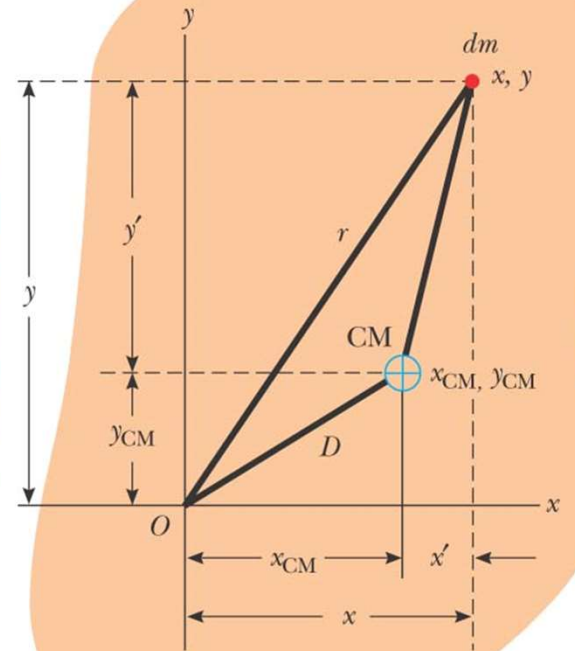
$$I = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I = \int [(x_{CM} + x')^2 + (y_{CM} + y')^2] dm$$

$$I = \int (x_{CM}^2 + 2x_{CM}x' + x'^2 + y_{CM}^2 + 2y_{CM}y' + y'^2) dm$$

$$I = (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) \int dm + \int (x'^2 + y'^2) dm + 2 \int (x_{CM}x' + y_{CM}y') dm$$

$$I = MD^2 + I_{CM}$$

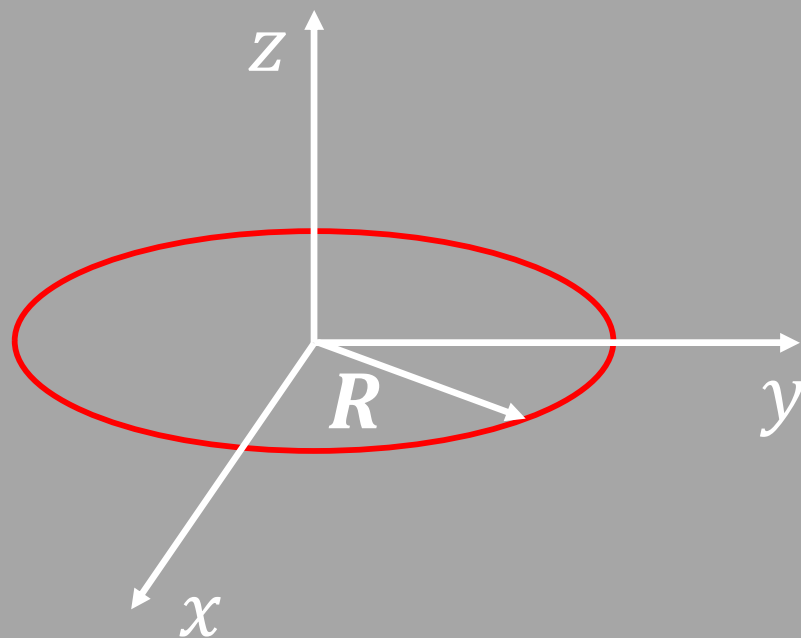


مثال: گشتاور لختی دورانی حلقه دایره ای نشان داده شده در شکل را حول محور y به دست آورید

$$I_y = \int r^2 dm$$

$$I_y = \int x^2 dm = \int (R \cos \varphi)^2 dm$$

$$I_y = R^2 \int \cos^2 \varphi \lambda dl = R^2 \lambda \int \cos^2 \varphi dl$$



