

نیروی کنسرواتیو وابسته به مکان - انرژی پتانسیل

$$F = f(x)$$

در اینجا فرض می کنیم که F فقط تابع صریحی از مکان باشد:

$$m \frac{dv}{dt} = F(x)$$

$$mv \frac{dv}{dt} = F(x)v$$

$$\int_{t_0}^t mv \frac{dv}{dt} dt = \int_{t_0}^t F(x)v dt$$

$$\int_{v_0}^v mv dv = \int_{t_0}^t F(x) \frac{dx}{dt} dt$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^x F(x)dx$$

انرژی پتانسیل را به صورت کار انجام شده توسط نیرو هنگامی که ذره از نقطه x_s به نقطه x می رود تعریف می کنیم

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(x)dx = - \int_{x_s}^x F(x)dx$$

$$F = - \frac{dV(x)}{dx}$$

$$\int_{x_0}^x F(x)dx = \int_{x_0}^{x_s} F(x)dx + \int_{x_s}^x F(x)dx$$

$$\int_{x_0}^x F(x)dx = V(x_0) - V(x)$$

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = V(x_0) - V(x)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0)$$

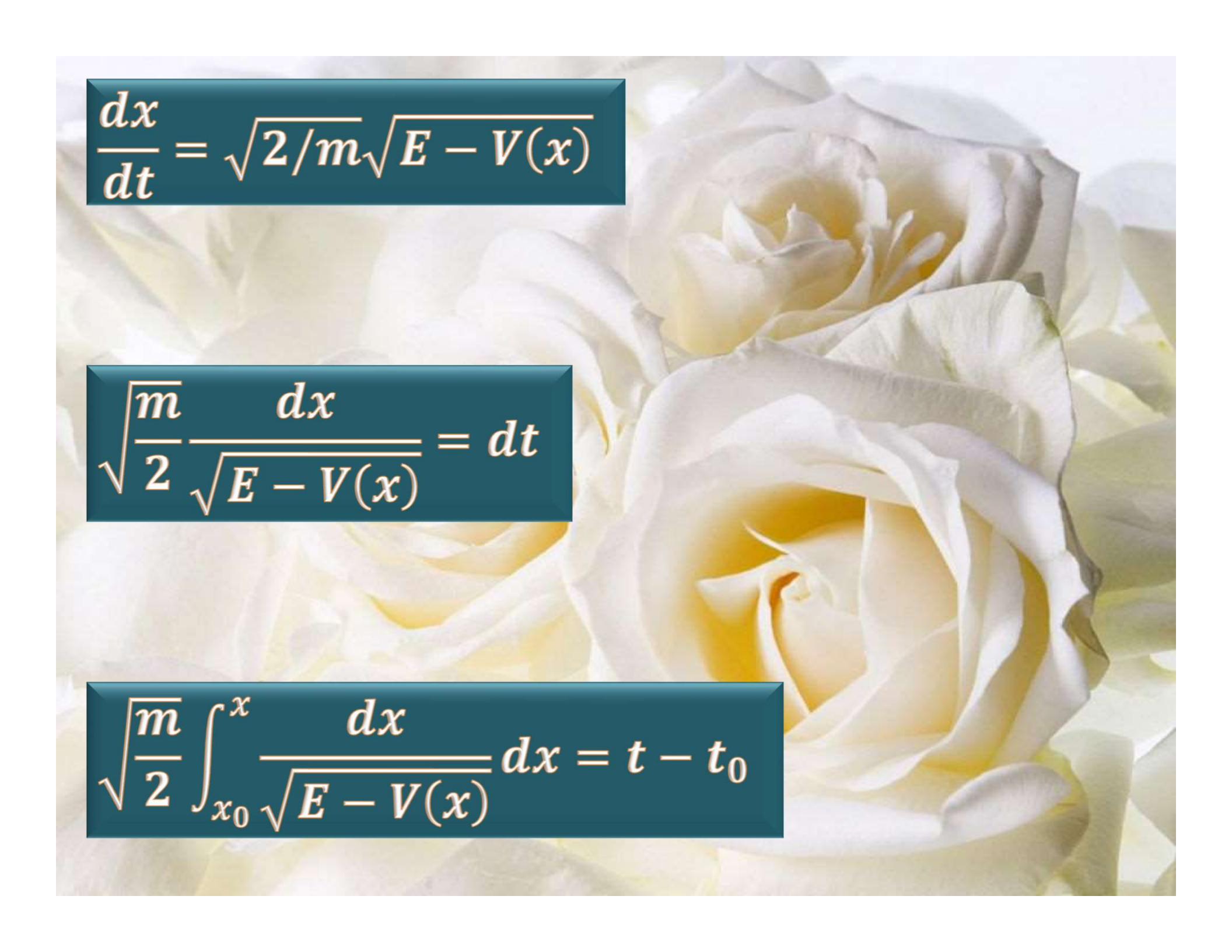
کمیت طرف راست فقط به شرایط اولیه بستگی دارد، پس

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = cte. = E$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - V(x)$$

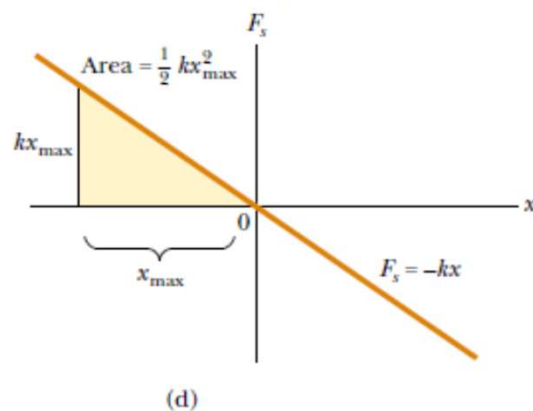
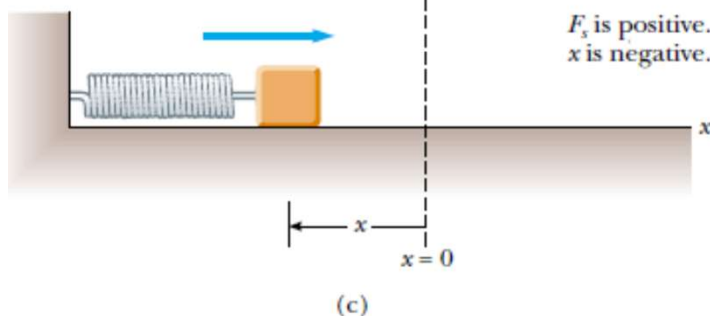
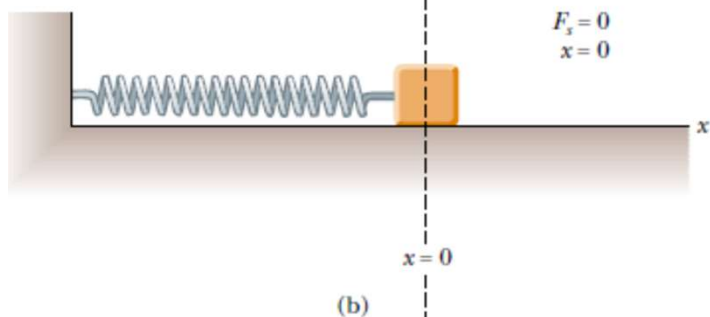
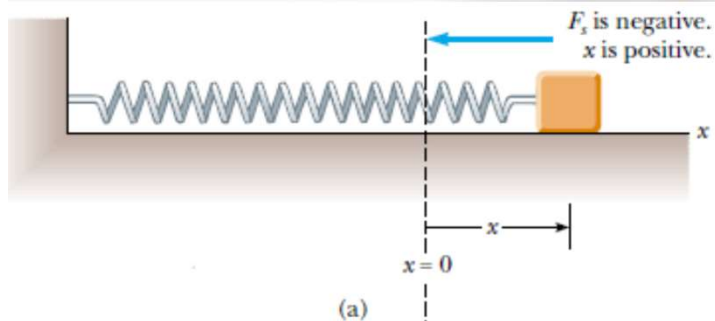
$$v^2 = \frac{2}{m}(E - V(x))$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$


$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2/m} \sqrt{E - V(x)}$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = dt$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = t - t_0$$



$$F = -kx$$

$$V(x) = - \int_{x_s}^x F(x) dx$$

$$x_s = 0$$

$$V(x) = - \int_0^x -kx dx$$

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2} kx^2}} = t$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{k}{E} x^2}} = t$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta} = t$$

$$\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right)^2}} = t$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = t$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x = \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x = \sin \theta$$

