

دوران یک جسم صلب

حرکت یک جسم صلب در فضا

حرکت یک جسم صلب در فضا توسط معادلات زیر معین می شود

$$\frac{dP}{dt} = F$$

$$\frac{dL}{dt} = N$$

$$P = MV$$

$$L = I. \omega$$

$$\frac{d(MV)}{dt} = F$$

$$\frac{d(I. \omega)}{dt} = N$$

$$M = \text{constant}$$

$$I \neq \text{constant}$$

$$M \frac{dV}{dt} = F$$

$$I. \frac{d\omega}{dt} \neq N$$

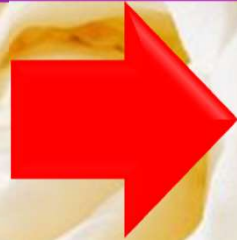
پس مشکل بررسی حرکت یک جسم صلب در فضا این است که گشتاور لختی دورانی آن می تواند متغیر باشد و در نتیجه با زمان و چرخش جسم تغییر کند

معادلات اوپلر و حرکت یک جسم در فضا

برای رفع مشکل متغیر بودن گشتاور لختی دورانی دستگاه مختصات را روی خود جسم قرار می دهیم به طوری که مبدا مختصات دستگاه منطبق بر مرکز جرم جسم و محورهاى آن نیز منطبق بر محورهاى اصلی جسم باشند

در این صورت تانسور گشتاور لختی دورانی قطری و سه عنصر قطری آن همواره با زمان ثابت خواهند بود

$$\frac{d(I \cdot \omega)}{dt} = N$$

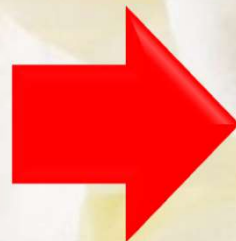


$$\frac{d'(I \cdot \omega)}{dt} + \omega \times L = N$$

که در آن علامت پریم معرف مشتق گیری در دستگاه متحرک جسم است و چون در دستگاه متصل به جسم تانسور لختی دورانی ثابت است پس خواهیم داشت

$$I \cdot \frac{d'\omega}{dt} + \omega \times L = N$$

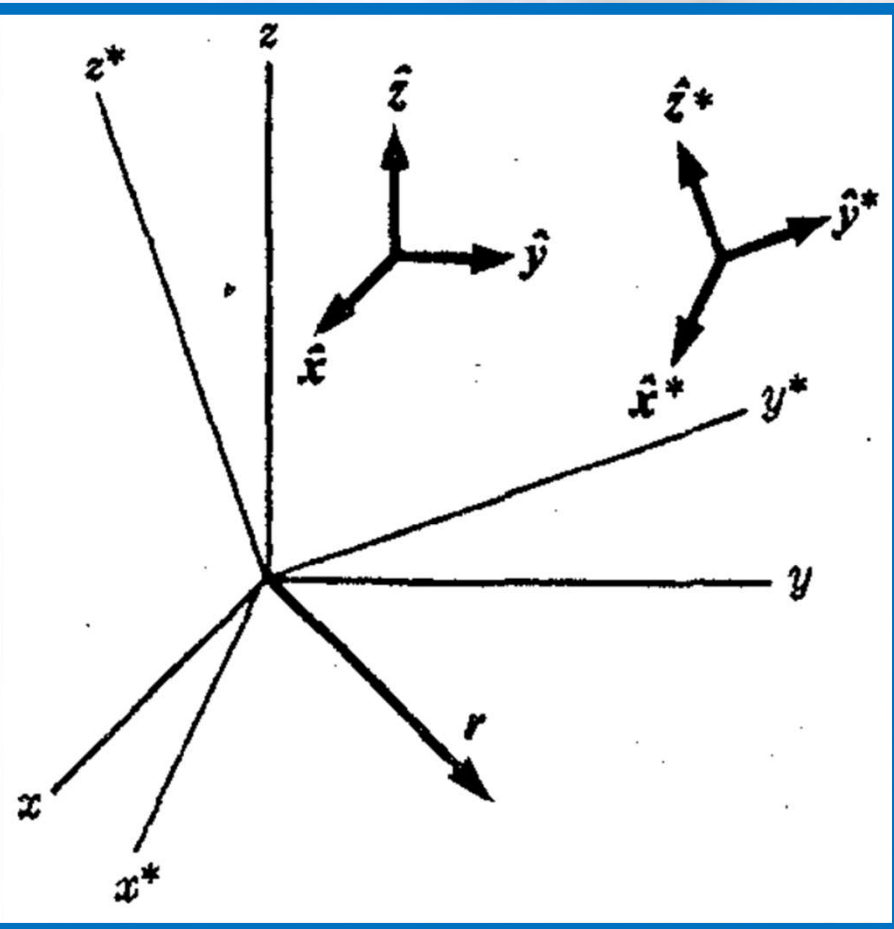
$$\frac{d'\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$



$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega \times L = N$$

جمله دوم از کجا ناشی شده است؟

برای روشن شدن منشا جمله دوم دستگاه ستاره دار دوار را نسبت به دستگاه ساکن در نظر می گیریم



$$r = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$r = x^*\hat{x}^* + y^*\hat{y}^* + z^*\hat{z}^*$$

$$\hat{x} \cdot r = x = x^*(\hat{x} \cdot \hat{x}^*) + y^*(\hat{x} \cdot \hat{y}^*) + z^*(\hat{x} \cdot \hat{z}^*)$$

$$\hat{y} \cdot r = y = x^*(\hat{y} \cdot \hat{x}^*) + y^*(\hat{y} \cdot \hat{y}^*) + z^*(\hat{y} \cdot \hat{z}^*)$$

$$\hat{z} \cdot r = z = x^*(\hat{z} \cdot \hat{x}^*) + y^*(\hat{z} \cdot \hat{y}^*) + z^*(\hat{z} \cdot \hat{z}^*)$$

علاوه بر بردار مکان برای بردارهای معمولی هم به طور مشابه می توان نوشت

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{A}_x \hat{\mathbf{x}} + \dot{A}_y \hat{\mathbf{y}} + \dot{A}_z \hat{\mathbf{z}}$$

