

نیروی میرای وابسته به سرعت

$$F = f(v)$$

در اینجا فرض می کنیم که F فقط تابع صریحی از سرعت باشد:

$$m \frac{dv}{dt} = F(v)$$

$$\frac{dv}{F(v)} = \frac{dt}{m}$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \int_{t_0}^t \frac{dt}{m}$$

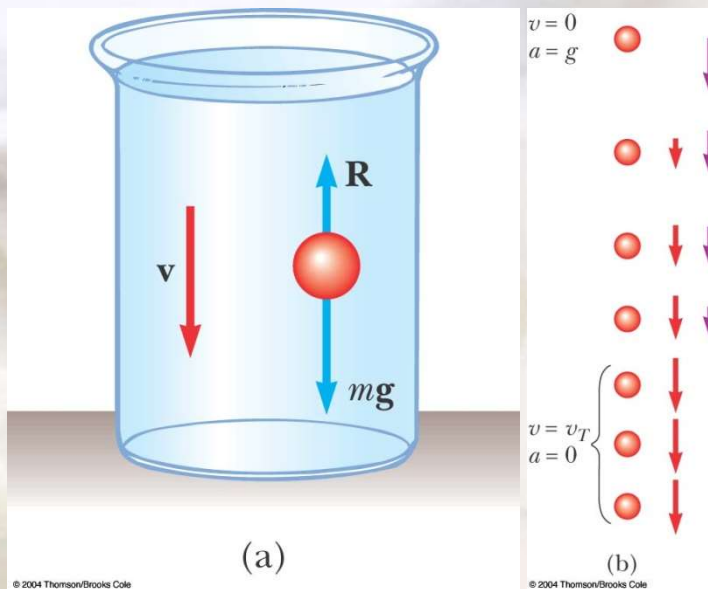
$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \frac{t - t_0}{m}$$

$$f(v, v_0) = \frac{t - t_0}{m}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \varphi \left(v_0, \frac{t - t_0}{m} \right)$$

$$dx = \varphi \left(v_0, \frac{t - t_0}{m} \right) dt$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi \left(v_0, \frac{t - t_0}{m} \right) dt$$



یکی از مثالهایی که در آن F تابع سرعت است، نیروی اصطحکاک است

نیروی اصطحکاک همواره در خلاف جهت سرعت است

نیروی اصطحکاک در حالت کلی می تواند تابع پیچیده ای از سرعت باشد

$$F = \begin{cases} -bv^n & n = 2k + 1 \text{ for } \pm v \\ -bv^n & n = 2k \text{ for } +v \\ bv^n & n = 2k \text{ for } -v \end{cases}$$

اما در بسیاری از موارد شکل ساده زیر را دارد

$$F = \begin{cases} -bv^n & n = 2k + 1 \text{ for } \pm v \\ -bv^n & n = 2k \text{ for } +v \\ bv^n & n = 2k \text{ for } -v \end{cases}$$

$$n = 1 \text{ \& } v > 0$$

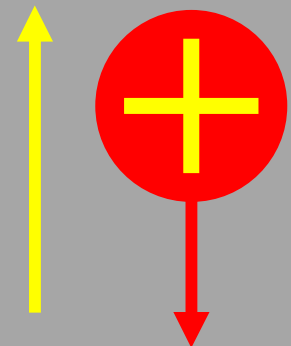
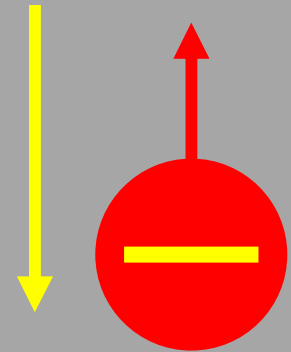
$$F = -bv^n$$

$$F = -bv^n = -b(+v)^1 = -bv < 0$$

$$n = 1 \text{ \& } v < 0$$

$$F = -bv^n$$

$$F = -bv^n = -b(-v)^1 = +bv > 0$$



$$F = \begin{cases} -bv^n & n = 2k + 1 \text{ for } \pm v \\ -bv^n & n = 2k \text{ for } +v \\ bv^n & n = 2k \text{ for } -v \end{cases}$$