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$\sqrt{k/m} = \omega$$

$$x = A \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta d\theta$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x_0 = \sin \theta_0$$

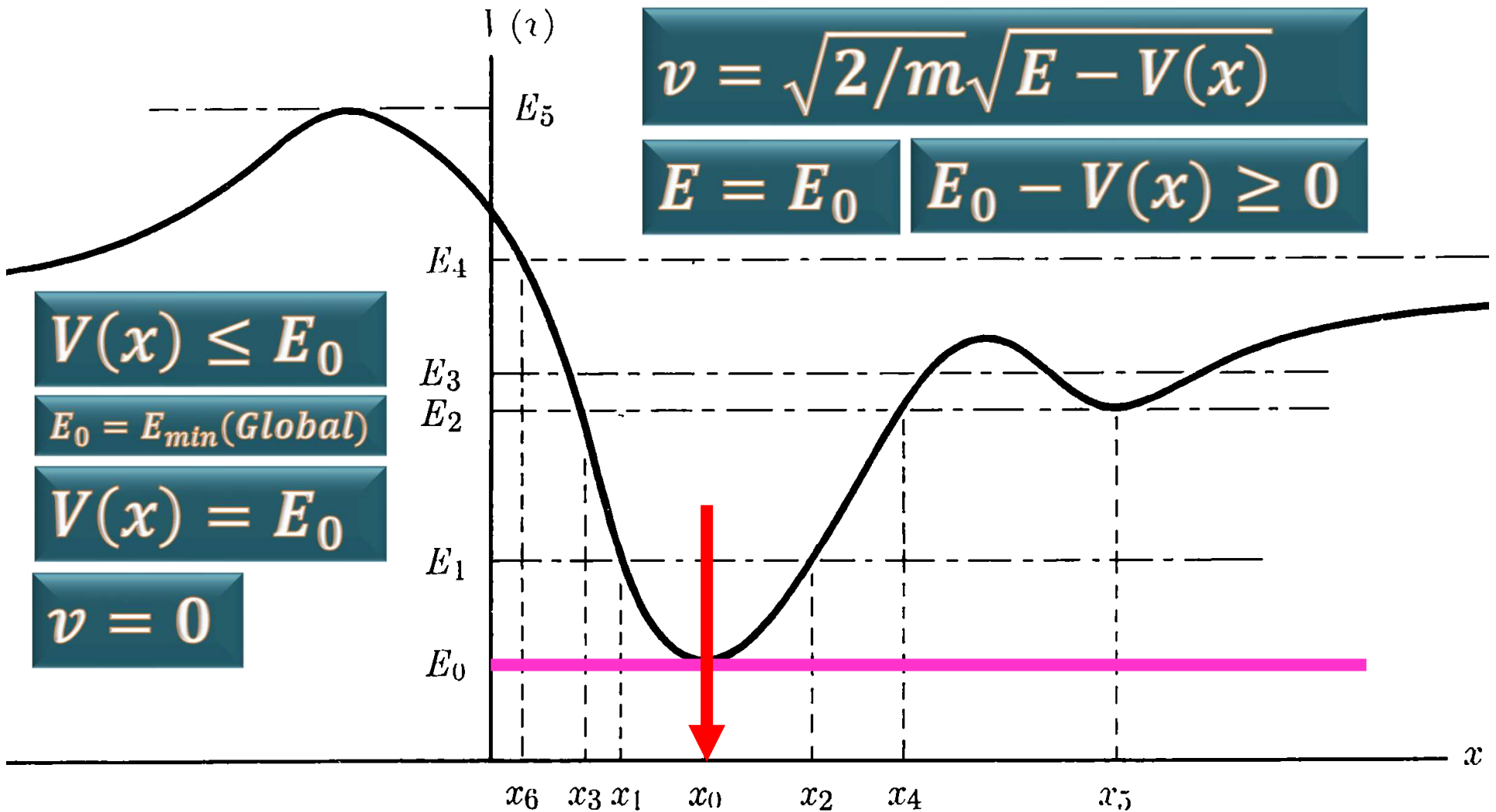
$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

$$\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = t$$

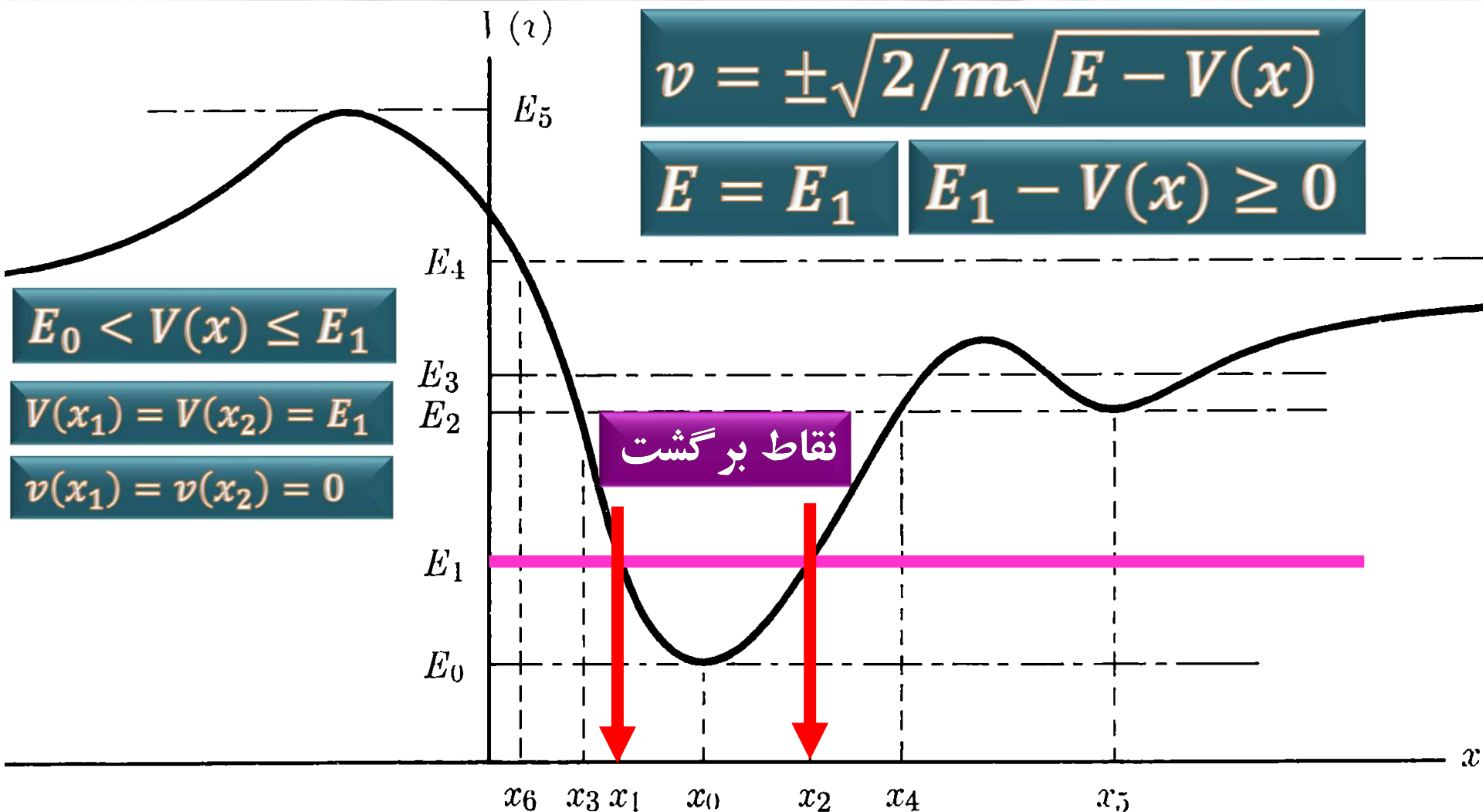
$$\sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) = \omega t + \theta_0$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$