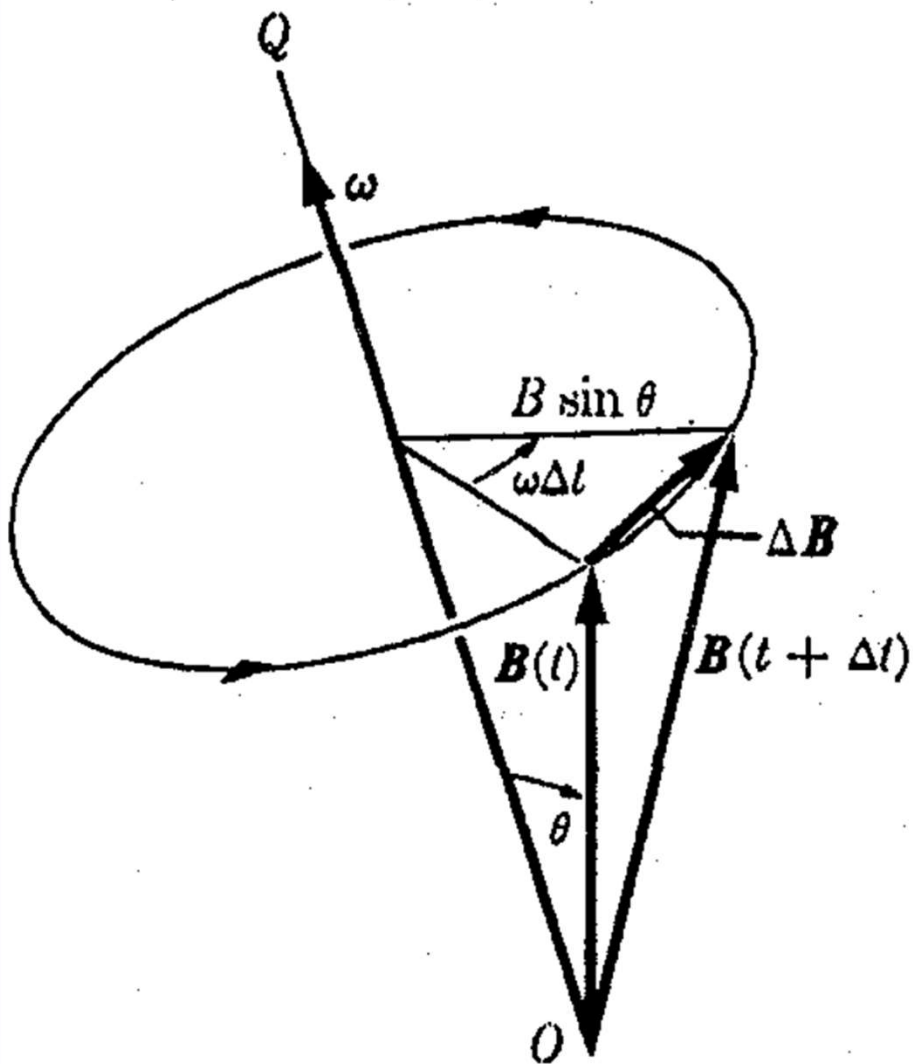
$$\mathbf{A} = A_x^* \hat{\mathbf{x}}^* + A_y^* \hat{\mathbf{y}}^* + A_z^* \hat{\mathbf{z}}^*$$

$$\frac{d^* \mathbf{A}}{dt} = \dot{A}_x^* \hat{\mathbf{x}}^* + \dot{A}_y^* \hat{\mathbf{x}}^* + \dot{A}_z^* \hat{\mathbf{x}}^*$$

$$\mathbf{A} = A_x^* \hat{\mathbf{x}}^* + A_y^* \hat{\mathbf{y}}^* + A_z^* \hat{\mathbf{z}}^*$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{A}_x^* \hat{\mathbf{x}}^* + \dot{A}_y^* \hat{\mathbf{x}}^* + \dot{A}_z^* \hat{\mathbf{x}}^* + A_x^* \frac{d\hat{\mathbf{x}}^*}{dt} + A_y^* \frac{d\hat{\mathbf{y}}^*}{dt} + A_z^* \frac{d\hat{\mathbf{z}}^*}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d^* \mathbf{A}}{dt} + A_x^* \frac{d\hat{\mathbf{x}}^*}{dt} + A_y^* \frac{d\hat{\mathbf{y}}^*}{dt} + A_z^* \frac{d\hat{\mathbf{z}}^*}{dt}$$



$$\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{B}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta t}$$

از روی شکل (مثلث درون دایره) پیدا است که

$$|\Delta \mathbf{B}| = (B \sin \theta) \omega \Delta t$$

$$|\Delta \mathbf{B}| = (\omega B \sin \theta) \Delta t$$

$$\Delta \mathbf{B} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}) \Delta t$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}) \Delta t}{\Delta t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{A}}{dt} + A_x^* \frac{d\hat{\mathbf{x}}^*}{dt} + A_y^* \frac{d\hat{\mathbf{y}}^*}{dt} + A_z^* \frac{d\hat{\mathbf{z}}^*}{dt}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}^*}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}^*$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{y}}^*}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{y}}^*$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{z}}^*}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}^*$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{A}}{dt} + A_x^*(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}^*) + A_y^*(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{y}}^*) + A_z^*(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}^*)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (A_x^* \hat{\mathbf{x}}^*) + \boldsymbol{\omega} \times (A_y^* \hat{\mathbf{y}}^*) + \boldsymbol{\omega} \times (A_z^* \hat{\mathbf{z}}^*)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (A_x^* \hat{\mathbf{x}}^* + A_y^* \hat{\mathbf{y}}^* + A_z^* \hat{\mathbf{z}}^*)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

پس با توجه به رابطه اثبات شده

منشا جمله دوم رابطه زیر

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega})}{dt} = \frac{d'\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \frac{d'(\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega})}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}$$

که در آن پریم همان علامت ستاره است روشن شد

اکنون به ادامه بحث می توانیم برگردیم

$$\mathbf{I} \cdot \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{N}$$

$$\frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$



$$\mathbf{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}$$

$$\mathbf{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{N}$$

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1 \omega_1 & I_2 \omega_2 & I_3 \omega_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1 \omega_1 & I_2 \omega_2 & I_3 \omega_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_3 \omega_2 \omega_3 - I_2 \omega_2 \omega_3 \\ I_1 \omega_1 \omega_3 - I_3 \omega_1 \omega_3 \\ I_2 \omega_1 \omega_2 - I_1 \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = N_3 \end{cases}$$