$$n = 2 \text{ \& } v > 0$$

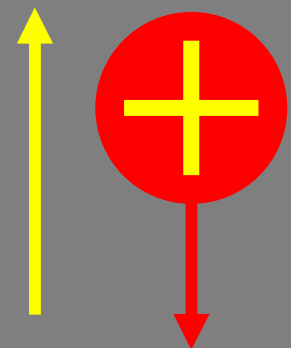
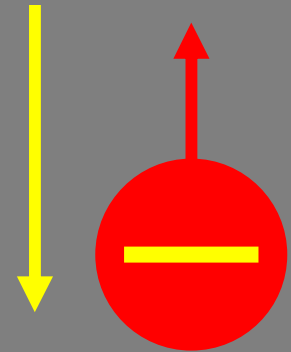
$$F = -bv^n$$

$$F = -bv^n = -b(+v)^2 = -bv^2 < 0$$

$$n = 2 \text{ \& } v < 0$$

$$F = bv^n$$

$$F = bv^n = b(-v)^2 = bv^2 > 0$$



اجسام افتان (در حضور اصطحکاک) به عنوان مثالی از نیروی وابسته به سرعت

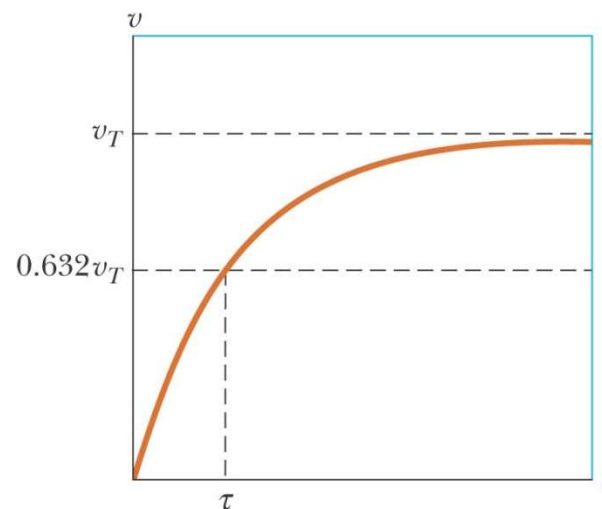
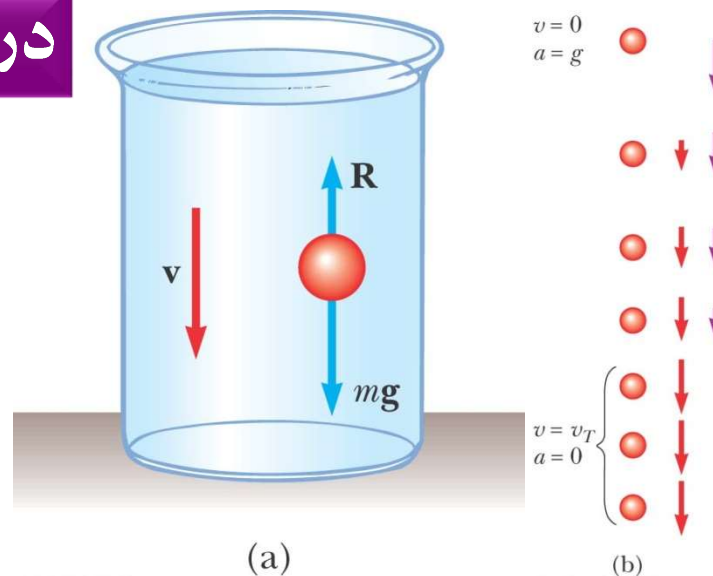
در اینجا حالت $n=1$ را بررسی می کنیم

$$ma = -mg - bv = 0$$

$$v_T = -\frac{mg}{b}$$

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{b}{m}v$$

$$v = -\frac{mg}{b} \left(1 - e^{-bt/m}\right) = v_T \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$



$$F = ma$$

$$-bv - mg = ma$$

$$-\frac{b}{m}v - g = a$$

$$-\frac{b}{m}v - g = \frac{dv}{dt}$$

$$\left(\frac{b}{m}v + g\right)dt = -dv$$

$$\frac{dv}{\left(\frac{b}{m}v + g\right)} = -dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\left(\frac{b}{m}v + g\right)} = -\int_0^t dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\left(\frac{b}{m}v + g\right)} = -\int_0^t dt$$

$$\frac{b}{m}v + g = u$$

$$\frac{b}{m}dv = du$$

$$\int \frac{du}{u^n} = \begin{cases} \frac{u^{-n+1}}{-n+1} & n \neq 1 \\ \ln u & n = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{\frac{m}{b} du}{u} = -\int_0^t dt$$