E_0 کمترین مقدار انرژی ذره

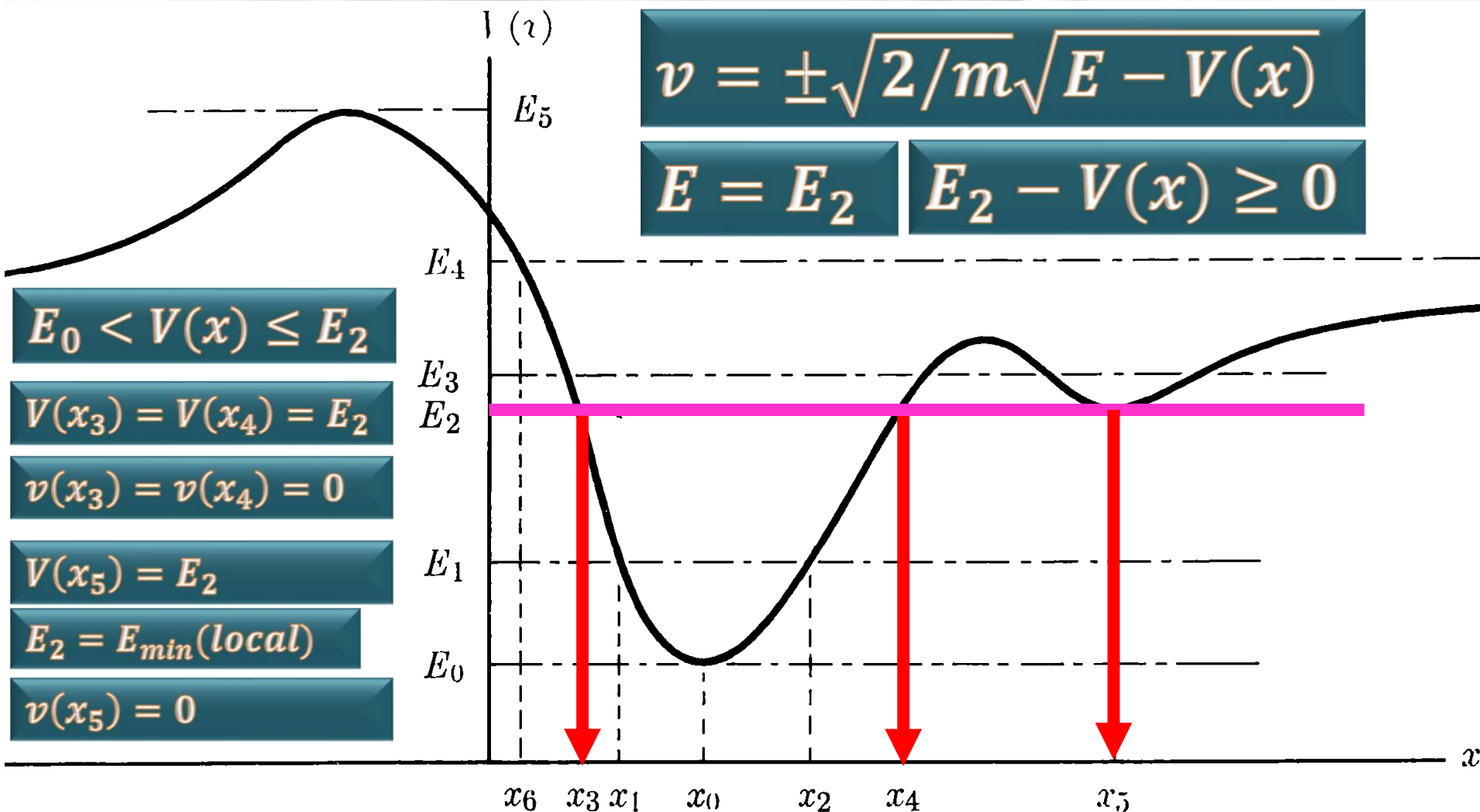
ذره با انرژی E_0 فقط می تواند در x_0 ساکن باقی بماند



ذره با انرژی E_1 می تواند بین نقاط x_1 و x_2 نوسان کند

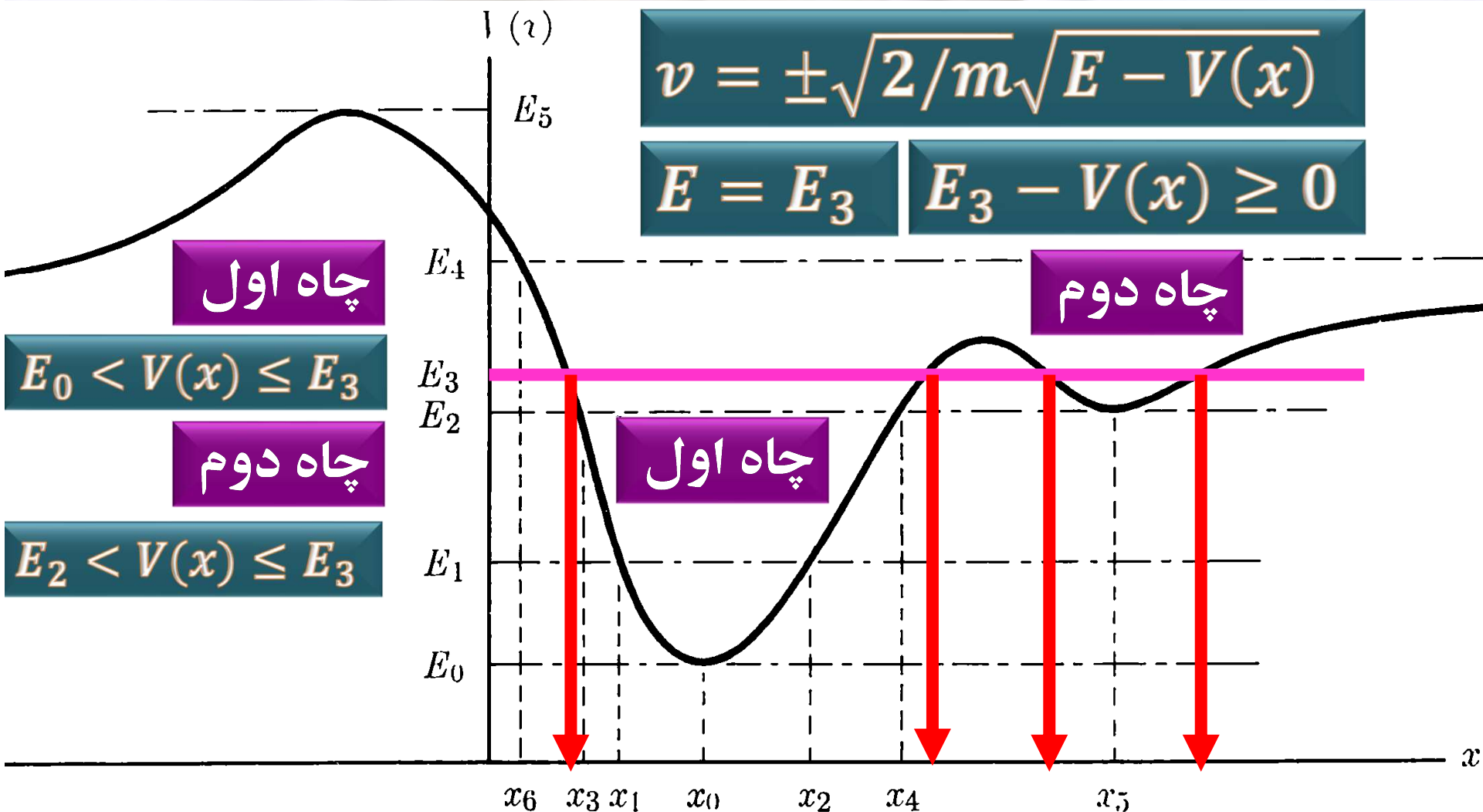
سرعت ذره با نزدیک شدن به نقاط برگشت کاهش می یابد