معادلات اوپلر حرکت یک جسم صلب

قضیه انرژی را از معادلات اوایلر به دست آورید

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega \times (I \cdot \omega) = N$$

$$\omega \cdot I \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega \cdot [\omega \times (I \cdot \omega)] = \omega \cdot N$$

$$\omega \cdot I \cdot \frac{d\omega}{dt} + 0 = \omega \cdot N$$

$$\omega \cdot I \cdot \frac{d\omega}{dt} = \omega \cdot N$$

$$\frac{d\omega}{dt} \cdot \omega \cdot I = \omega \cdot N$$

$$\frac{d'\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d'\omega}{dt} \cdot \omega \cdot I = \omega \cdot N$$

چون I یک تانسور متقارن است، ضرب آن دارای خاصیت جابه جایی است، پس:

$$\frac{d'\omega}{dt} \cdot \omega \cdot I = \omega \cdot N$$

$$\frac{1}{2} \frac{d'}{dt} (\omega \cdot I \cdot \omega) = \omega \cdot N$$

$$\frac{d'}{dt} \left(\frac{1}{2} \omega \cdot I \cdot \omega \right) = \omega \cdot N$$

$$\frac{d'T}{dt} = \omega \cdot N$$

$$\frac{dT}{dt} = \omega \cdot N$$

$$\frac{dT}{dt} = v \cdot F$$

چون I در دستگاه دوار پریم دار ثابت است

چون T اسکالر است مشتق پریم دار و غیرپریم دار هم ارزند

که همان قضیه انرژی است که قبلا در حرکت غیر دوار به صورت زیر به دست آورده بودیم

ثابت کنید که یک جسم نمی تواند با سرعت زاویه ای ثابت ω بچرخد، بجز حول یک محور اصلی، مگر آن که گشتاورهای نیروی خارجی اعمال شوند

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega \times (I \cdot \omega) = N$$

$$\text{if } \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$0 + \omega \times (I \cdot \omega) = N$$

$$\omega \times (I \cdot \omega) = N$$

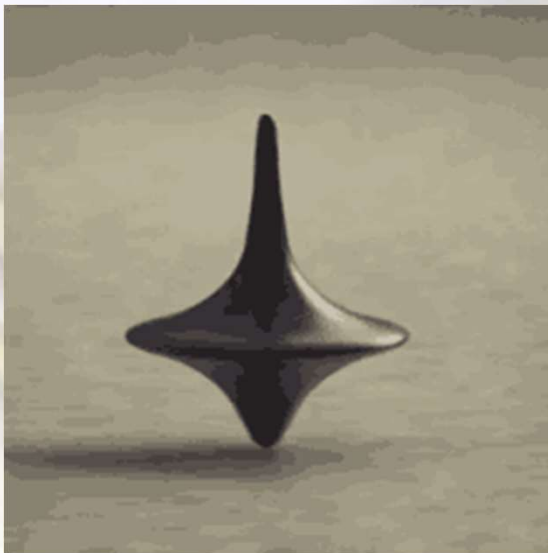
یعنی اگر قرار است که یک چرخ آزادانه بچرخد بدون آن که نیرو و گشتاور نیرو به تکیه گاه های خود وارد کند، نه تنها باید از نظر استاتیکی در حال تعادل باشد، یعنی مرکز جرم آن بر محور دوران منطبق باشد، بلکه همان طور که هر مکانیک خودرو می داند از نظر دینامیکی نیز باید در حال تعادل باشد، یعنی محور دوران باید محور اصلی تانسور گشتاور لختی دورانی باشد.

$$\text{if } \omega \parallel I \cdot \omega \Rightarrow \omega \times (I \cdot \omega) = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\omega \parallel I \cdot \omega \Rightarrow I \cdot \omega \propto \omega \Rightarrow I \cdot \omega = \lambda \omega \quad \exists \lambda \text{ is a constant}$$

و این یعنی ω ویژه حالت تانسور I است

که این به نوبه خود ایجاب می کند که ω در امتداد یکی از محورهاى اصلی جسم باشد



یعنی اگر بخواهیم که یک فرفره را با سرعت زاویه ثابتی حول فقط یک محور بچرخانیم باید آن فرفره کاملاً متقارن و آن تک محور دوران یکی از محوره‌های اصلی فرفره و عمود بر زمین باشد تا هیچ نیرو و گشتاور نیرویی بر آن وارد نشود (یعنی بر آیند نیروها و گشتاور نیروهای وارد بر آن صفر باشند)، مانند فرفره‌های سمت چپ.

در غیر این صورت باید حول دو یا چند محور بچرخد، مانند فرفره سمت راست.

بر فرفره (فرفره‌های) سمت راست (چپ) گشتاور نیرو وارد می‌شود (نمی‌شود)

برای حل معادلات اوایلر و به دست آوردن $\omega(t)$ نیاز داریم که تمام مولفه های گشتاور نیرو را در امتداد محورهای اصلی دوران بدانیم، که چنین وضعیتی جز در مورد خاص $N = 0$ معمول نیست

پس با فرض $N = 0$ معادلات اوایلر را بازنویسی می کنیم:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = N_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases}$$

حال اگر برای سادگی دستگاه مقارن را مقارن در نظر بگیریم به طوری که بتوان فرض کرد $I_1 = I_2 \neq I_3$ ، معادلات اوایلر باز هم به صورت زیر ساده تر می شوند

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_1 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_2 \omega_3 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_1 \omega_3 = 0 \\ \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{constant} \end{cases}$$