$$\frac{m}{b} \int \frac{du}{u} = -\int_0^t dt$$

$$\frac{m}{b} \ln u = -t$$

$$\frac{m}{b} \ln \left(\frac{b}{m}v + g \right) \Big|_{v_0}^v = -t$$

$$\frac{m}{b} \left\{ \ln \left(\frac{b}{m} v + g \right) - \ln \left(\frac{b}{m} v_0 + g \right) \right\} = -t$$

$$\frac{m}{b} \ln \left| \frac{\frac{b}{m} v + g}{\frac{b}{m} v_0 + g} \right| = -t$$

$$\ln \left| \frac{\frac{b}{m} v + g}{\frac{b}{m} v_0 + g} \right| = -\frac{b}{m} t$$

$$\frac{\frac{b}{m} v + g}{\frac{b}{m} v_0 + g} = e^{-\frac{b}{m} t} = \exp \left\{ -\frac{b}{m} t \right\}$$

$$\ln a = b \equiv \log_e a = b$$



$$a = e^b$$

$$\frac{b}{m} v + g = \left(\frac{b}{m} v_0 + g \right) e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$v + \frac{m}{b} g = v_0 e^{-\frac{b}{m} t} + \frac{m}{b} g e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m} t} - \frac{m}{b} g + \frac{m}{b} g e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m} t} - \frac{m}{b} g \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right)$$

$$v = -\frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m} t} \right)$$

$$v = \tau g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$v = v_T \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$v = -\frac{m}{b} g \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$

$$v = -\frac{m}{b} g \left(1 - \left(1 - \frac{b}{m}t + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{m} \right)^2 t^2 \right) + \dots \right)$$

$$v \cong -gt + \frac{1}{2} \frac{bg}{m} t^2$$

$$t \ll m/b \Rightarrow v \cong -gt$$

$$\frac{dx}{dt} = v = -\frac{m}{b} g \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$

$$dx = -\frac{m}{b} g \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) dt$$

$$\int_0^x dx = -\frac{m}{b} g \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) dt$$

$$x = -\frac{mg}{b} \left(\int_0^t dt - \int_0^t e^{-\frac{b}{m}t} dt \right)$$

$$x = -\frac{mg}{b} \left(t + \frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t} \right)_0^t$$

$$x = -\frac{mg}{b} \left(t + \frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{m}{b} \right)$$

$$x = -\frac{mg}{b} \left(-\frac{m}{b} \left(-\frac{b}{m}t - e^{-\frac{b}{m}t} + 1 \right) \right)$$

$$x = \frac{m^2 g}{b^2} \left(1 - \frac{b}{m}t - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$

$$x = \frac{m^2 g}{b^2} \left(1 - \frac{b}{m}t - \left(1 - \frac{b}{m}t + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{m} \right)^2 t^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{b}{m} \right)^3 t^3 \dots \right) \right)$$

$$x = -\frac{m^2 g}{b^2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{m} \right)^2 t^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{b}{m} \right)^3 t^3 + \dots \right) = -\frac{1}{2} gt^2 + \frac{1}{6} \frac{bg}{m} t^3 + \dots$$

$$t \ll m/b \Rightarrow x \cong -\frac{1}{2} gt^2$$

$$t \gg m/b \Rightarrow x \cong \frac{m^2 g}{b^2} - \frac{mg}{b} t = x_T - v_T t$$

مسافتی که جسم تا رسیدن
به سرعت حد می پیماید

سرعت حد



یک قایق که با سرعت اولیه v_0 در حال حرکت است موتور خود را خاموش می کند. سرعت و مکان آن را در حضور اصطحکاک متناسب با سرعت به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

$$m \frac{dv}{dt} = -bv$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt$$

$$\ln v \Big|_{v_0}^v = -\frac{b}{m} t$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{b}{m} t$$

$$\frac{v}{v_0} = \exp \left(-\frac{b}{m} t \right)$$

$$v = v_0 \exp \left(-\frac{b}{m} t \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$$

$$dx = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right) dt$$

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{b}{m}t\right) dt$$

$$x = -\frac{mv_0}{b} \exp\left(-\frac{b}{m}t\right) \Big|_0^t$$

$$x = \frac{mv_0}{b} \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right) \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \frac{mv_0}{b} = x_s$$