سرعت ذره در نقاط برگشت صفر می شود و جهت آن عوض می شود



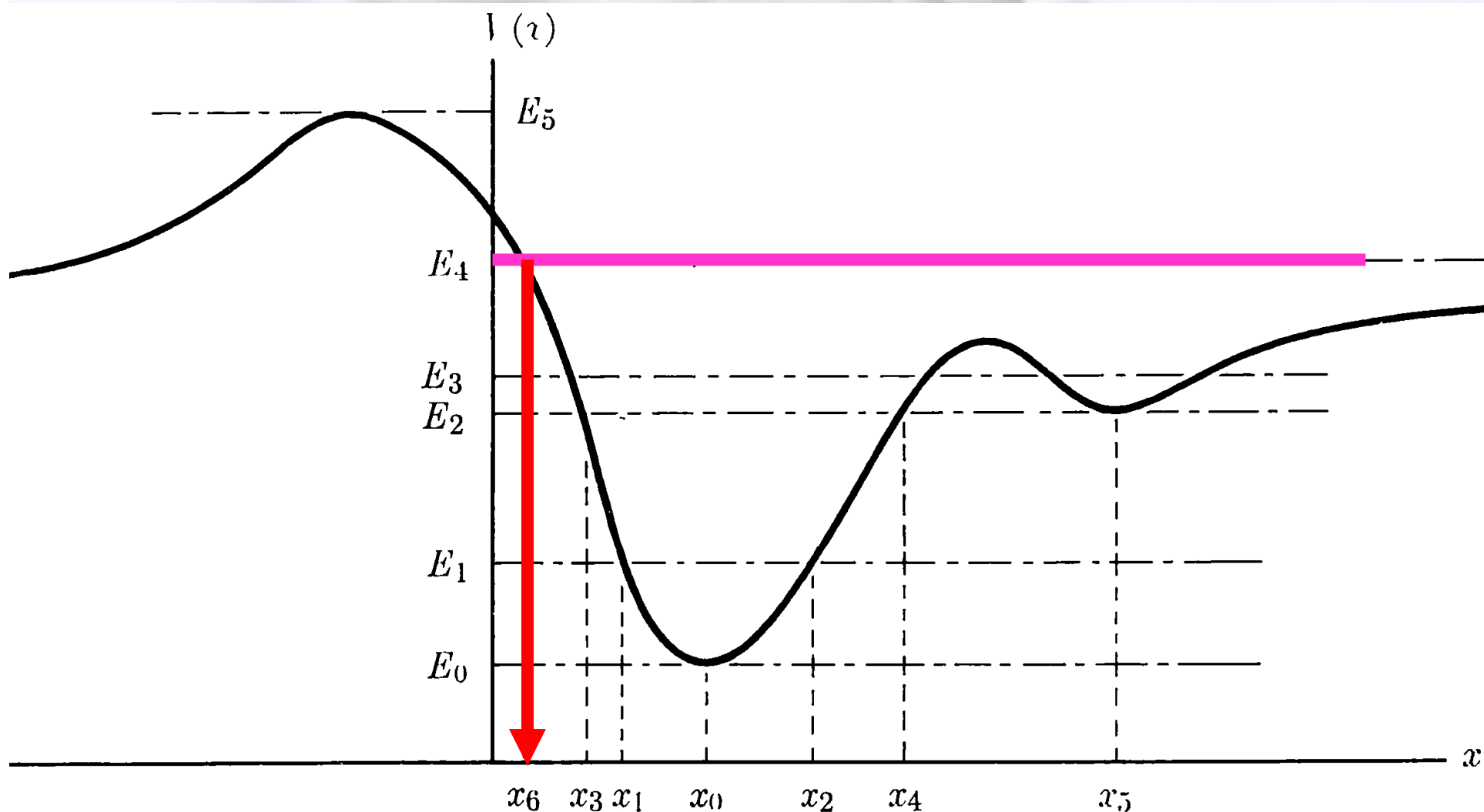
E_2

ذره با انرژی E_2 می تواند بین نقاط x_3 و x_4 نوسان کند
یا در نقطه x_5 ساکن باقی بماند

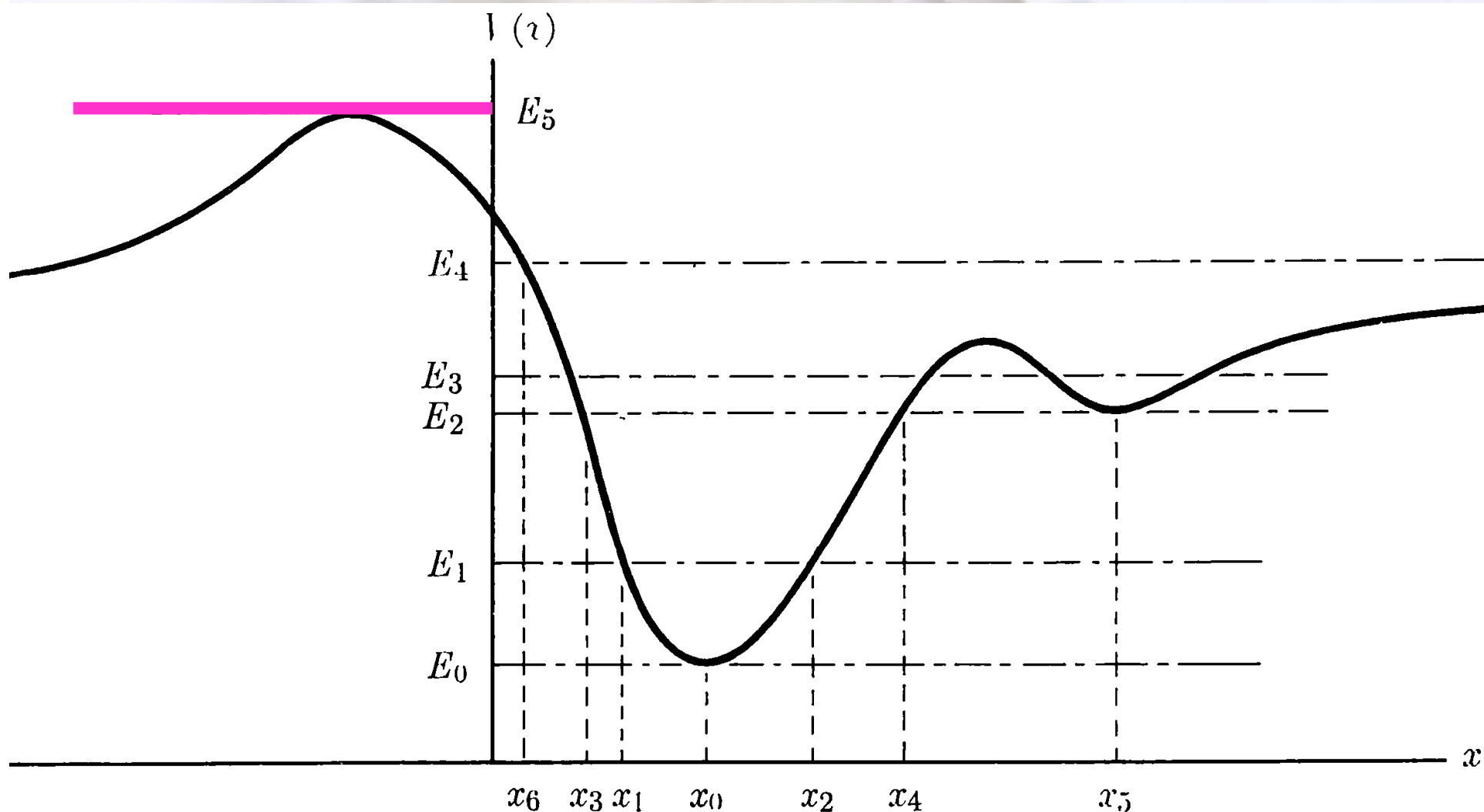


E_3

ذره با انرژی E_3 چهار نقطه برگشت دارد که می تواند در هر یک از دو چاه به طور جداگانه نوسان کند