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} = \beta$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \beta \omega_2 \omega_3 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - \beta \omega_1 \omega_3 = 0 \\ \omega_3 = \text{constant} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \beta \omega_2 \omega_3 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - \beta \omega_1 \omega_3 = 0 \\ \omega_3 = \text{constant} \end{cases}$$

$$\omega_1 = A_1 e^{pt} \text{ \& } \omega_2 = A_2 e^{pt}$$

$$\dot{\omega}_1 + \beta \omega_2 \omega_3 = 0$$

$$A_1 p e^{pt} + \beta A_2 e^{pt} \omega_3 = 0$$

$$A_1 p + \beta A_2 \omega_3 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 - \beta \omega_1 \omega_3 = 0$$

$$A_2 p e^{pt} - \beta A_1 e^{pt} \omega_3 = 0$$

$$A_2 p - \beta A_1 \omega_3 = 0$$

$$A_2 p - \beta \left(-\frac{\beta A_2 \omega_3}{p} \right) \omega_3 = 0$$

$$p = - \left(\frac{\beta^2 \omega_3^2}{p} \right)$$

$$p^2 = -(\beta \omega_3)^2$$

$$p = \pm i \beta \omega_3$$

$$\omega_1 = A_1 e^{\pm i \beta \omega_3 t} \text{ \& } \omega_2 = A_2 e^{\pm i \beta \omega_3 t}$$

$$A_1 p = -\beta A_2 \omega_3$$

$$A_1 (\pm i \beta \omega_3) = -\beta A_2 \omega_3$$

$$A_1 (\pm i) = -A_2$$

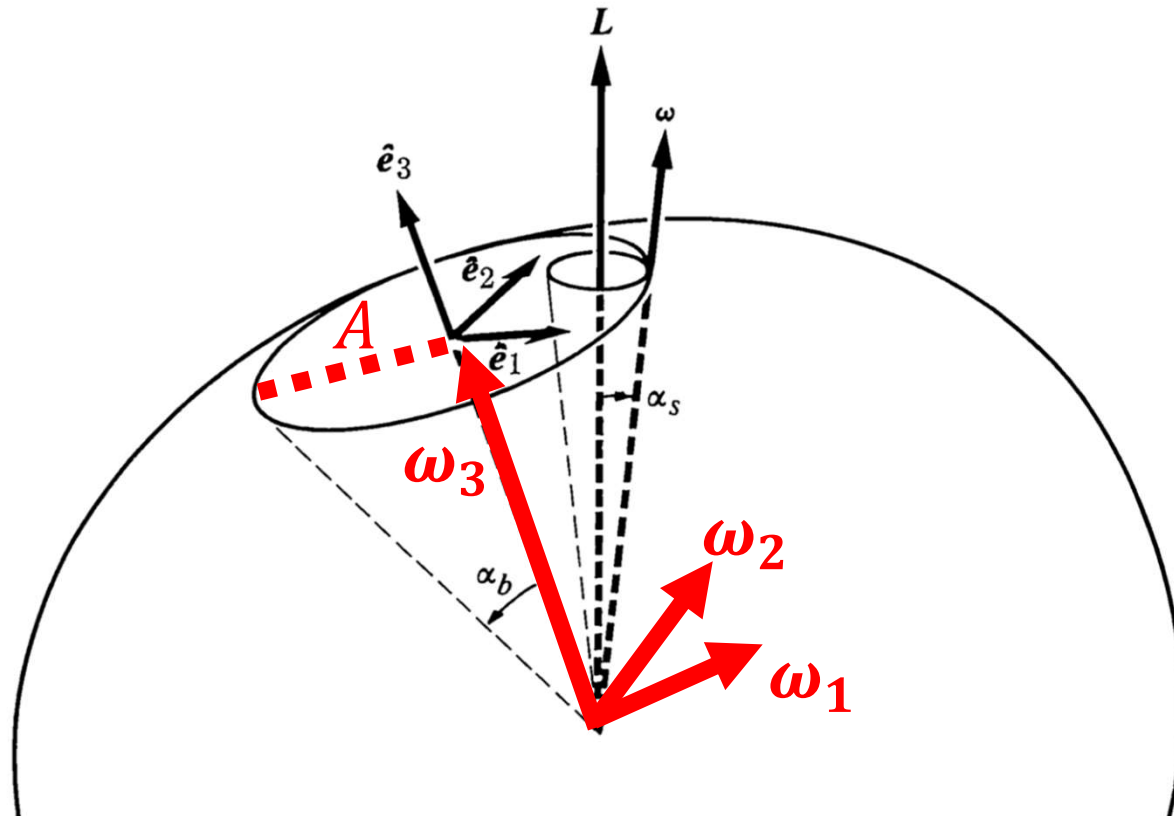
$$\mp i A_1 = A_2$$

$$\omega_1 = e^{\pm i \beta \omega_3 t} \text{ \& } \omega_2 = \mp i e^{\pm i \beta \omega_3 t}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= A \cos(\beta \omega_3 t + \theta) \\ \omega_2 &= A \sin(\beta \omega_3 t + \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= A \cos(\beta \omega_3 t + \theta) \\ \omega_2 &= A \sin(\beta \omega_3 t + \theta) \\ \omega_3 &= \text{constant}\end{aligned}$$

این معادلات نشان می دهند که بردار ω در دایره ای به شعاع A حول محور $\hat{e}_3$ با سرعت زاویه ای $\beta \omega_3$ حرکت تقدیمی انجام می دهد



$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \\ &= A^2 \cos^2(\beta \omega_3 t + \theta) \\ &\quad + A^2 \sin^2(\beta \omega_3 t + \theta) \\ &\quad + \omega_3^2 = A^2 + \omega_3^2\end{aligned}$$

$$\omega^2 = A^2 + \omega_3^2$$

$$\omega = \sqrt{A^2 + \omega_3^2}$$

$$\begin{aligned}A, \omega_3 &= \text{constant} \\ \Rightarrow \omega &= \text{constant}\end{aligned}$$

اگر $I_1 > I_3$ ($I_1 < I_3$) باشد، آنگاه $\beta > 0$ ($\beta < 0$) می شود، بنابراین $\beta \omega_3$ همبست (مختلف الجهت) با ω_3 می شود، و لذا حرکت تقدیمی با سرعت زاویه ای $\beta \omega_3$ در همان (خلاف) جهت ω_3 انجام می شود

سه ثابت A ، θ و ω ناشی از سه معادله مرتبه اول اویلر با شرایط اولیه معین می شوند.