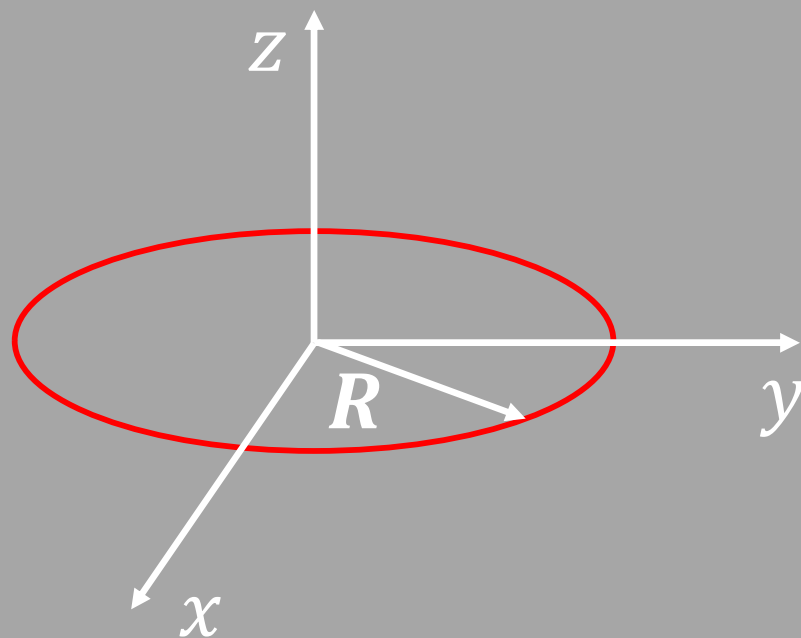
$$\begin{aligned} I_y &= R^2 \lambda \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi R d\varphi = R^3 \lambda \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = R^3 \lambda \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} R^3 \lambda \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right] = \frac{1}{2} R^3 \lambda [2\pi + 0] = \lambda 2\pi R \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned}$$

مثال: گشتاور لختی دورانی حلقه دایره ای نشان داده شده در شکل را حول محور x به دست آورید

$$I_x = \int r^2 dm$$

$$I_x = \int y^2 dm = \int (R \sin \varphi)^2 dm$$

$$I_x = R^2 \int \sin^2 \varphi \lambda dl = R^2 \lambda \int \sin^2 \varphi dl$$



$$\begin{aligned} I_x &= R^2 \lambda \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 \varphi R d\varphi = R^3 \lambda \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = R^3 \lambda \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} R^3 \lambda \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi - \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right] = \frac{1}{2} R^3 \lambda [2\pi - 0] = \lambda 2\pi R \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned}$$

$$I_z = I_x + I_y$$

قضیه محورهاى عمودى

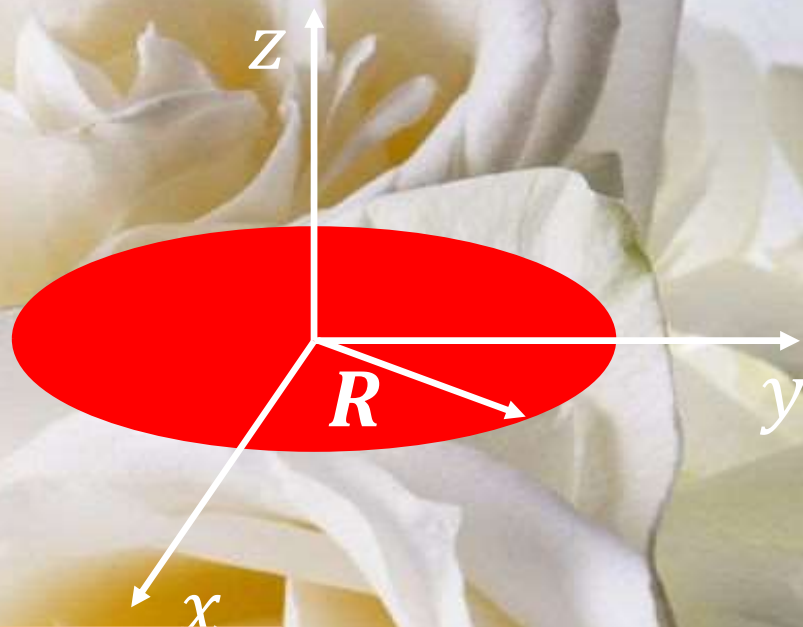
با استفاده از گشتاورهاى لختى دورانى محاسبه شده براى حلقه درستى قضیه محورهاى عمودى را تحقیق کنید

$$I_z = MR^2 = I_x + I_y = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = MR^2$$