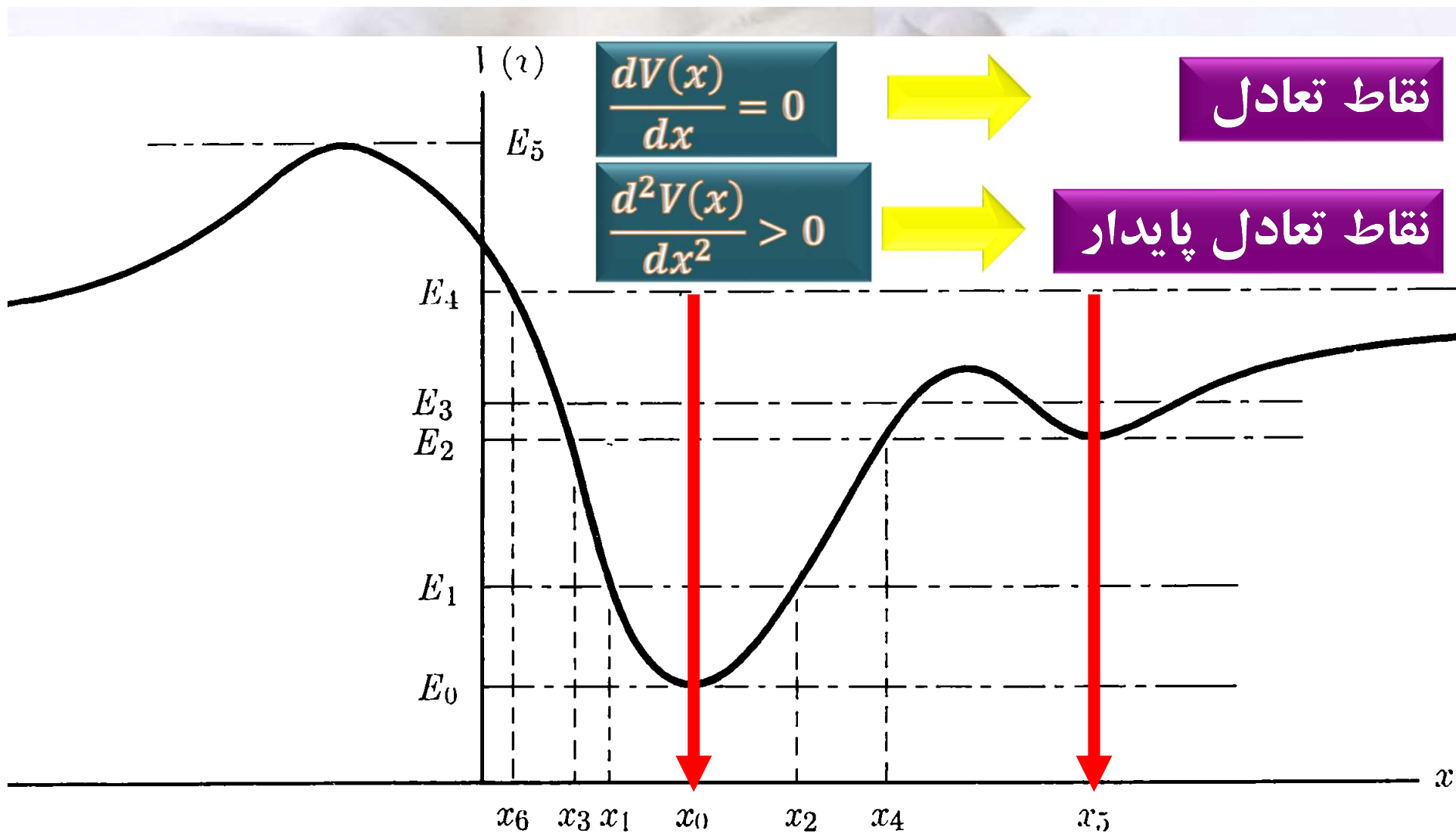


اگر ذره با انرژی E_4 به سمت چپ در حرکت باشد در نقطه x_6 متوقف می شود و سپس جهت حرکت آن معکوس می گردد و اگر به سمت راست در حرکت باشد تا ابد به سمت راست به حرکت خود ادامه می دهد که در این مسیر سرعت در دو نقطه کمینه نسبت به نقاط قبلی مسیر بیشتر است



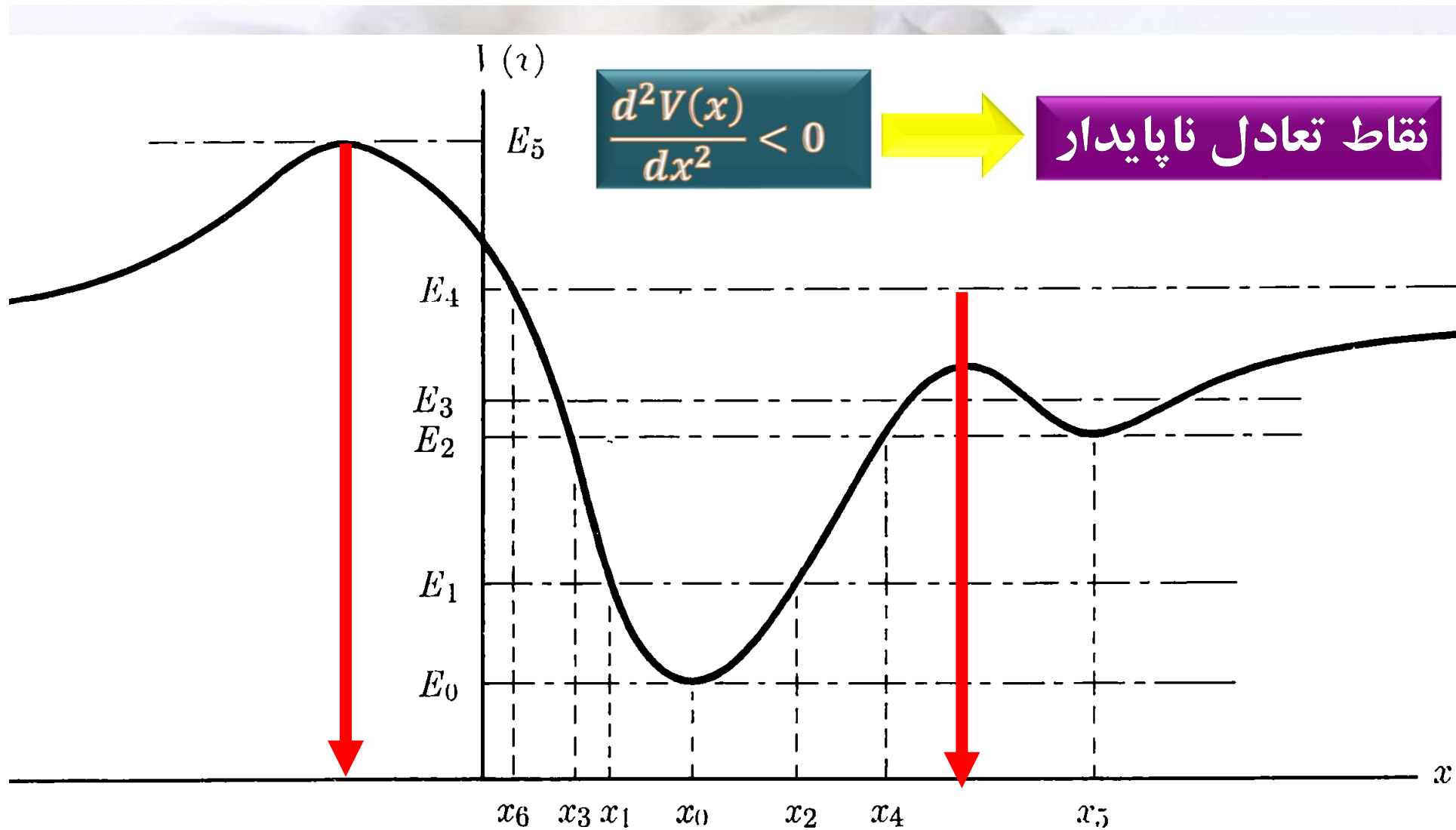
با انرژیهای بالاتر از E_5 هیچ نقطه برگشتی وجود ندارد و ذره فقط در یک جهت (چپ یا راست) حرکت می کند

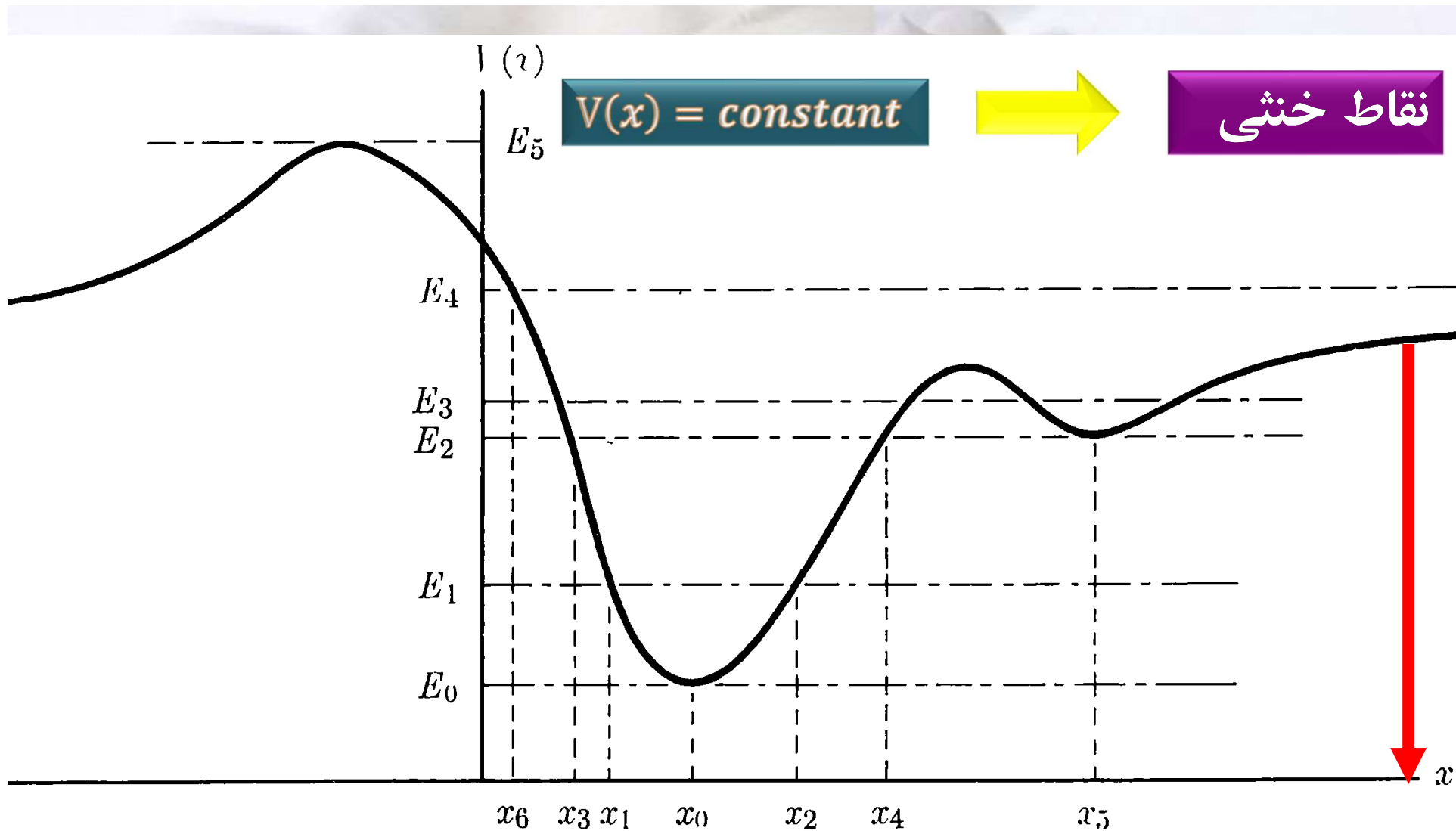
سرعت در هر نقطه بر حسب عمق پتانسیل متغیر است