وقتی که جسم حول محور تقارن حرکت تقدیمی انجام می دهد، محور دوران لحظه ای، که به وسیله بردار ω معین می شود، در جسم مخروطی به نام مخروط جسم به وجود می آورد

$$\tan \alpha_b = \frac{A}{\omega_3}$$

نیم زاویه مخروط جسم، α_b ، به وسیله رابطه زیر داده می شود

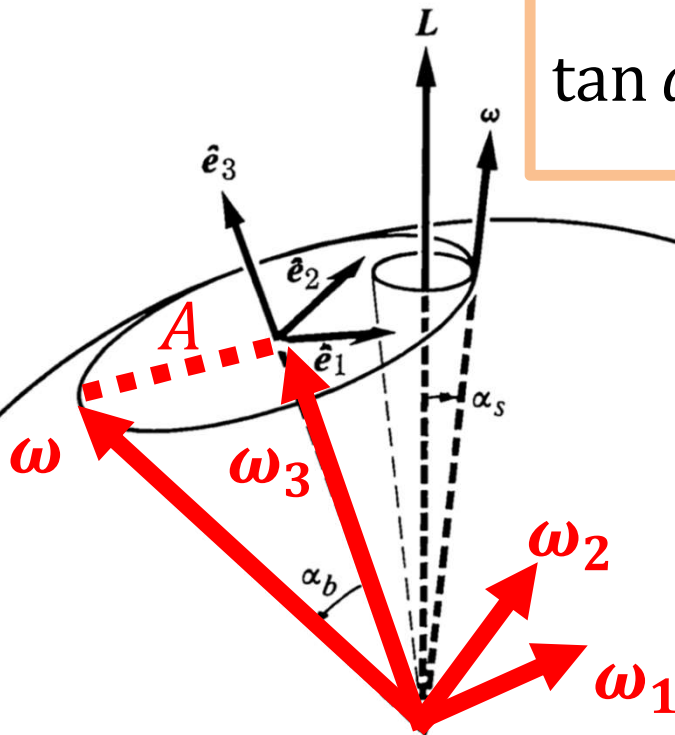
به عبارت دیگر، اگر جسم از ابتدا با سرعت زاویه ای ω حول محوری که با محور تقارن α_b زاویه می سازد دوران کند، در این صورت ثابتهای A و ω_3 با روابط زیر داده می شوند

$$A = \omega \sin \alpha_b$$

$$\omega_3 = \omega \cos \alpha_b$$

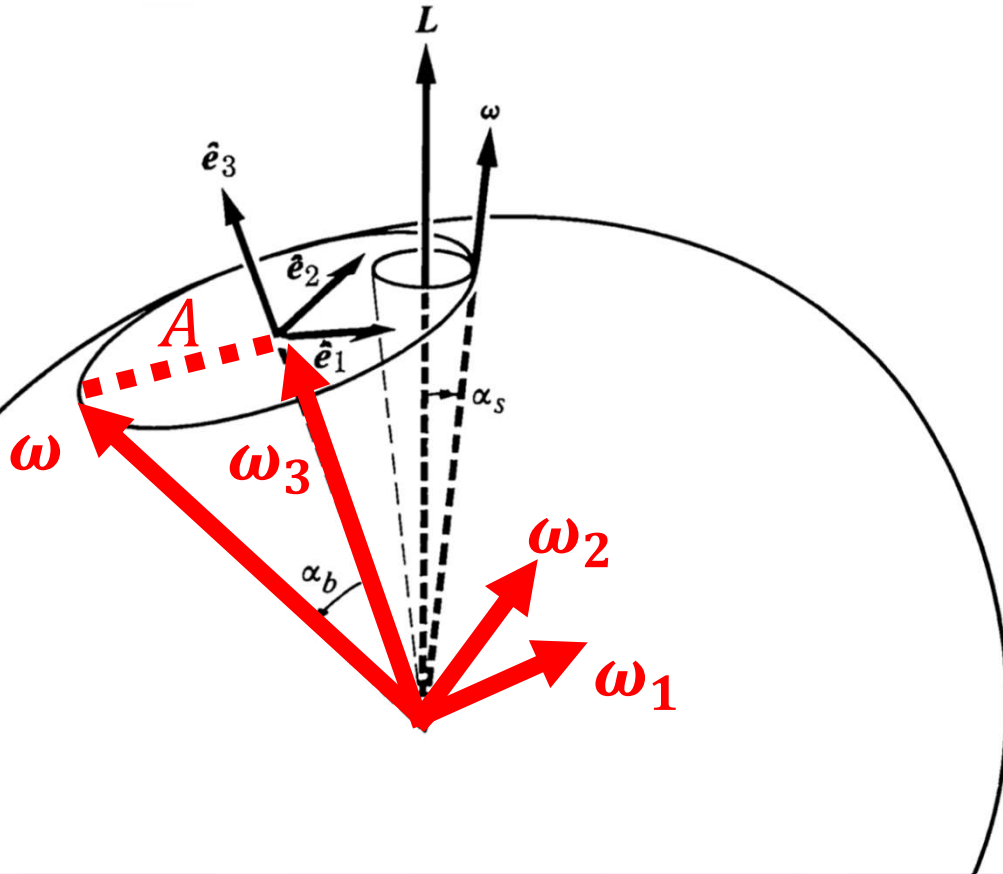
برای آن که حرکت جسم در فضا را پیدا کنیم، نیاز داریم که مکان محور ω را به طور لحظه ای نسبت به یک جهت معین در فضا تعیین کنیم

این کار را می توانیم به وسیله تعقیب پیوسته حرکت جسم نسبت به محورهایی فضا در حالی که اجازه داده ایم که جسم با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محوری در مخروط جسم که با سرعت زاویه ای $\beta \omega_3$ در حرکت تقدیمی است انجام دهیم



آسانتر است که ω را نسبت به L مشخص کنیم، زیرا اگر $N = 0$ باشد L ثابت است

$$N = 0 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{constant}$$



نیم زاویه مخروط فضایی، α_s ، به وسیله رابطه زیر داده می شود

$$\cos \alpha_s = \frac{\omega \cdot L}{\omega L} = \frac{\omega \cdot I \cdot \omega}{\omega L} = \frac{2T}{\omega L}$$

$$N = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \omega \cdot N$$
$$= \mathbf{0} \Rightarrow T = \text{constant}$$

$$\begin{aligned} T \text{ and } \omega \text{ and } L &= \text{constant} \\ \Rightarrow \cos \alpha_s &= \frac{2T}{\omega L} = \text{constant} \\ \Rightarrow \alpha_s &= \text{constant} \end{aligned}$$

