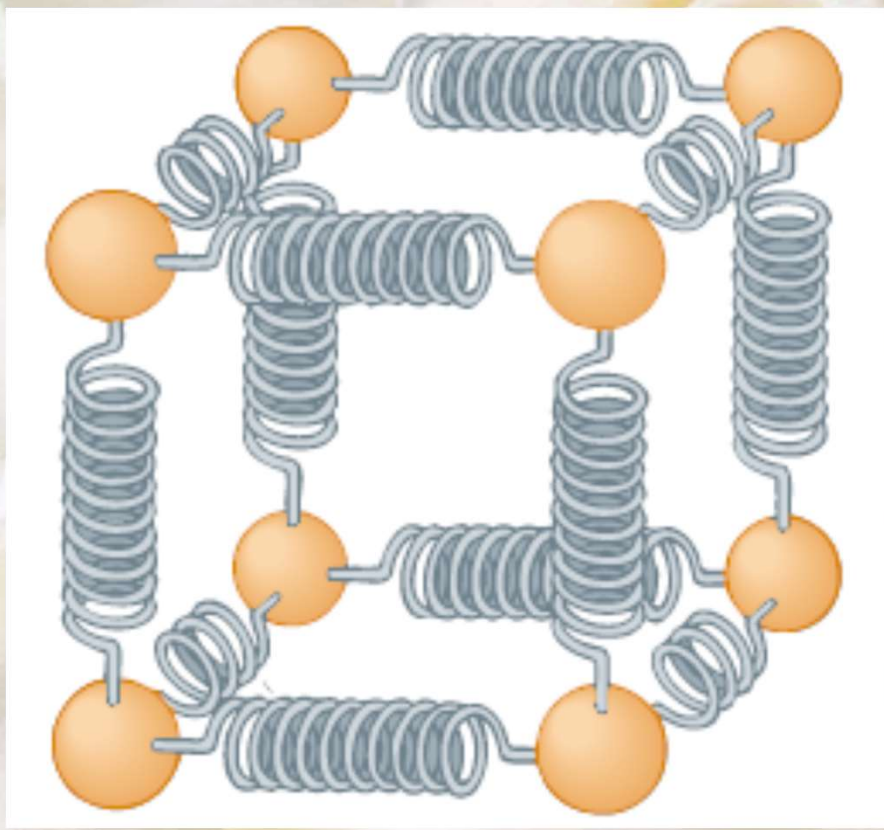
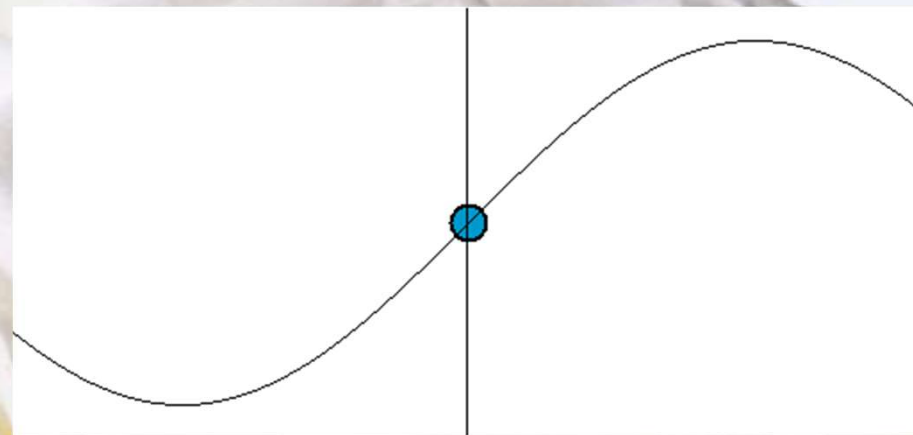
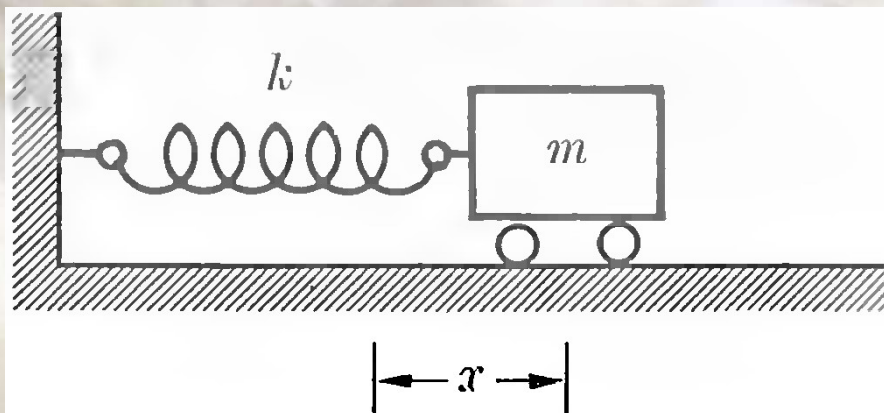


نوسانگر هارمونیک ساده



در فیزیک نوسانگر هماهنگ ساده از اهمیت زیادی برخوردار است

چون پیوندهای اتمی در جامدات را اغلب می توان با فنرهایی که از قانون هوک پیروی می کنند شبیه سازی کرد