نقاط تعادل پایدار

پایداری نقطه x_0 از نقطه x_5 بیشتر است





تعادل خنثی (Neutral Equilibrium)

نیروهای پایستار (کنسرواتیو) نیروهایی هستند که در یکی از شرایط زیر صدق کنند:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

تمرین: ثابت کنید که رابطه زیر همواره درست است

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0$$

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

نیروهای کنسرواتیو مستقل از مسیرند

نیروهای غیرکنسرواتیو (مانند اصطحکاک و نیروهای اقلافی) را معمولاً نمی توان از تابع پتانسیل $V(x)$ به دست آورد

نیروی زیر متشکل از دو بخش کنسرواتیو و غیر کنسرواتیو را در نظر بگیرید

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} + F'$$

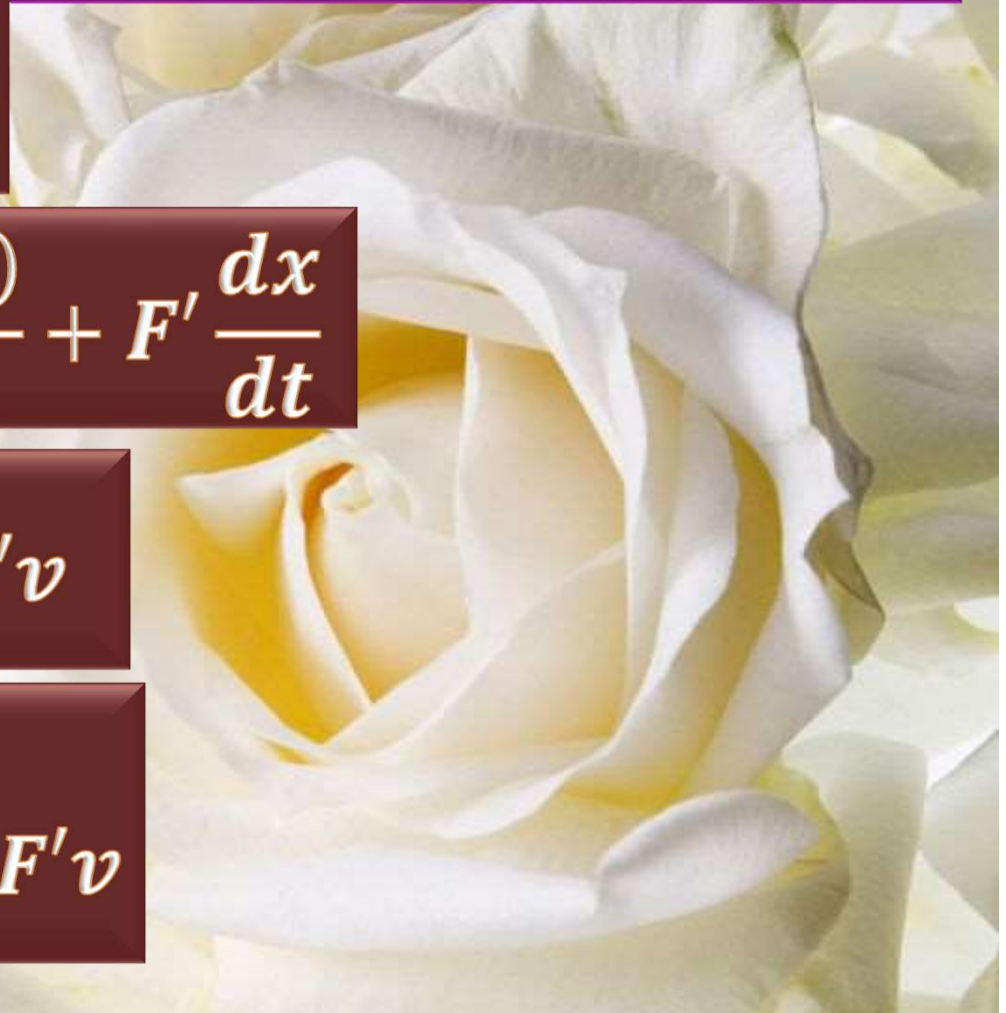
در این حالت دیگر قانون بقا انرژی
مکانیکی صادق نیست، یعنی $T+V$
ثابت نیست

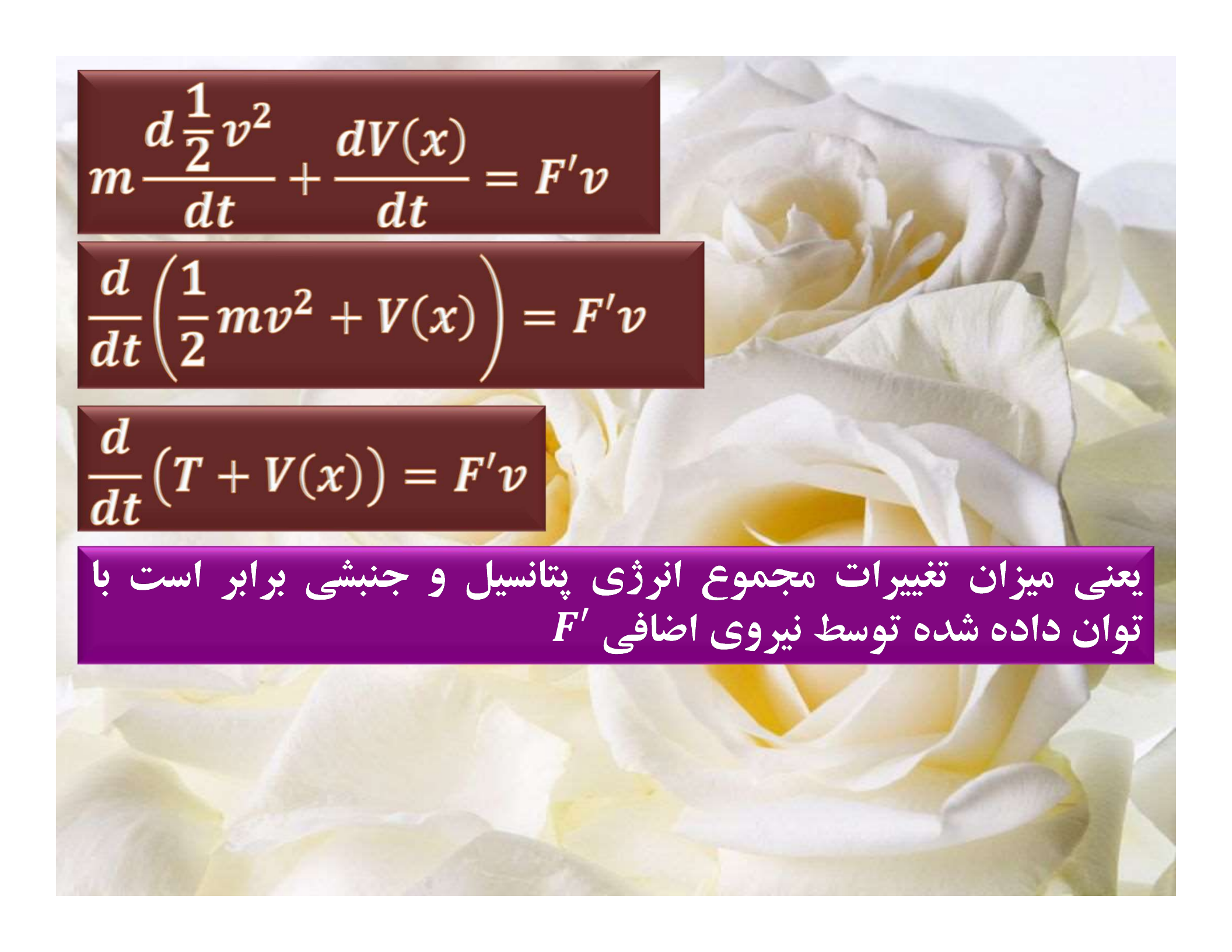
$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx} + F'$$