بنابراین محور دوران مخروطی در فضا رسم می کند که مخروط فضا نامیده می شود

خط تماس بین مخروط فضا و مخروط جسم در هر لحظه محور لحظه ای دوران است، چون این محور در جسم در هر لحظه در حال سکون است، مخروط جسم بی لغزش حول مخروط فضا می غلتد

$$\mathbf{I} = (\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_2)\mathbf{I}_1 + \hat{\mathbf{e}}_3\hat{\mathbf{e}}_3\mathbf{I}_3$$

$$\mathbf{I} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) \right) \mathbf{I}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) \mathbf{I}_3$$

$$\mathbf{I} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \mathbf{I}_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{I}_3$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{I}_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{I}_3$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1)$$

$$\mathbf{I} = (\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_2)\mathbf{I}_1 + \hat{\mathbf{e}}_3\hat{\mathbf{e}}_3\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1\mathbf{I} + \hat{\mathbf{e}}_3\hat{\mathbf{e}}_3(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{I} = I_1 \mathbf{I} + \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 (I_3 - I_1)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{n}}$$

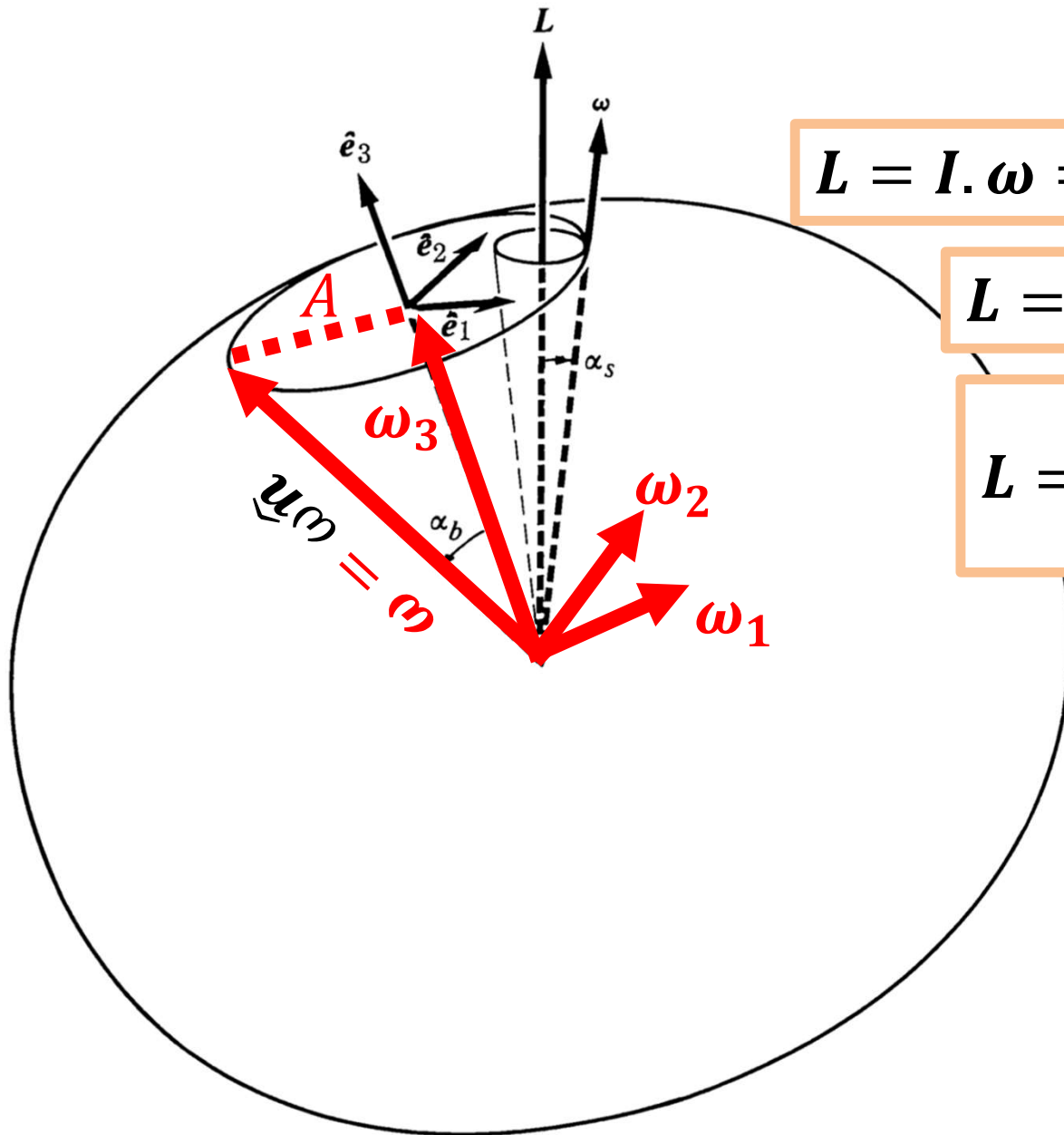
$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = I_1 \omega \hat{\mathbf{n}} + \omega \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{n}} (I_3 - I_1)$$

$$\mathbf{L} = I_1 \omega \hat{\mathbf{n}} + \omega \hat{\mathbf{e}}_3 \cos \alpha_b (I_3 - I_1)$$

$$\mathbf{L} = I_1 \omega \left(\hat{\mathbf{n}} + \frac{I_3 - I_1}{I_1} \cos \alpha_b \hat{\mathbf{e}}_3 \right)$$

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} = \beta$$

$$\mathbf{L} = I_1 \omega (\hat{\mathbf{n}} + \beta \cos \alpha_b \hat{\mathbf{e}}_3)$$



$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{I} = I_1 \mathbf{I} + \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 (I_3 - I_1)$$

$$T = \frac{1}{2} \omega \hat{\mathbf{n}} \cdot (I_1 \mathbf{I} + \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 (I_3 - I_1)) \cdot \omega \hat{\mathbf{n}}$$

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 (I_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{n}} (I_3 - I_1))$$

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 (I_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \cos \alpha_b \cos \alpha_b (I_3 - I_1))$$

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 (I_1 + \cos^2 \alpha_b (I_3 - I_1))$$