علت فیزیکی نکته فوق از کجا سرچشمه می گیرد؟

$$V(x) = V(x_0) + \left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3V(x)}{dx^3} \right|_{x_0} (x - x_0)^3 + \dots$$

$$V(x_0) = 0$$

$$\left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x_0} = 0$$

$$\left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x_0} \geq 0$$

$$\left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x_0} = k$$

$$V(x) = \frac{1}{2} k(x - x_0)^2$$

با انتخاب مبدا انرژی مناسب داریم

در نقطه تعادل نیروی صفر است:

شرط پایداری ایجاب می کند که

اگر فرض کنیم که جسم از حالت تعادل خیلی جابه جا نشود، آنگاه می توان از جملات مراتب بالاتر بسط صرف نظر کرد

در این صورت با نام گذاری:

خواهیم داشت:

که همان انرژی پتانسیل فنر پیرو قانون هوک است

$$F = -kx$$

نیروی وارد بر فنر

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

انرژی پتانسیل فنر

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

معادله حرکت فنر

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

معادله حرکت فنر میرا

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

معادله حرکت فنر میرای واداشته

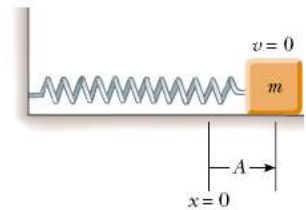
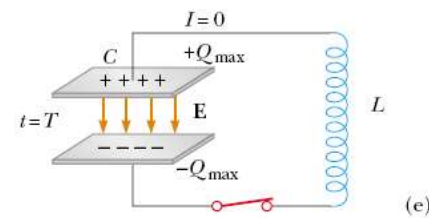
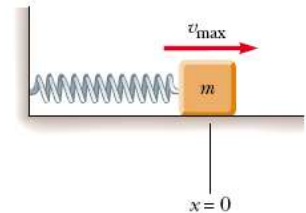
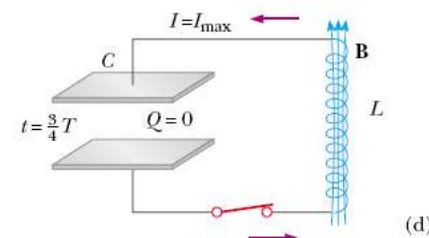
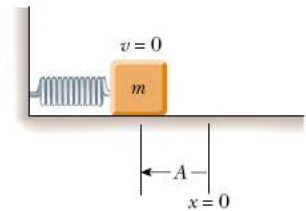
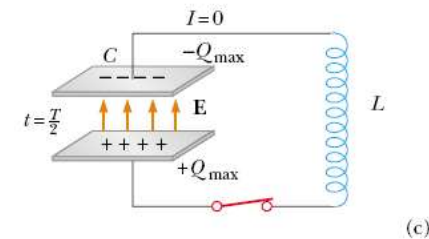
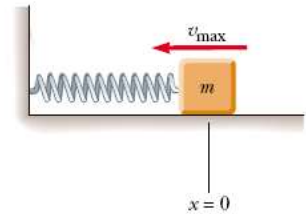
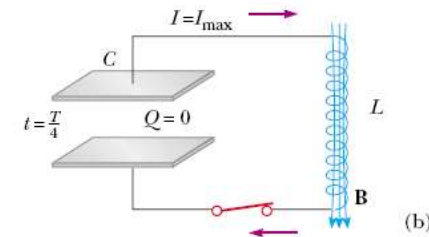
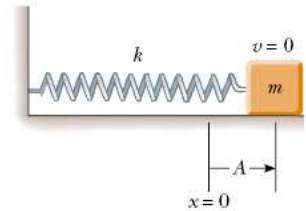
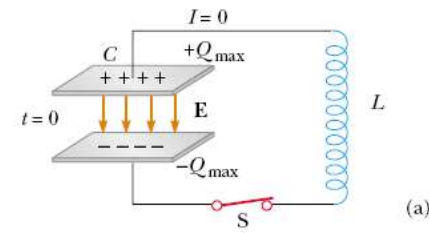
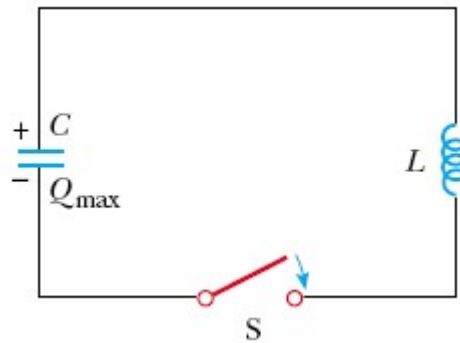
$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E(t)$$