$$m \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dt} = -\frac{dx}{dt} \frac{dV(x)}{dx} + F' \frac{dx}{dt}$$

$$mv \frac{dv}{dt} = -\frac{dV(x)}{dt} + F'v$$

$$m \frac{d\frac{1}{2}v^2}{dt} + \frac{dV(x)}{dt} = +F'v$$



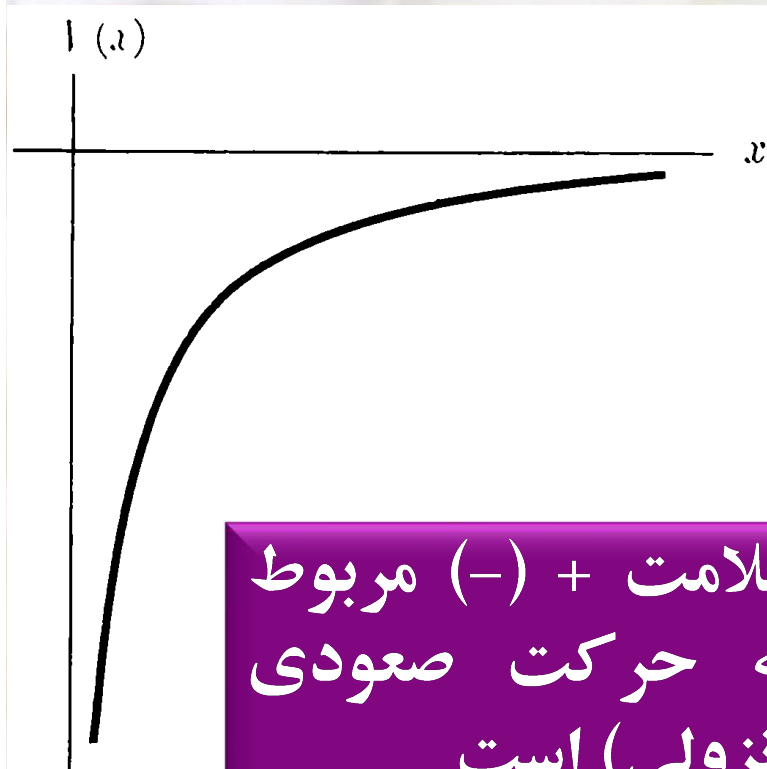

$$m \frac{d \frac{1}{2} v^2}{dt} + \frac{dV(x)}{dt} = F'v$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + V(x) \right) = F'v$$

$$\frac{d}{dt} (T + V(x)) = F'v$$

یعنی میزان تغییرات مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی برابر است با
توان داده شده توسط نیروی اضافی F'

اجسام افتان (از ارتفاع زیاد) به عنوان مثالی از نیروی وابسته به مکان



$$F = -G \frac{mM}{x^2}$$

$$V(x) = \int_{\infty}^x F dx = -G \frac{mM}{x}$$

علامت + (-) مربوط
به حرکت صعودی
(نزولی) است

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2/m} \sqrt{E + G \frac{mM}{x}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E + G \frac{mM}{x}}} = t$$

$$\pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{G \frac{mM}{x} \left(\frac{Ex}{GmM} + 1 \right)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$\pm \frac{GmM}{\sqrt{(-E)^3}} \int_{\theta_0}^{\theta} 2\cos^2\theta d\theta = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\frac{Ex}{GmM} = -\cos^2\theta$$

$$\pm \frac{GmM}{\sqrt{(-E)^3}} \int_0^{\theta} (\cos 2\theta + 1) d\theta = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$dx = \frac{GmM}{E} 2\sin\theta \cos\theta d\theta$$

$$\pm \frac{GmM}{\sqrt{(-E)^3}} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right) = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

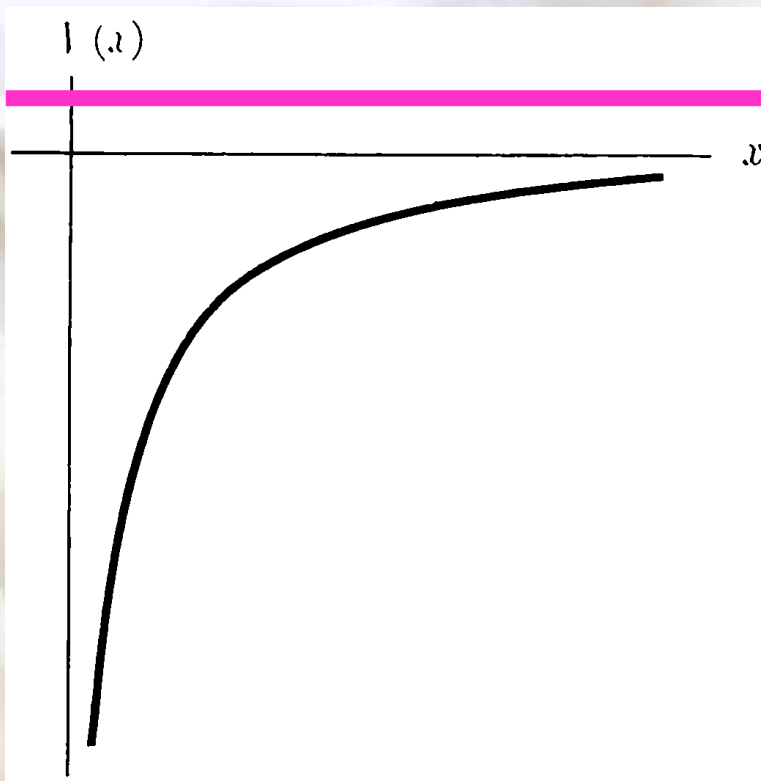
$$\pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\frac{GmM}{E} 2\sin\theta \cos\theta d\theta}{\sqrt{-\frac{E}{\cos^2\theta} (-\cos^2\theta + 1)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta = \sqrt{\frac{2(-E)^3}{m^2 M^2 G^2}} t$$

$$x = -\frac{GmM}{E} \cos^2\theta$$

$$\pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\frac{GmM}{E} 2\sin\theta \cos\theta d\theta}{\sqrt{-E} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

اگر θ بین دو معادله فوق حذف می شد، x به صورت تابعی از زمان به دست می آمد، ولی این کار به صورت تحلیلی امکان پذیر نیست، اما می توان مساله را به طور عددی حل کرد