مثال: گشتاور لختی دورانی دیسک نشان داده شده در شکل را حول محور y به دست آورید

$$I_y = \int r^2 dm$$

$$I_y = \int x^2 dm = \int (r \cos \varphi)^2 dm$$



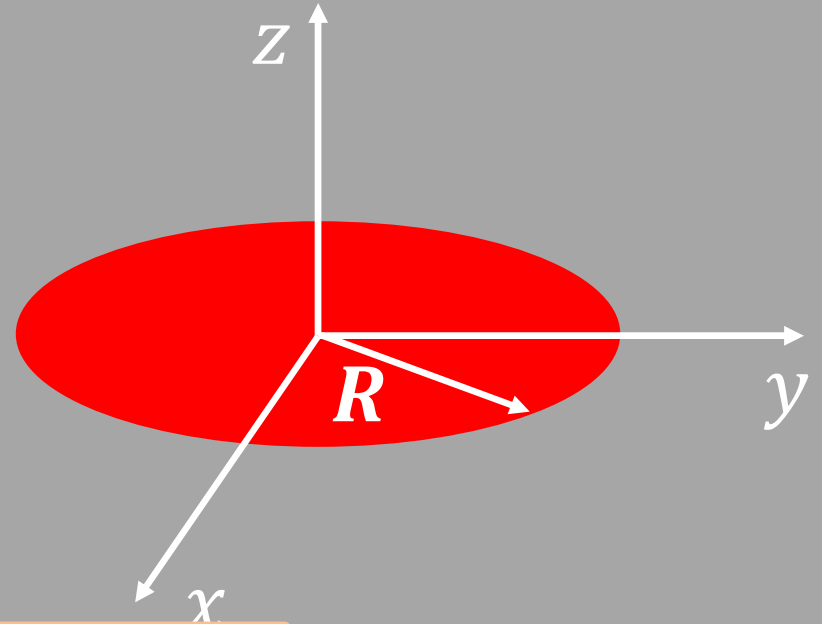
$$I_y = \int r^2 \cos^2 \varphi \sigma da = \sigma \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r^2 \cos^2 \varphi r dr d\varphi$$

$$\begin{aligned} I_y &= \sigma \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \cos^2 \varphi r^3 dr d\varphi = \sigma \frac{1}{4} R^4 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \sigma R^4 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \sigma R^4 \frac{1}{2} \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right] = \frac{1}{4} \sigma R^4 \frac{1}{2} [2\pi + 0] = \sigma \pi R^2 \frac{1}{4} R^2 = \frac{1}{4} M R^2 \end{aligned}$$

مثال: گشتاور لختی دورانی دیسک نشان داده شده در شکل را حول محور x به دست آورید

$$I_x = \int r^2 dm$$

$$I_x = \int y^2 dm = \int (r \sin \varphi)^2 dm$$



$$I_x = \int r^2 \sin^2 \varphi \sigma da = \sigma \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r^2 \sin^2 \varphi r dr d\varphi$$

$$\begin{aligned} I_y &= \sigma \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \sin^2 \varphi r^3 dr d\varphi = \sigma \frac{1}{4} R^4 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \sigma R^4 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \sigma R^4 \frac{1}{2} \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi - \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right] = \frac{1}{4} \sigma R^4 \frac{1}{2} [2\pi - 0] = \sigma \pi R^2 \frac{1}{4} R^2 = \frac{1}{4} M R^2 \end{aligned}$$

$$I_z = I_x + I_y$$

قضیه محورهاى عمودى

با استفاده از گشتاورهاى لختى دورانى محاسبه شده براى ديسك درستى قضيه محورهاى عمودى را تحقيق كنيد

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 = I_x + I_y = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{4}MR^2 = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{SS} = \frac{2}{5}MR^2 = 0.4MR^2$$

کره توپر

$$I_{HS} = \frac{2}{3}MR^2 \approx 0.67MR^2$$

کره توخالی

$$I_{SC} = \frac{1}{2}MR^2 = 0.5MR^2$$

استوانه توپر

$$I_{HC} = MR^2$$

استوانه توخالی

$$I_{HC} > I_{HS} > I_{SC} > I_{SS}$$