معادل الکترونیکی فنر میرای واداشته

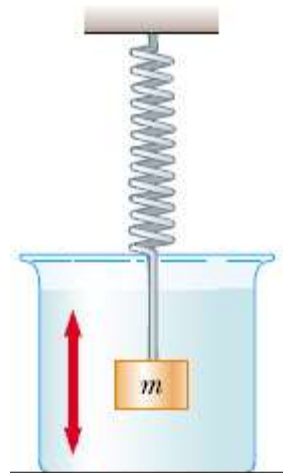
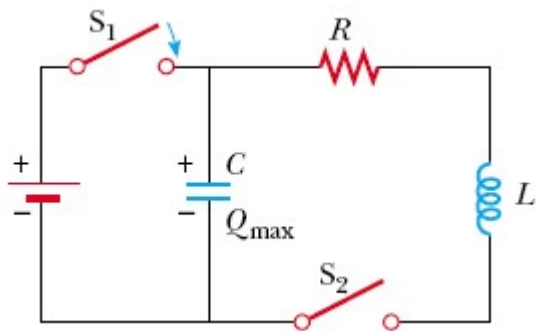
Analogies Between Electrical and Mechanical Systems

Electric Circuit		One-Dimensional Mechanical System
Charge	$Q \leftrightarrow x$	Position
Current	$I \leftrightarrow v_x$	Velocity
Potential difference	$\Delta V \leftrightarrow F_x$	Force
Resistance	$R \leftrightarrow b$	Viscous damping coefficient
Capacitance	$C \leftrightarrow 1/k$	(k = spring constant)
Inductance	$L \leftrightarrow m$	Mass
Current = time derivative of charge	$I = \frac{dQ}{dt} \leftrightarrow v_x = \frac{dx}{dt}$	Velocity = time derivative of position
Rate of change of current = second time derivative of charge	$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \leftrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Acceleration = second time derivative of position
Energy in inductor	$U_L = \frac{1}{2} LI^2 \leftrightarrow K = \frac{1}{2} mv^2$	Kinetic energy of moving object
Energy in capacitor	$U_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \leftrightarrow U = \frac{1}{2} kx^2$	Potential energy stored in a spring
Rate of energy loss due to resistance	$I^2 R \leftrightarrow b v^2$	Rate of energy loss due to friction
<i>RLC</i> circuit	$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \leftrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$	Damped object on a spring

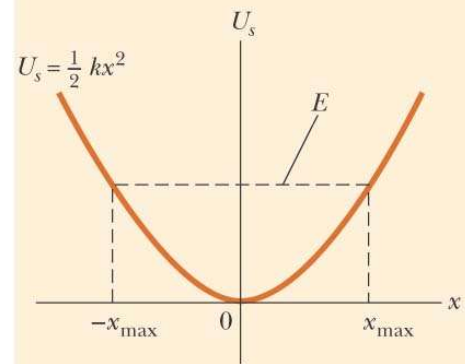
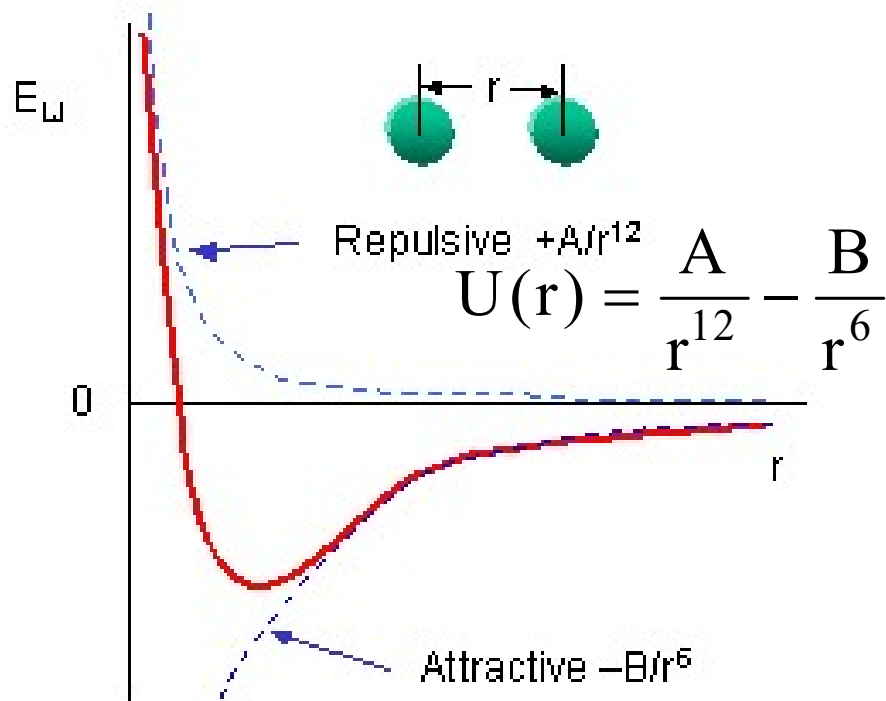
Oscillations in an LC Circuit



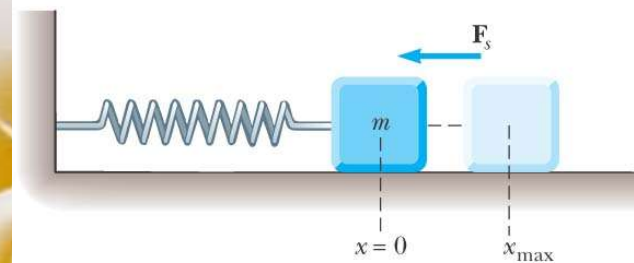
The RLC Circuit



البته پتانسیل بهتر نسبت به پتانسیل فنر پتانسیل لینارد-جونز است که به واقعیت نزدیکتر است