$$E > 0$$

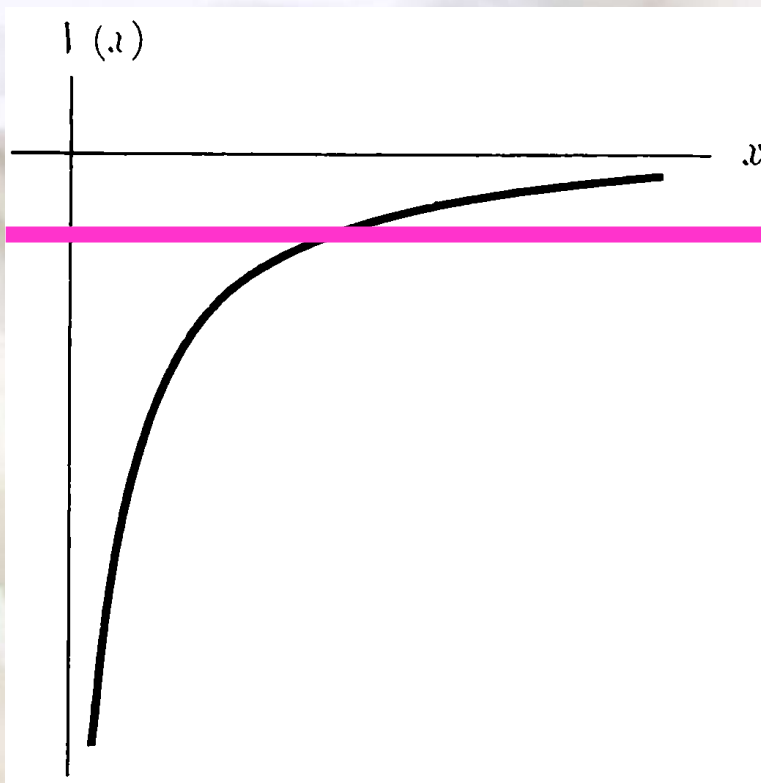
نقطه برگشتی وجود ندارد

در این صورت اگر جسم به سمت بالا در حرکت باشد، $v > 0$ ، تا ابد به حرکت خود به سمت بالا ادامه خواهد داد

$$v = \frac{dx}{dt} = +\sqrt{2/m} \sqrt{E + G \frac{mM}{x}}$$

هنگام بالا رفتن سرعت کاهش می یابد و به سرعت حدی زیر نزدیک می شود

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v = v_l = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$



$$E < 0$$

یک نقطه برگشت، x_T ، به صورت زیر وجود دارد

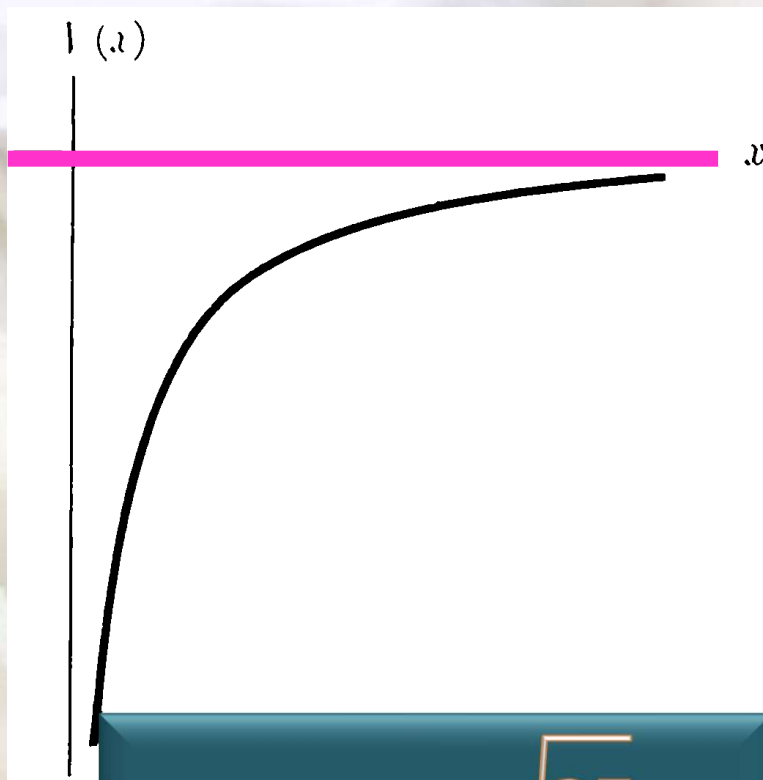
$$v(x_T) = 0$$

$$v(x_T) = \sqrt{2/m} \sqrt{E + G \frac{mM}{x_T}} = 0$$

$$E + G \frac{mM}{x_T} = 0$$

$$x_T = G \frac{mM}{-E}$$

در این صورت اگر جسم به سمت بالا در حرکت باشد، $v > 0$ ، در نقطه x_T متوقف می شود و سپس به سمت زمین باز می گردد



$$E = 0$$

نقطه برگشت در بینهایت خواهد بود

در این صورت جسم تا ابد به حرکت خود به سمت بالا ادامه خواهد داد

$$v = \frac{dx}{dt} = +\sqrt{2/m} \sqrt{E + G \frac{mM}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v = v_l = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 0$$

هنگام بالا رفتن سرعت کاهش می یابد و به سرعت حدی v_l نزدیک می شود

$$v_e = \sqrt{2/m} \sqrt{G \frac{mM}{x}}$$

سرعت در هر ارتفاع x از رابطه زیر به دست می آید

$$v_e = \sqrt{\frac{2MG}{x}}$$

به این سرعت، سرعت فرار گویند

سرعت فرار در سطح زمین را به دست آورید

$$v_e = \sqrt{\frac{2M_e G}{R_e}}$$

$$g = G \frac{M_e}{R_e^2}$$

$$v_e = \sqrt{2gR_e}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{R_e}^r -G \frac{mM_e}{r^2} dr$$

توضیح:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = G \frac{mM_e}{r} \Big|_{R_e}^r = GmM_e \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_e} \right)$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = GmM_e \frac{-1}{R_e}$$

$$\frac{1}{2}v_e^2 = GM_e \frac{1}{R_e}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2M_e G}{R_e}} = \sqrt{2gR_e}$$

که با نتیجه قبل
در توافق است

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۴۰۰

۷۲- کار نیروی $\vec{F} = (y^2 - x^2 + z^2)\hat{i} + (3xy - 5z)\hat{j} + 4z\hat{k}$ که x ، y و z بر حسب متر و F بر حسب نیوتن است از نقطه $(0, 0, 0)$ تا $(2, 4, 0)$ در صفحه $x - y$ روی مسیر $y = x^2$ چقدر است؟

(۱) $42/1J$

(۲) $47/5J$

(۳) $126/4J$

(۴) $142/4J$

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۹

۷۵- ذره‌ای در یک بُعد در (انرژی) پتانسیل $U(x) = -ax^2e^{-bx}$ که a و b ضرایب ثابت مثبتی هستند، قرار دارد. این ذره در چند نقطه در حال تعادل پایدار است؟

۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۸

۳۲- کدام یک از نیروهای زیر پایستار نیست؟ (n عدد ثابتی است).

$$(۱) \quad x^2 (3 \sin(yz) \hat{x} + xz \cos(yz) \hat{y} + xy \cos(yz) \hat{z})$$

$$(۲) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^n (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z})$$

$$(۳) \quad e^{xyz} (yz \hat{x} + xz \hat{y} + xy \hat{z})$$

$$(۴) \quad \cos(yz) \hat{x} + \cos(zx) \hat{y} + \cos(xy) \hat{z}$$

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۷

۷۳- پتانسیل یک بعدی $V(x) = -V_0 \frac{a^2(x^2 + a^2)}{x^4 + \lambda a^4}$ چند نقطه تعادل دارد و از میان این نقاط تعادل، چند نقطه تعادل

پایدار و چند نقطه تعادل ناپایدار است؟

- (۱) سه نقطه تعادل که یکی پایدار و دو تا ناپایدار است.
- (۲) سه نقطه تعادل که دو تا پایدار و یکی ناپایدار است.
- (۳) پنج نقطه تعادل که سه تا پایدار و دو تا ناپایدار است.
- (۴) پنج نقطه تعادل که دو تا پایدار و سه تا ناپایدار است.

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۶

۷۴- بسامد زاویه‌ای نوسان‌های کوچک ذره‌ای به جرم m حول حالت پایدار حرکت‌اش در پتانسیل یک بعدی

$$\frac{dV(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x_0$$

$$\left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x_0} = k$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x_0}}{m}}$$

$V(x) = -V_0 \left(\frac{a}{x} - \left(\frac{a}{x} \right)^3 \right)$ که در آن $V_0 > 0, a > 0$ می‌باشد، کدام است؟

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{V_0}{ma^2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{9} \frac{V_0}{ma^2}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{V_0}{ma^2}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{V_0}{ma^2}} \quad (4)$$

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۴

۷۵- ذره‌ای به جرم m در راستای محور x تحت تاثیر پتانسیل $V(x) = V_0 \frac{2ax}{x^2 + b^2}$ حرکت می‌کند که V_0 ، a و b مقادیر ثابت مثبتی هستند. بسامد زاویه‌ای نوسانات کم دامنه ذره حول نقطه تعادل پایدار آن کدام است؟

$$\frac{dV(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x_0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x_0} = k$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x_0}}{m}}$$

$$\sqrt{\frac{2bV_0}{a^3m}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{aV_0}{b^3m}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{bV_0}{a^3m}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{2aV_0}{b^3m}} \quad (4)$$