قایق پس از طی مسافت حدی x_s
تقریباً می ایستد

زمان لازم t_s برای طی مسافت x_s را
به دست آورید

$$v(t_s) = v_s$$

$$v_s = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t_s\right)$$

$$\frac{v_s}{v_0} = \exp\left(-\frac{b}{m}t_s\right)$$

$$\ln\left(\frac{v_s}{v_0}\right) = -\frac{b}{m}t_s$$

$$t_s = -\frac{m}{b} \ln\left(\frac{v_s}{v_0}\right) = \frac{m}{b} \ln\left(\frac{v_0}{v_s}\right)$$

V_s سرعتی
است که قایق
را تقریباً
ساکن فرض
می کنیم (مثلاً
سرعت داده
شده به قایق
لنگر انداخته
توسط امواج
کناری)

تقریب بهتری برای اصطحاک در اجسام سنگین و کوچک با سرعتهای نهایی بزرگ به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$F = bv^2$$

$$b = \frac{1}{2} D A \rho^2$$

ρ

چگالی

A

سطح مقطع

D

ضریب کشش

$D=0.5$

برای کره

Table 6.1

Terminal Speed for Various Objects Falling Through Air

Object	Mass (kg)	Cross-Sectional Area (m ²)	v_T (m/s)
Sky diver	75	0.70	60
Baseball (radius 3.7 cm)	0.145	4.2×10^{-3}	43
Golf ball (radius 2.1 cm)	0.046	1.4×10^{-3}	44
Hailstone (radius 0.50 cm)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Raindrop (radius 0.20 cm)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9.0

© 2004 Thomson/Brooks Cole

$$ma = -mg + bv^2 = 0$$

$$v_T = -\sqrt{\frac{mg}{b}} = -\sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}$$

$$F = ma$$

$$+bv^2 - mg = ma$$

$$+\frac{b}{m}v^2 - g = a$$

$$+\frac{b}{m}v^2 - g = \frac{dv}{dt}$$

$$\left(-\frac{b}{m}v^2 + g\right)dt = -dv$$

$$\frac{dv}{\left(-\frac{b}{m}v^2 + g\right)} = -dt$$

$$\int_0^v \frac{dv}{\left(-\frac{b}{m}v^2 + g\right)} = -\int_0^t dt$$

$$\int_0^v \frac{dv}{g\left(1 - \left(\sqrt{\frac{b}{mg}}v\right)^2\right)} = -t$$

$$\sqrt{\frac{b}{mg}}v = \tanh u$$

$$\sqrt{\frac{b}{mg}}v = \tanh u$$

$$\sqrt{\frac{b}{mg}}dv = \frac{1}{\cosh^2 u} du$$

$$\int \frac{\sqrt{\frac{mg}{b}} \sec h^2 u du}{g(1 - \tanh^2 u)} = -t$$

$$\int \frac{\sec h^2 u du}{\sec h^2 u} = -\sqrt{\frac{bg}{m}}t$$

$$\int du = -\sqrt{\frac{bg}{m}}t$$

$$u = -\sqrt{\frac{bg}{m}}t$$

$$\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{mg}}v\right) = -\sqrt{\frac{bg}{m}}t$$

$$\sqrt{\frac{b}{mg}}v = \tanh\left(-\sqrt{\frac{bg}{m}}t\right)$$

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}}t\right)$$

$$\tanh x \approx \begin{cases} x - x^3 / 3 & x \ll 1 \\ 1 & x \gg 1 \end{cases}$$

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}}t\right) = \begin{cases} -gt & t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}} \\ -\sqrt{\frac{mg}{b}} & t \gg \sqrt{\frac{m}{bg}} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = v = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}}t\right)$$

$$dx = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}}t\right) dt$$

$$\int_0^x dx = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \int_0^t \tanh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}}t\right) dt$$

$$\sqrt{\frac{bg}{m}}t = u \quad dt = \sqrt{\frac{m}{bg}} du$$

$$x = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \sqrt{\frac{m}{bg}} \int \tanh u du = -\frac{m}{b} \ln \cosh u$$

$$x = -\frac{m}{b} \ln \cosh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}}t\right)$$

$$t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}}$$



$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \approx 1 + \frac{x^2}{2!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \approx x$$

$$\ln \cosh x \approx \frac{x^2}{2} \quad x \ll 1$$

$$x \approx -\frac{m}{b} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{bg}{m}}t\right)^2 = -\frac{1}{2} gt^2$$

$$t \gg \sqrt{\frac{m}{bg}}$$



$$\cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx \frac{e^x}{2} \quad x \gg 1$$