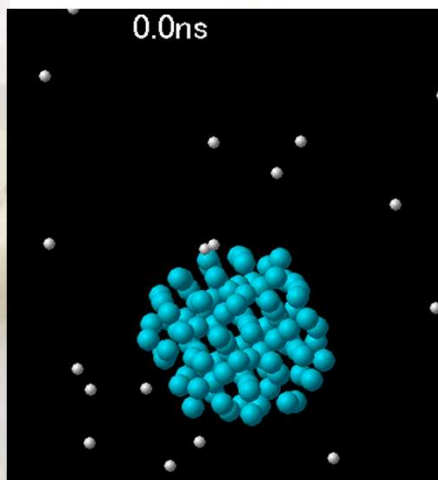


(a)



(b)

© 2004 Thomson/Brooks Cole



مطالعه پتانسیل لینارد-جونز در حوزه فیزیک ماده چگال انجام می شود

نوسانگر هارمونیک میرا

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$x = e^{pt}$$

$$\frac{dx}{dt} = pe^{pt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = p^2 e^{pt}$$

$$mp^2 e^{pt} + bpe^{pt} + ke^{pt} = 0$$

$$mp^2 + bp + k = 0$$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$p = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\frac{k}{m} > \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

$$\frac{k}{m} < \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

$$\frac{k}{m} = \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$p = -\gamma \pm i\omega_1$$

حالت الف) کند میرا

حالت ب) تند میرا

حالت ج) میرایی بحرانی

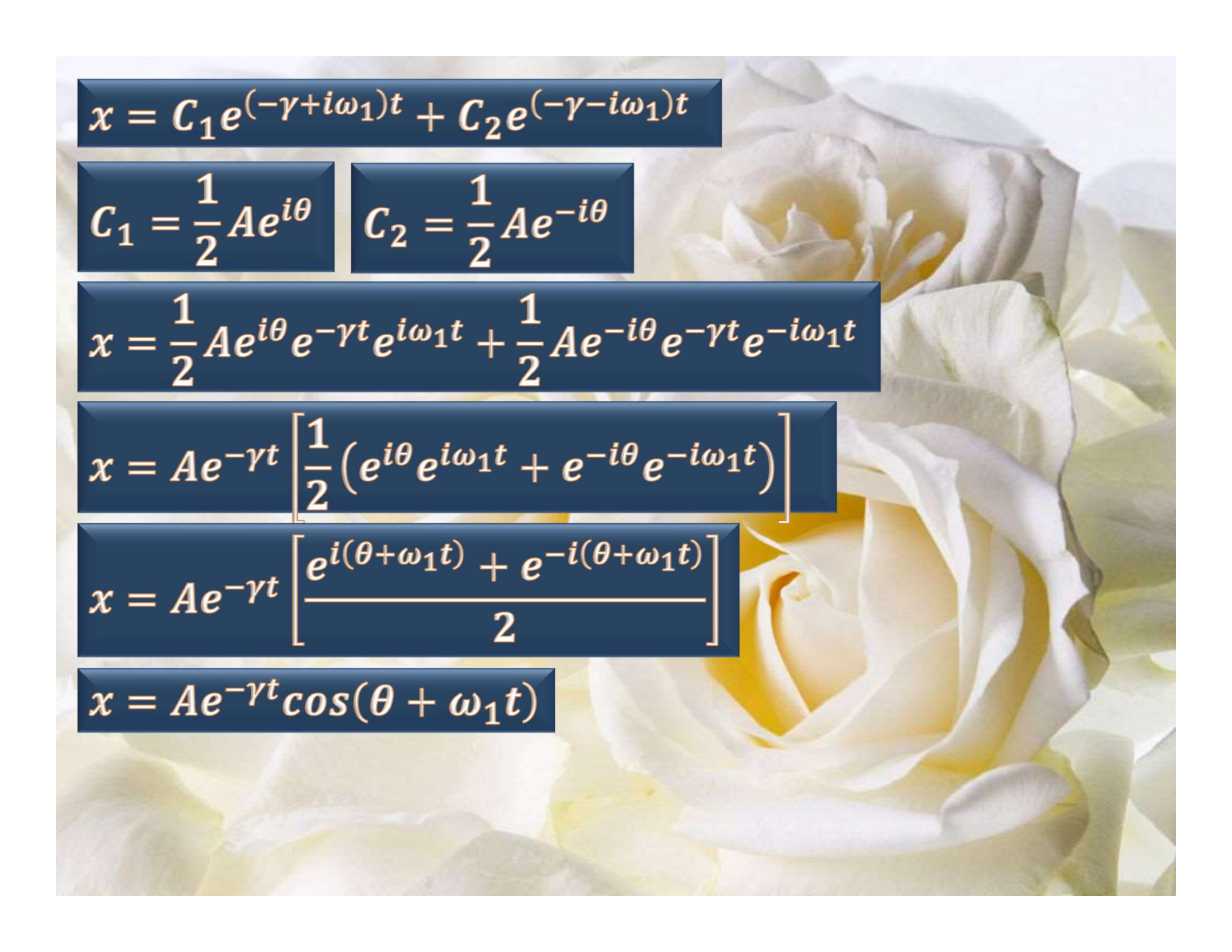
در حالت (الف) داریم که:

سرعت زاویه ای طبیعی نوسانگر غیر میرا

ضریب میرایی

$$\omega_1 < \omega_0$$

پس p دارای 2 جواب است


$$x = C_1 e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + C_2 e^{(-\gamma - i\omega_1)t}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} A e^{i\theta}$$

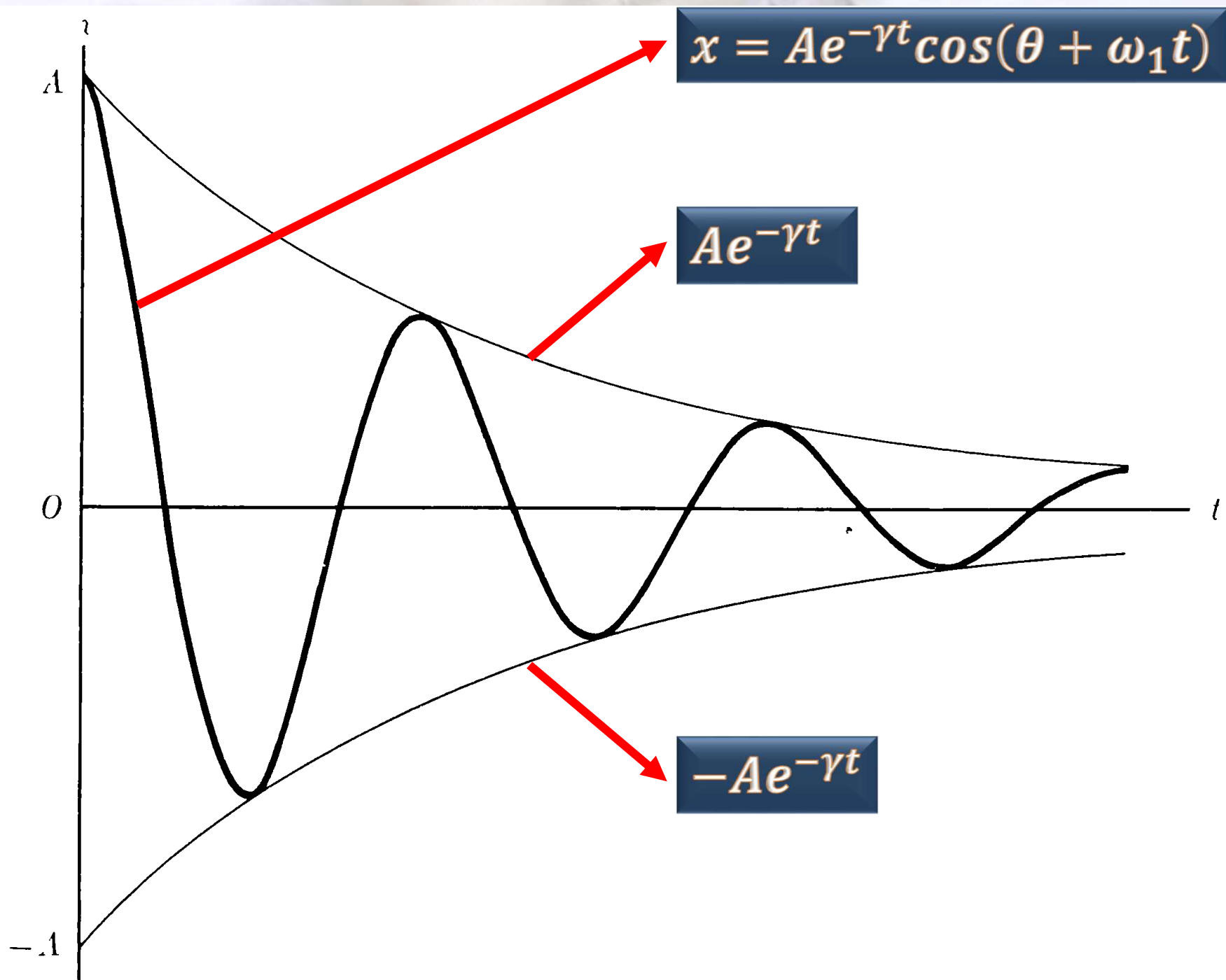
$$C_2 = \frac{1}{2} A e^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2} A e^{i\theta} e^{-\gamma t} e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2} A e^{-i\theta} e^{-\gamma t} e^{-i\omega_1 t}$$

$$x = A e^{-\gamma t} \left[\frac{1}{2} (e^{i\theta} e^{i\omega_1 t} + e^{-i\theta} e^{-i\omega_1 t}) \right]$$

$$x = A e^{-\gamma t} \left[\frac{e^{i(\theta + \omega_1 t)} + e^{-i(\theta + \omega_1 t)}}{2} \right]$$

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\theta + \omega_1 t)$$



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma \ll \omega_0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0$$