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 I_1 \left(1 + \cos^2 \alpha_b \frac{I_3 - I_1}{I_1} \right)$$

$$2T = \omega^2 I_1 (1 + \beta \cos^2 \alpha_b)$$

$$2T = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$= (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3) \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3) \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_1 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$= I_1 \omega_1^2 + I_1 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2$$

$$= I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2$$

$$= I_1 \omega^2 + (I_3 - I_1) \omega_3^2$$

$$= I_1 (\omega^2 + \beta \omega_3^2) = I_1 \omega^2 \left(1 + \beta \frac{\omega_3^2}{\omega^2} \right)$$

$$= I_1 \omega^2 (1 + \beta \cos^2 \alpha_b)$$

روش دوم

$$\cos \alpha_s = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{\omega L} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\omega L} = \frac{2T}{\omega L}$$

$$2T = \omega^2 I_1 (1 + \beta \cos^2 \alpha_b)$$

$$\cos \alpha_s = \frac{\omega^2 I_1 (1 + \beta \cos^2 \alpha_b)}{\omega L}$$

$$\cos \alpha_s = \frac{1 + \beta \cos^2 \alpha_b}{\frac{L}{\omega I_1}}$$

$$\mathbf{L} = I_1 \omega (\hat{\mathbf{n}} + \beta \cos \alpha_b \hat{\mathbf{e}}_3)$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = (I_1 \omega)^2 (\hat{\mathbf{n}} + \beta \cos \alpha_b \hat{\mathbf{e}}_3)^2$$

$$L^2 = (I_1 \omega)^2 (1 + \beta^2 \cos^2 \alpha_b + 2\beta \cos \alpha_b \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3)$$

$$L^2 = (I_1 \omega)^2 (1 + \beta^2 \cos^2 \alpha_b + 2\beta \cos \alpha_b \cos \alpha_b)$$

$$L^2 = (I_1 \omega)^2 (1 + \beta^2 \cos^2 \alpha_b + 2\beta \cos^2 \alpha_b)$$

$$L^2 = (I_1 \omega)^2 (1 + (\beta^2 + 2\beta) \cos^2 \alpha_b)$$

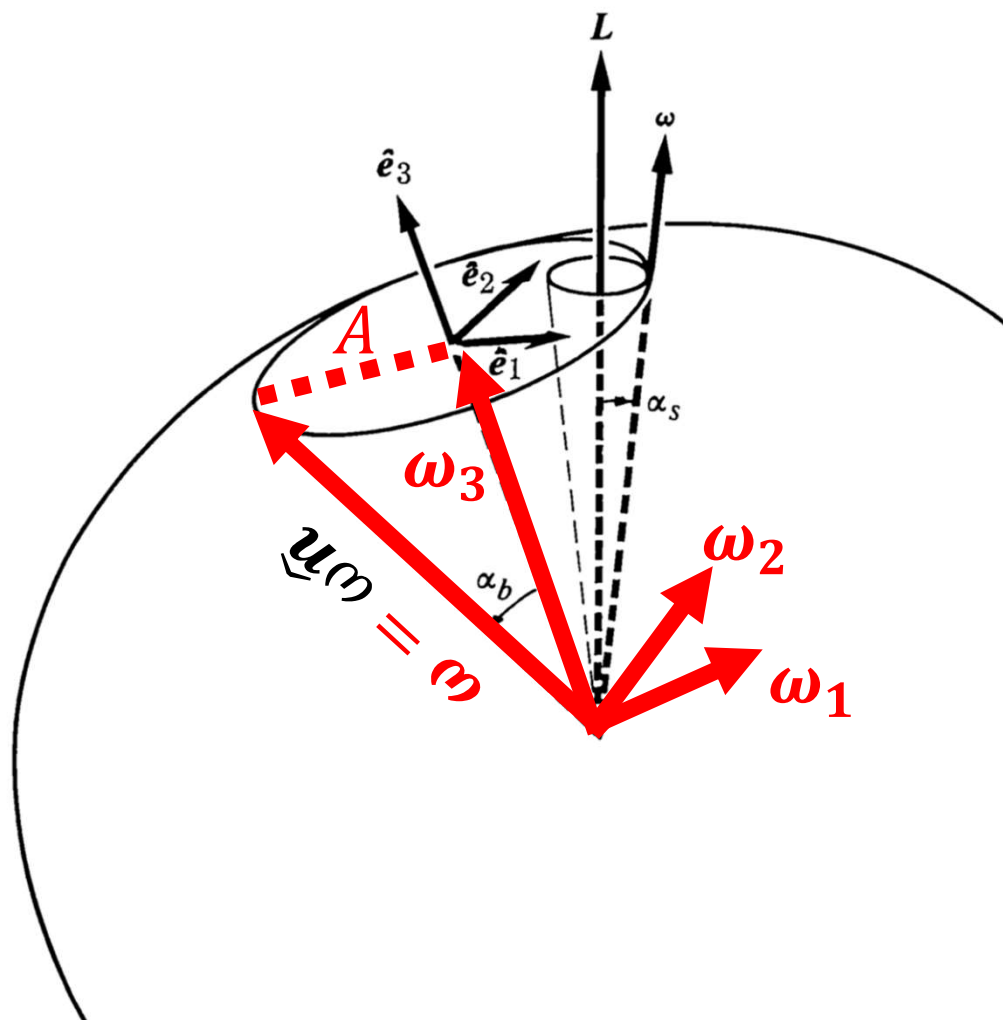
$$\frac{L^2}{(I_1 \omega)^2} = 1 + (\beta^2 + 2\beta) \cos^2 \alpha_b$$

$$\frac{L}{I_1 \omega} = \sqrt{1 + (\beta^2 + 2\beta) \cos^2 \alpha_b}$$

$$\cos \alpha_s = \frac{1 + \beta \cos^2 \alpha_b}{\sqrt{1 + (\beta^2 + 2\beta) \cos^2 \alpha_b}}$$

$$2T = \omega^2 I_1 (1 + \beta \cos^2 \alpha_b)$$

$$\mathbf{L} = I_1 \omega (\hat{\mathbf{n}} + \beta \cos \alpha_b \hat{\mathbf{e}}_3)$$



$$\cos \alpha_s = \frac{1 + \beta \cos^2 \alpha_b}{\sqrt{1 + (\beta^2 + 2\beta) \cos^2 \alpha_b}}$$