$$\ln \cosh x \approx \ln \frac{e^x}{2} = \ln e^x - \ln 2 = x - \ln 2$$

$$x = -\frac{m}{b} \ln \cosh \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) \approx -\frac{m}{b} \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t - \ln 2 \right)$$

$$x \approx \frac{m}{b} \ln 2 - \sqrt{\frac{mg}{b}} t$$

$$x = -\frac{m}{b} \ln \cosh \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) \approx \begin{cases} -\frac{1}{2} g t^2 & t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}} \\ \frac{m}{b} \ln 2 - \sqrt{\frac{mg}{b}} t & t \gg \sqrt{\frac{m}{bg}} \end{cases}$$

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۹

۷۱- جسمی به جرم 2kg روی سطح افقی بدون اصطکاک حرکت می‌کند. نیروی مقاومت هوا به صورت

$$F(v) = -\frac{\sqrt{v}}{3}$$

به جسم وارد می‌شود که v سرعت لحظه‌ای جسم است. v بر حسب متر بر ثانیه و $F(v)$ بر حسب

نیوتن است. پس از طی چه فاصله‌ای بر حسب متر سرعت جسم از $4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ به صفر می‌رسد؟

(۱) ۴

(۲) ۸

(۳) ۱۶

(۴) ۳۲

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۸

۷۲- جسمی به جرم 2kg با سرعت اولیه $4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ روی یک سطح افقی بدون اصطکاک شروع به حرکت می‌کند. نیروی مقاومت هوا حرکت جسم را به صورت $F(v) = -2v^2$ کند می‌کند که v سرعت لحظه‌ای جسم بر حسب $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ و $F(v)$ بر حسب N است. جسم تا لحظه توقف چه مسافتی را بر حسب متر طی کرده است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۴ (۳)

۸ (۴)

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۷

۷۲- قایقی به جرم m با سرعت اولیه v_0 در خلاف جهت جریان آب رودخانه‌ای به آب انداخته می‌شود. جریان مخالف نیروی $f = -\alpha e^{\frac{v}{v_0}}$ را به قایق وارد می‌کند که α ضریبی ثابت و مثبت و v سرعت لحظه‌ای قایق است. مسافتی که قایق طی می‌کند تا به سکون لحظه‌ای برسد چقدر است؟

$$\frac{m}{\alpha} v_0^2 (2 - e^{-1}) \quad (1)$$

$$\frac{m}{\alpha} v_0^2 e^{-1} \quad (2)$$

$$2 \frac{m}{\alpha} v_0^2 e^{-1} \quad (3)$$

$$\frac{m}{\alpha} v_0^2 (1 - 2e^{-1}) \quad (4)$$

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۵

۷۹- جسمی به جرم m از حالت سکون در محیطی که به آن نیروی اصطکاک کششی $b e^{-a|v|}$ وارد می‌شود در امتداد قائم رها می‌شود، که a و b اعداد ثابت مثبت و v تندی لحظه‌ای جسم است. تندی جسم t ثانیه پس از رها شدن کدام است؟ ($b < mg$)

$$\frac{1}{a} \ln \left[\frac{b}{mg} + \left(1 - \frac{b}{mg} \right) e^{agt} \right] \quad (۱)$$

$$\frac{1}{a} \ln \left[-\frac{b}{mg} + \left(1 + \frac{b}{mg} \right) e^{agt} \right] \quad (۲)$$

$$\frac{1}{a} \ln \left[\frac{mg}{b} + \left(1 - \frac{mg}{b} \right) e^{-abt/m} \right] \quad (۳)$$

$$gt + \frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{b}{mg} t \right) \quad (۴)$$

آزمون 14.1

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۸

۷۳- مطابق شکل گلوله‌ای به جرم $m = ۲g$ به فنری با ثابت $k = ۵۰۰ \frac{N}{m}$ وصل شده و درون روغن نوسان

می‌کند. نیروی مقاومت وارد بر گلوله $-bv$ است که v سرعت لحظه‌ای گلوله و $b = ۱۶ \frac{N.s}{m}$ است. از

جرم فنر و نیروی ارشمیدس صرف‌نظر شود. بسامد زاویه‌ای نوسانات کندمیرا بر حسب $\frac{rad}{s}$ چقدر است؟

(۱) $۳/۰$

(۲) $۴/۶$

(۳) $۵/۰$

(۴) $۶/۲$