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\theta + \omega_1 t) \\ \approx Ae^{-\gamma t} \cos(\theta + \omega_0 t)$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\dot{x} \\ \approx -Ae^{-\gamma t} \omega_0 \sin(\theta + \omega_0 t) \\ - A\gamma e^{-\gamma t} \cos(\theta + \omega_0 t)$$

$$\dot{x} \approx -Ae^{-\gamma t} \omega_0 \sin(\theta + \omega_0 t)$$

$$E \\ \approx \frac{1}{2} m (Ae^{-\gamma t} \omega_0 \sin(\theta + \omega_0 t))^2 \\ + \frac{1}{2} k (Ae^{-\gamma t} \cos(\theta + \omega_0 t))^2$$

$$E \\ \approx \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} (\sin(\theta + \omega_0 t))^2 \\ + \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} (\cos(\theta + \omega_0 t))^2$$

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-2\gamma t}$$

نشان می دهیم که انرژی به میزان 2 برابر میزان میرایی دامنه نسبت به زمان به صورت نمایی کاهش می یابد

$$E = E_0 e^{-2\gamma t}$$

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{d \ln E}{dt} = \frac{-2\gamma E_0 e^{-2\gamma t}}{E_0 e^{-2\gamma t}} = -2\gamma$$

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -2\gamma$$

$$\omega_0 < \gamma$$

(ب) در حالت تند میرا داریم که:

$$p = -\gamma_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$p = -\gamma_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$x = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}$$

پس در این حالت هر دو جواب p حقیقی اند (برخلاف کندمیرا که هر دو جواب موهومی بودند)

$$x = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}$$

$$x(t=0) = x_0 = C_1 + C_2$$

$$\dot{x} = -\gamma_1 C_1 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_2 C_2 e^{-\gamma_2 t}$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = -\gamma_1 C_1 - \gamma_2 C_2$$

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ v_0 = -\gamma_1 C_1 - \gamma_2 C_2 \end{cases}$$

$$\gamma_1 x_0 + v_0 = C_2 (\gamma_1 - \gamma_2)$$

$$C_2 = \frac{\gamma_1 x_0 + v_0}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

$$\gamma_2 x_0 + v_0 = C_1 (\gamma_2 - \gamma_1)$$

$$C_1 = \frac{\gamma_2 x_0 + v_0}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

$$x_0 = 0 \text{ \& } v_0 \neq 0$$

(1)

$$C_1 = \frac{v_0}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

$$C_2 = \frac{v_0}{\gamma_1 - \gamma_2} = -C_1$$

$$x = C_1 (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t})$$

$$x_0 \neq 0 \text{ \& } v_0 = 0$$

(2)

$$C_1 = \frac{\gamma_2 x_0}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

$$C_2 = \frac{\gamma_1 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} C_1$$

$$x = C_1 \left(e^{-\gamma_1 t} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} e^{-\gamma_2 t} \right)$$

$$x = \frac{v_0}{\gamma_2 - \gamma_1} (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t})$$

$$x_0 = 0 \text{ \& } v_0 \neq 0$$

(1)

$$x = \frac{\gamma_2 x_0}{\gamma_2 - \gamma_1} \left(e^{-\gamma_1 t} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} e^{-\gamma_2 t} \right)$$
$$= \frac{x_0}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma_2 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_2 t})$$

$$x_0 \neq 0 \text{ \& } v_0 = 0$$

(2)

تمرین: معادلات فوق را رسم کنید و در مورد رفتار آنها بر حسب ضرایب میرایی بحث کنید

(ج) در حالت میرایی بحرانی داریم که:

$$\omega_0 = \gamma$$

$$p = -\gamma_1 = -\gamma$$

$$x = e^{-\gamma t}$$

پس در این حالت p فقط یک جواب دارد

اما، در این حالت جواب زیر نیز در معادله صدق می کند

زیرا:

$$x = te^{-\gamma t}$$

$$\dot{x} = e^{-\gamma t} - \gamma te^{-\gamma t}$$

$$\ddot{x} = -\gamma e^{-\gamma t} - \gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 te^{-\gamma t}$$

$$\ddot{x} = -2\gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 te^{-\gamma t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$-2\gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 te^{-\gamma t} + 2\gamma(e^{-\gamma t} - \gamma te^{-\gamma t}) + \omega_0^2 te^{-\gamma t} = 0 (?)$$

$$-\gamma^2 te^{-\gamma t} + \omega_0^2 te^{-\gamma t} = 0 (?)$$

$$(\omega_0^2 - \gamma^2)te^{-\gamma t} = 0 (?)$$

چون در حالت میرایی بحرانی هستیم، پس طرف چپ معادله فوق همواره صفر است

پس $x = te^{-\gamma t}$ نیز یک جواب معادله حرکت است، لذا جواب کلی را می توان به صورت ترکیب خطی دو جواب فوق نوشت:

$$x = D_1 e^{-\gamma t} + D_2 te^{-\gamma t}$$

$$x = (D_1 + D_2 t)e^{-\gamma t}$$

$$p = -\gamma_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_0 < \gamma$$

از مقایسه حالت تند میرا:

$$p = -\gamma_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$x = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}$$

$$\omega_0 = \gamma$$

با حالت میرایی بحرانی:

$$x = (D_1 + D_2 t) e^{-\gamma t}$$

$$-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \gamma_2 < \gamma < \gamma_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