دقت کنید که α_s فقط بستگی به α_b دارد نه به ω

اگر $\beta > 0$ ($\beta < 0$) باشد، مخروط فضایی داخل (خارج) مخروط جسم قرار می گیرد، زیرا اگر مخروط جسم بر روی مخروط فضا بغلتد، حرکت تقدیمی محور دوران باید دارای جهتی باشد که به وسیله معادلات زیر داده می شود

$$\omega_1 = A \cos(\beta \omega_3 t + \theta)$$

$$\omega_2 = A \sin(\beta \omega_3 t + \theta)$$

$$\omega_3 = \text{constant}$$

اگر $I_1 > I_3$ ($I_1 < I_3$) باشد، آنگاه $\beta > 0$ ($\beta < 0$) می شود، بنابراین $\beta \omega_3$ همجت (مختلف الجهت) با ω_3 می شود، و لذا حرکت تقدیمی با سرعت زاویه ای $\beta \omega_3$ در همان (خلاف) جهت ω_3 انجام می شود

$$I_3 > I_2 > I_1$$

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases}$$

اگر ω در امتداد یک محور اصلی باشد امکان ندارد ثابت باقی بماند

$$\omega_3 \gg \omega_1 > \omega_2 \text{ و } \omega_3 \gg \omega_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 \approx 0 \Rightarrow \omega_3 \approx cte.$$

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{I_3 - I_2}{I_1} \omega_2 \omega_3$$

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_1 \omega_3$$

$$\ddot{\omega}_1 = -\frac{I_3 - I_2}{I_1} \dot{\omega}_2 \omega_3$$

$$\ddot{\omega}_1 = -\frac{I_3 - I_2}{I_1} \left(-\frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_1 \omega_3 \right) \omega_3$$

فرض می کنیم ω خیلی نزدیک به یک محور اصلی (مثلا $\hat{e}_3$) باشد، به طوری که

$$\ddot{\omega}_1 = -\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \omega_3^2 \omega_1$$

$$\ddot{\omega}_1 = -\left(\sqrt{\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}} \omega_3 \right)^2 \omega_1$$

$$\ddot{\omega}_1 = -(\beta \omega_3)^2 \omega_1$$

$$\beta = \sqrt{\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}}$$

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{I_3 - I_2}{I_1} \omega_2 \omega_3$$

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_1 \omega_3$$

$$\ddot{\omega}_2 = -\frac{I_1 - I_3}{I_2} \dot{\omega}_1 \omega_3$$

$$\ddot{\omega}_2 = -\frac{I_1 - I_3}{I_2} \left(-\frac{I_3 - I_2}{I_1} \omega_2 \omega_3 \right) \omega_3$$

$$\ddot{\omega}_2 = -\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \omega_3^2 \omega_2$$

$$\ddot{\omega}_2 = -\left(\sqrt{\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}} \omega_3 \right)^2 \omega_2$$

$$\ddot{\omega}_2 = -(\beta \omega_3)^2 \omega_2$$

$$\beta = \sqrt{\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}}$$

$$\ddot{\omega}_1 = -(\beta\omega_3)^2\omega_1$$

$$\ddot{\omega}_2 = -(\beta\omega_3)^2\omega_2$$

$$\beta = \sqrt{\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}}$$

$$\omega_1 = A_1 e^{pt}$$

$$\omega_2 = A_2 e^{pt}$$

$$A_1 p^2 e^{pt} = -(\beta\omega_3)^2 A_1 e^{pt}$$

$$p^2 = -(\beta\omega_3)^2$$

$$p = \pm i\beta\omega_3$$

$$\omega_1 = A_1 \cos(\beta\omega_3 t + \theta)$$

$$\omega_2 = A_2 \sin(\beta\omega_3 t + \theta)$$

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{I_3 - I_2}{I_1} \omega_2 \omega_3$$

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_1 \omega_3$$

$$\frac{\dot{\omega}_2}{\dot{\omega}_1} = \frac{I_3 - I_1}{I_3 - I_2} \frac{I_1}{I_2} \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$\frac{\beta A_2 \cos(\beta\omega_3 t + \theta)}{-\beta A_1 \sin(\beta\omega_3 t + \theta)} = \frac{I_3 - I_1}{I_3 - I_2} \frac{I_1}{I_2} \frac{A_1 \cos(\beta\omega_3 t + \theta)}{A_2 \sin(\beta\omega_3 t + \theta)}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{I_3 - I_1}{I_3 - I_2} \frac{I_1}{I_2} \frac{A_1}{A_2}$$

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \frac{I_3 - I_1}{I_3 - I_2} \frac{I_1}{I_2}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \sqrt{\frac{I_3 - I_1}{I_3 - I_2} \frac{I_1}{I_2}}$$

$$A_2 = A \sqrt{I_1(I_3 - I_1)}$$

$$A_1 = A \sqrt{I_2(I_3 - I_2)}$$

$$\omega_1 = A_1 \cos(\beta \omega_3 t + \theta)$$

$$\omega_2 = A_2 \sin(\beta \omega_3 t + \theta)$$

$$\omega_1 = A \sqrt{I_2(I_3 - I_2)} \cos(\beta \omega_3 t + \theta)$$

$$\omega_2 = A \sqrt{I_1(I_3 - I_1)} \sin(\beta \omega_3 t + \theta)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}}$$

بردار ω بر بیضی کوچکی حول $\hat{e}_3$ محور در جهت عکس عقربه های ساعت (وقتی از جهت مثبت محور $\hat{e}_3$ به پایین نگاه کنیم) حرکت می کند

تمرین: به طریق مشابه نشان دهید که اگر بردار ω تقریباً به موازات محور $\hat{e}_1$ باشد، بر بیضی کوچکی حول محور $\hat{e}_1$ در جهت عقربه های ساعت (وقتی از جهت مثبت محور $\hat{e}_1$ نگاه کنیم) حرکت می کند

تمرین: به طریق مشابه نشان دهید که اگر بردار ω تقریباً به موازات محور $\hat{e}_2$ باشد، بر بیضی کوچکی حول محور $\hat{e}_2$ جواب به صورت نمایی خواهد بود

تمرین: در حالت نمایی نشان دهید که ω_1, ω_3 کوچک باقی نخواهند ماند و ثبات تقریبی ω_2 فقط طی قسمت اولیه حرکت صادق است

پس دوران حول محور بیشترین و کمترین گشتاورهای لختی دورانی پایدار است و دوران حول محور حد وسط ناپایدار است