

حرکت یک بعدی ذره

در این فصل به مطالعه حرکت یک ذره تحت نیروی F در یک بعد با استفاده از معادله زیر می پردازیم

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

اگرچه این معادله در دستگاه کارتری نویخته شده است، اما قابل استفاده در دستگاه های دیگر نیز می باشد مشروط بر آن که همه متغیرها جز یک متغیر آن را بتوانیم حذف کنیم

مثالهایی از این نوع را بعداً بررسی خواهیم کرد

قبل از حل معادله دیفرانسیل مرتبه 2 فوق به ازای F -های مختلف به معرفی قضایای اندازه حرکت و انرژی جنبشی می پردازیم

این قضایا می توانند در حل معادله به ما کمک کنند

قضایای اندازه حرکت و انرژی

قضیه اندازه حرکت را می توان به دو صورت بیان کرد:

(1) صورت دیفرانسیلی (2) صورت انتگرالی

شکل دیفرانسیلی قضیه اندازه حرکت بیان می کند که آهنگ تغییرات زمانی اندازه حرکت برابر با نیروی وارد بر جسم است:

$$p = mv = m \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (mv) = \frac{dp}{dt} = F$$

$$\frac{dp}{dt} = F$$

که همان قانون دوم نیوتن است

شکل انتگرالی قضیه اندازه حرکت بیان می کند که تغییر اندازه حرکت را می توان از ضربه وارده بر جسم به دست آورد

شکل انتگرالی این قضیه را می توان از شکل دیفرانسیلی آن به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{dp}{dt} = F$$

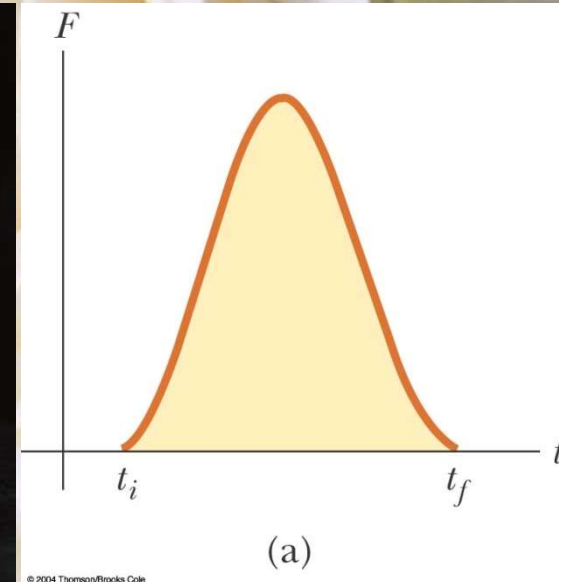
$$dp = Fdt$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

$$\Delta p = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

سمت راست معادله فوق ضربه وارده بر جسم می باشد



قضیه انرژی جنبشی را نیز می توان همچون قضیه اندازه حرکت به دو صورت بیان کرد:

(1) صورت دیفرانسیلی (2) صورت انتگرالی

شکل دیفرانسیلی قضیه انرژی جنبشی بیان می کند که آهنگ تغییرات زمانی انرژی برابر با میزان انجام کار بر واحد زمان یا توان داده شده به جسم توسط نیروی F است:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mv \frac{dv}{dt} = Fv$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = Fv$$

$$\frac{dp}{dt} = F$$

$$m \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{2}v^2 \right) \frac{dv}{dt} = Fv$$

$$\frac{dT}{dt} = Fv$$

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) \frac{dv}{dt} = Fv$$

شکل انتگرالی قضیه انرژی جنبشی بیان می کند که تغییر انرژی جنبشی ناشی از نیروی F در یک بازه زمانی معین را می توان از کار انجام شده توسط نیروی F روی جسم به دست آورد

شکل انتگرالی این قضیه را می توان از شکل دیفرانسیلی آن به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{dT}{dt} = Fv$$

$$\Delta T = \int_{t_1}^{t_2} Fv dt$$

$$dT = Fv dt$$

$$\Delta T = \int_{t_1}^{t_2} F \frac{dx}{dt} dt$$

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_{t_1}^{t_2} Fv dt$$

$$\Delta T = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} Fv dt$$

$$\Delta p = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

$$\Delta T = \int_{t_1}^{t_2} F v dt$$

دو رابطه فوق در صورتی که نیرو را به صورت تابعی از زمان داشته باشیم می توان مورد استفاده قرار داد

$$\Delta T = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

رابطه فوق را در صورتی که نیرو را به صورت تابعی از مکان داشته باشیم می توان مورد استفاده قرار داد

بحث در باره مساله کلی حرکت یک بعدی

در حالت کلی F می تواند تابعی از هر یک از متغیرهای دینامیکی مانند مکان، زمان و سرعت و یا ترکیبی از آنها باشد

$$F = f(t, x, v)$$

$$F = f(t, v)$$

$$F = f(t, x)$$

$$F = f(x, v)$$

$$F = f(t)$$

$$F = f(x)$$

$$F = f(v)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t)$$

کلی ترین حالت یک معادله
دیفرانسیل مرتبه 2 عبارت است از:

در این فصل راه حلها و کاربردهای آنها را در مسایل مکانیکی مختلف
مورد بررسی قرار خواهیم داد

ابتدا از موارد ساده تر زیر شروع می کنیم:

$$F = f(t)$$

$$F = f(x)$$

$$F = f(v)$$

نیروهای وابسته به زمان

$$F = f(t)$$

در اینجا فرض می کنیم که F فقط تابع صریحی از زمان باشد:

$$\frac{dp}{dt} = F(t)$$

$$dp = F(t)dt$$

$$\int_{p_0}^p dp = \int_{t_0}^t F(t)dt$$

$$p - p_0 = \int_{t_0}^t F(t)dt$$

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^t F(t)dt$$

$$v = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t)dt$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt$$

$$dx = v_0 dt + \left(\frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt \right) dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt \right) dt$$

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^t F(t) dt \right) dt$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t F(t) dt$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t''} F(t') dt'$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t''} F(t') dt' dt''$$



آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۵

۷۱- ذره‌ای به جرم m از حالت سکون تحت تأثیر نیروی $\vec{F} = F_0(\cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{j})$ حرکت می‌کند. بیشینه کاری که این نیرو می‌تواند روی ذره انجام دهد، چقدر است؟

$$\frac{1}{2} \frac{F_0^2}{m\omega^2} \quad (1)$$

$$\frac{F_0^2}{m\omega^2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \frac{F_0^2}{m\omega^2} \quad (3)$$

$$\frac{2F_0^2}{m\omega^2} \quad (4)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt$$

$$\Delta T = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

آیا امواج رادیویی از سطح یونسفر (وقتی که از خورشید و از زمین به سطح آن می تابند) انعکاس می یابند؟ چرا؟

سرعت فاز و سرعت گروه چه شباهتها و چه تفاوتهایی با هم دارند؟

آیا سرعت فاز می تواند از سرعت نور بیشتر باشد؟ سرعت گروه چگونه؟

مثال: یک الکترون تحت میدان الکتریکی خارجی

$$E_x = E_0 \cos(\omega t + \theta)$$

$$F = -eE_x = -eE_0 \cos(\omega t + \theta)$$

$$m \frac{dv}{dt} = -eE_x = -eE_0 \cos(\omega t + \theta)$$

$$m \frac{dv}{dt} = -eE_x = -eE_0 \cos(\omega t + \theta)$$

$$dv = -\frac{eE_0}{m} \cos(\omega t + \theta) dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = -\frac{eE_0}{m} \int_0^t \cos(\omega t + \theta) dt$$

$$v - v_0 = -\frac{eE_0}{m} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \theta) \right]_0^t$$

$$v - v_0 = -\frac{eE_0}{m\omega} [\sin(\omega t + \theta) - \sin\theta]$$

$$v - v_0 = -\frac{eE_0}{m\omega} [\sin(\omega t + \theta) - \sin\theta]$$

$$v = v_0 + \frac{eE_0 \sin\theta}{m\omega} - \frac{eE_0}{m\omega} \sin(\omega t + \theta)$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{eE_0 \sin\theta}{m\omega} - \frac{eE_0}{m\omega} \sin(\omega t + \theta)$$

$$dx = \left(v_0 + \frac{eE_0 \sin\theta}{m\omega} \right) dt - \frac{eE_0}{m\omega} \sin(\omega t + \theta) dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left(v_0 + \frac{eE_0 \sin \theta}{m\omega} \right) dt - \int_0^t \frac{eE_0}{m\omega} \sin(\omega t + \theta) dt$$

$$x - x_0 = \left(v_0 + \frac{eE_0 \sin \theta}{m\omega} \right) t - \frac{eE_0}{m\omega} \int_0^t \sin(\omega t + \theta) dt$$

$$x = x_0 + \left(v_0 + \frac{eE_0 \sin \theta}{m\omega} \right) t - \frac{eE_0}{m\omega} \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \theta) \right]_0^t$$

$$x = x_0 + \left(v_0 + \frac{eE_0 \sin \theta}{m\omega} \right) t + \frac{eE_0}{m\omega^2} [\cos(\omega t + \theta) - \cos \theta]$$

$$x = x_0 - \frac{eE_0 \cos \theta}{m\omega^2} + \left(v_0 + \frac{eE_0 \sin \theta}{m\omega} \right) t + \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta)$$

$$t_0 = 0$$

$$x_0 = 0$$

$$v_0 = 0$$

$$x = -\frac{eE_0 \cos \theta}{m\omega^2} + \frac{eE_0 \sin \theta}{m\omega} t + \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta)$$