نتیجه می گیریم که:

$$\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$$

$$C_2 \neq 0$$

اگر

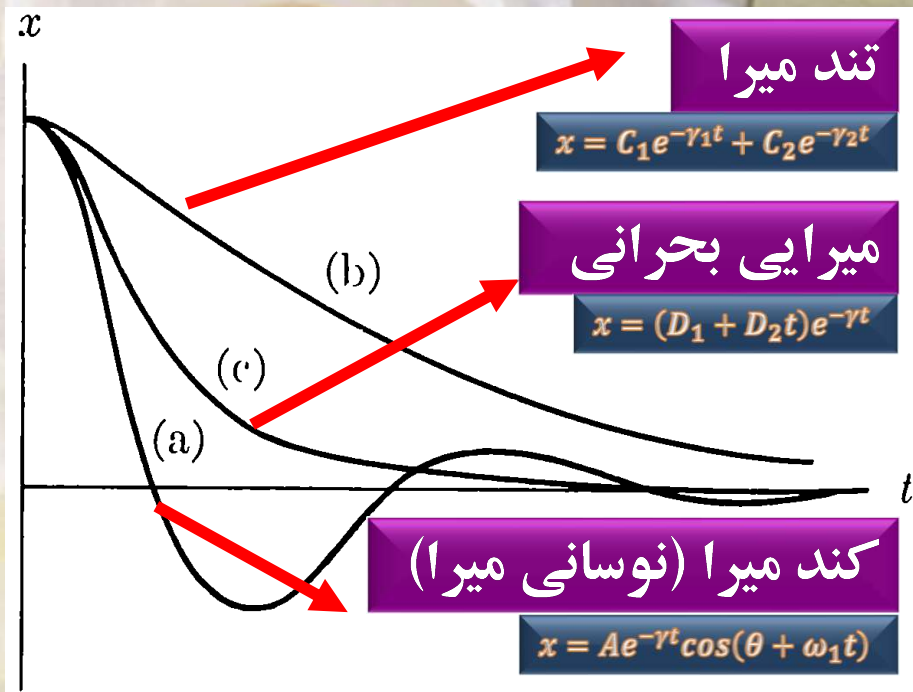
میرایی بحرانی سریعتر از تندمیرا به صفر
میل می کند، چون $\gamma_2 < \gamma$

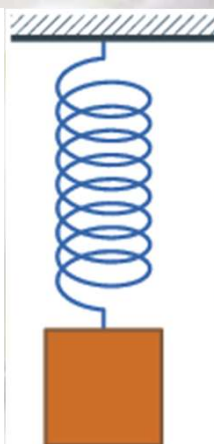
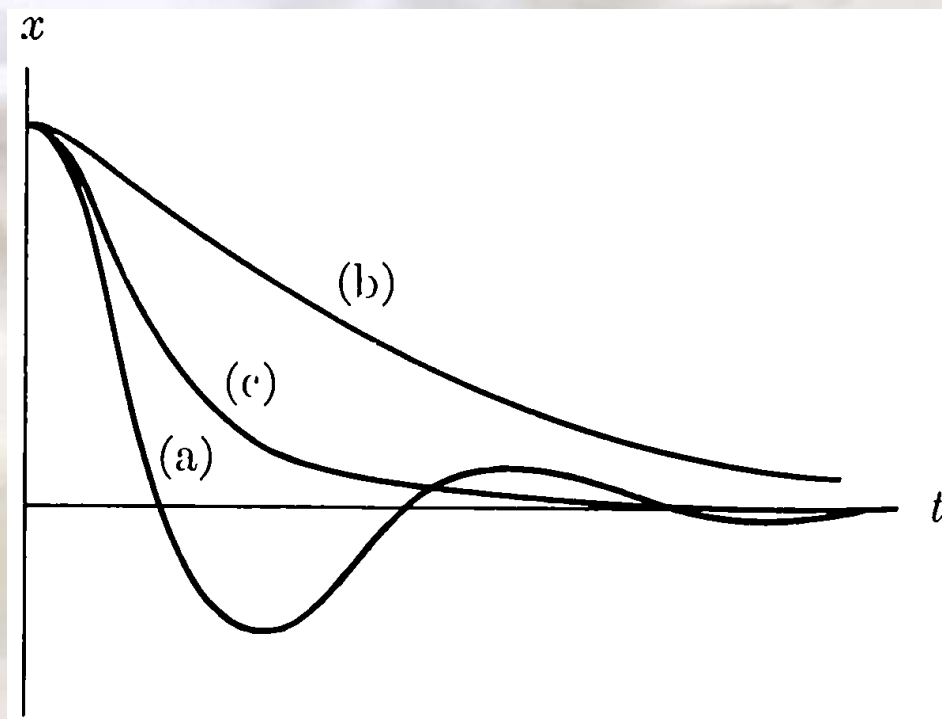
$$x = C_1 e^{-\gamma_1 t}$$

$$C_2 = 0$$

اگر

تندمیرا سریعتر از میرایی به صفر میل می
کند، چون $\gamma_1 > \gamma$





گاهی لازم است که یک دستگاه نوسانی خیلی سریع میرا شود، مثلاً در موارد زیر:

(1) اندازه گیرهای عقربه ای

(2) فنرهای بازگرداننده هیدرولیکی یا هوایی در

در چنین شرایطی یعنی اگر بخواهیم که یک دستگاه نوسانی میرا با فرکانس ω_0 و میرایی γ هر چه سریعتر نوسانات خود را از دست بدهد و میرا شود، دستگاه را طوری طراحی می کنیم که:

$$\omega_0 = \gamma$$

در این صورت، خواهیم داشت

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 0$$

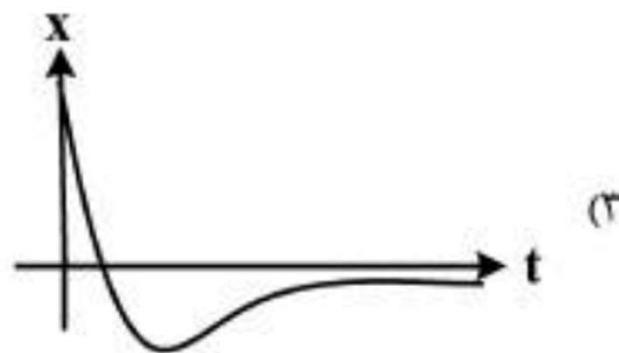
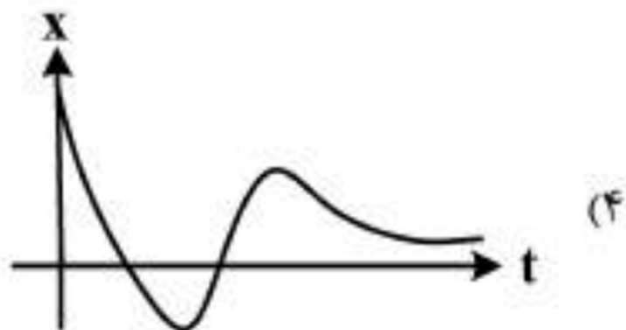
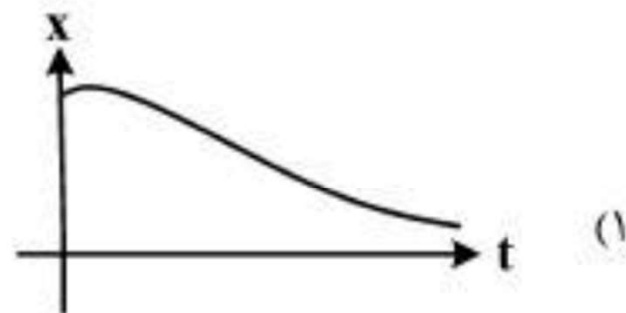
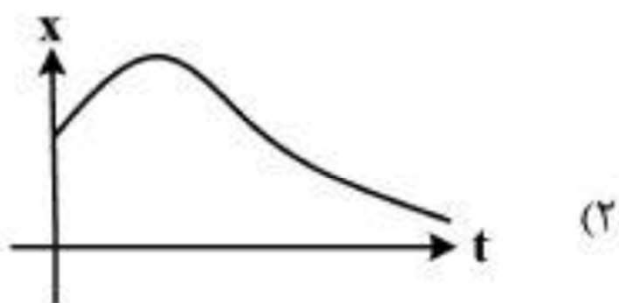
$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \rightarrow \infty$$

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\theta + \omega_1 t) \rightarrow A \cos(\theta) e^{-\gamma t} = A' e^{-\gamma t}$$

و زمان تناوب بینهایت عملاً معادل یک حرکت غیرنوسانی است

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۵

۷۳- نمودار مکان - زمان یک نوسانگر تند میرای یک بعدی با سرعت اولیه $v_0 < 0$ و $|v_0| \gg 1$ کدام است؟



آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۴۰۰

۷۴- نیروی وارد بر جسمی به جرم m به صورت $\vec{F} = (-kx - b\dot{x})\hat{i}$ که $\omega^2 \equiv \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 > 0$ است. اگر در لحظه

$t = 0$ سرعت اولیه و مکان اولیه جسم به ترتیب v_0 و x_0 باشد $x(t)$ کدام است؟

$$\tan \varphi = -(x_0 \omega + \frac{b}{2m} x_0) / v_0 \quad \text{که در آن} \quad x(t) = \frac{x_0}{\cos \varphi} \exp\left(-\frac{b}{2m} t\right) \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

$$\tan \varphi = -(x_0 \omega + \frac{b}{2m} x_0) / v_0 \quad \text{که در آن} \quad x(t) = \frac{x_0}{\sin \varphi} \exp\left(-\frac{b}{2m} t\right) \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

$$\tan \varphi = -(v_0 + \frac{b}{2m} x_0) / (x_0 \omega) \quad \text{که در آن} \quad x(t) = \frac{x_0}{\sin \varphi} \exp\left(-\frac{b}{2m} t\right) \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

$$\tan \varphi = -(v_0 + \frac{b}{2m} x_0) / (x_0 \omega) \quad \text{که در آن} \quad x(t) = \frac{x_0}{\cos \varphi} \exp\left(-\frac{b}{2m} t\right) \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$