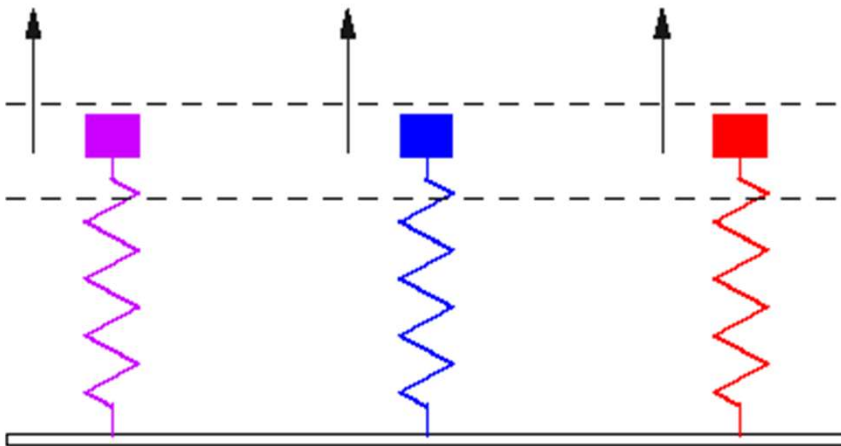


نوسانگر هارمونیک واداشته

$$F = F_0 \cos(2\pi f_0 t)$$

$$f_0=0.4, \quad f_0=1.01, \quad f_0=1.6$$



<http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/SHO/mass-force.html>

$$F(t) = \text{Re}(F_0 e^{i(\omega t + \theta_0)})$$

$$F(t) = \text{Re}(F_0 e^{i\theta_0} e^{i\omega t}) = \text{Re}(F_0 e^{i\omega t})$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = \text{Re}(F_0 e^{i\omega t})$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$$

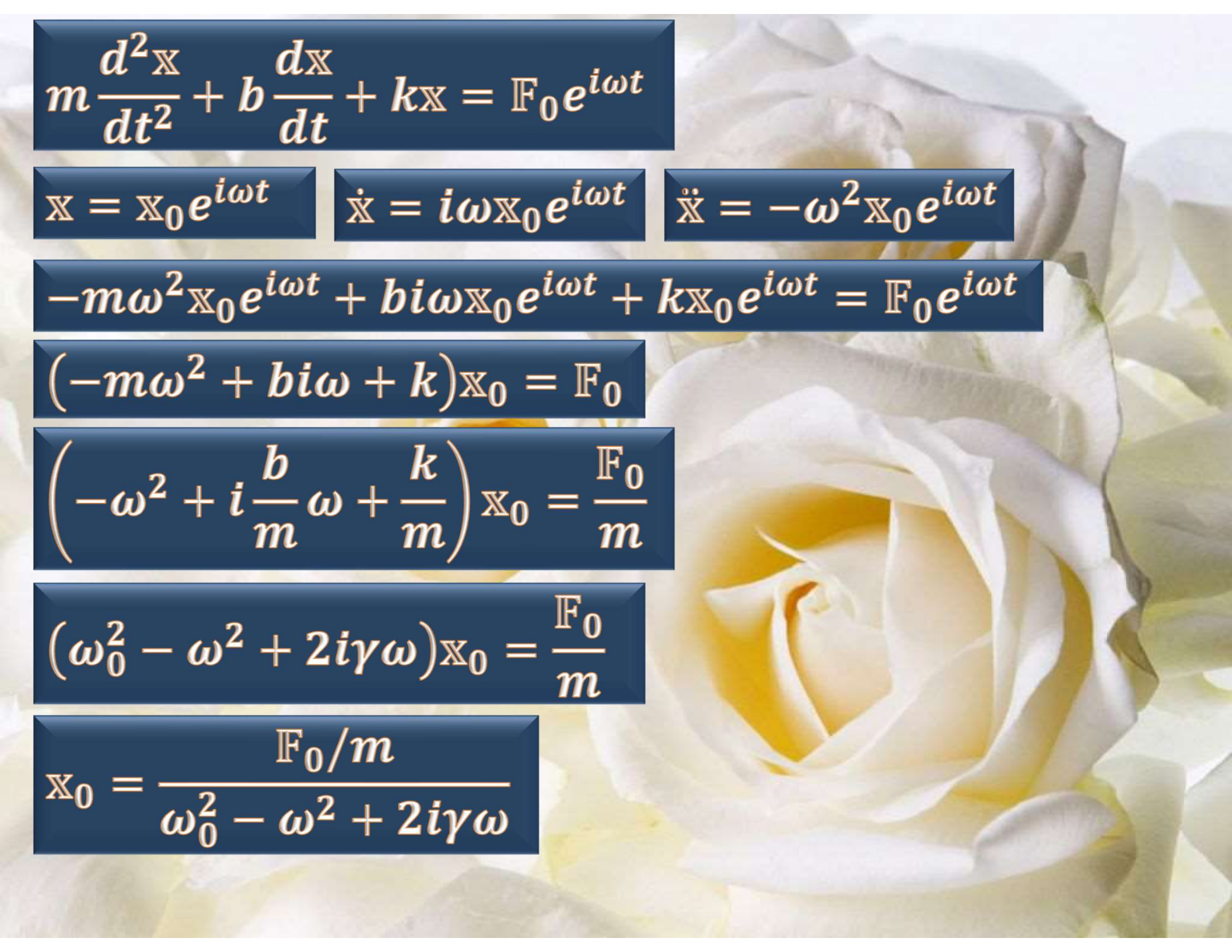
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$$

برای یافتن یک جواب خاص
معادله فوق می توان پاسخ زیر را
در آن قرار داد

$$x = A_s \cos(\omega t + \theta_0)$$

و سپس اقدام به یافتن دامنه A_s و
فاز θ_0 نمود

اما برای سادگی از اعداد مختلط
استفاده می کنیم:


$$m \frac{d^2 \mathbb{X}}{dt^2} + b \frac{d\mathbb{X}}{dt} + k\mathbb{X} = \mathbb{F}_0 e^{i\omega t}$$

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_0 e^{i\omega t}$$

$$\dot{\mathbb{X}} = i\omega \mathbb{X}_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\mathbb{X}} = -\omega^2 \mathbb{X}_0 e^{i\omega t}$$

$$-m\omega^2 \mathbb{X}_0 e^{i\omega t} + bi\omega \mathbb{X}_0 e^{i\omega t} + k\mathbb{X}_0 e^{i\omega t} = \mathbb{F}_0 e^{i\omega t}$$

$$(-m\omega^2 + bi\omega + k)\mathbb{X}_0 = \mathbb{F}_0$$

$$\left(-\omega^2 + i \frac{b}{m} \omega + \frac{k}{m}\right) \mathbb{X}_0 = \frac{\mathbb{F}_0}{m}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)\mathbb{X}_0 = \frac{\mathbb{F}_0}{m}$$

$$\mathbb{X}_0 = \frac{\mathbb{F}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

$$\mathbb{X} = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right) e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

$$\dot{\mathbb{X}} = \frac{i\omega F_0}{m} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

$$\mathbb{X} = \frac{\dot{\mathbb{X}}}{i\omega}$$

$$e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$\dot{\mathbb{X}} = \frac{\omega F_0}{m} \frac{e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega = re^{i\varphi}$$

$$z = a + ib = re^{i\theta}$$

$$z^* = a - ib = re^{-i\theta}$$

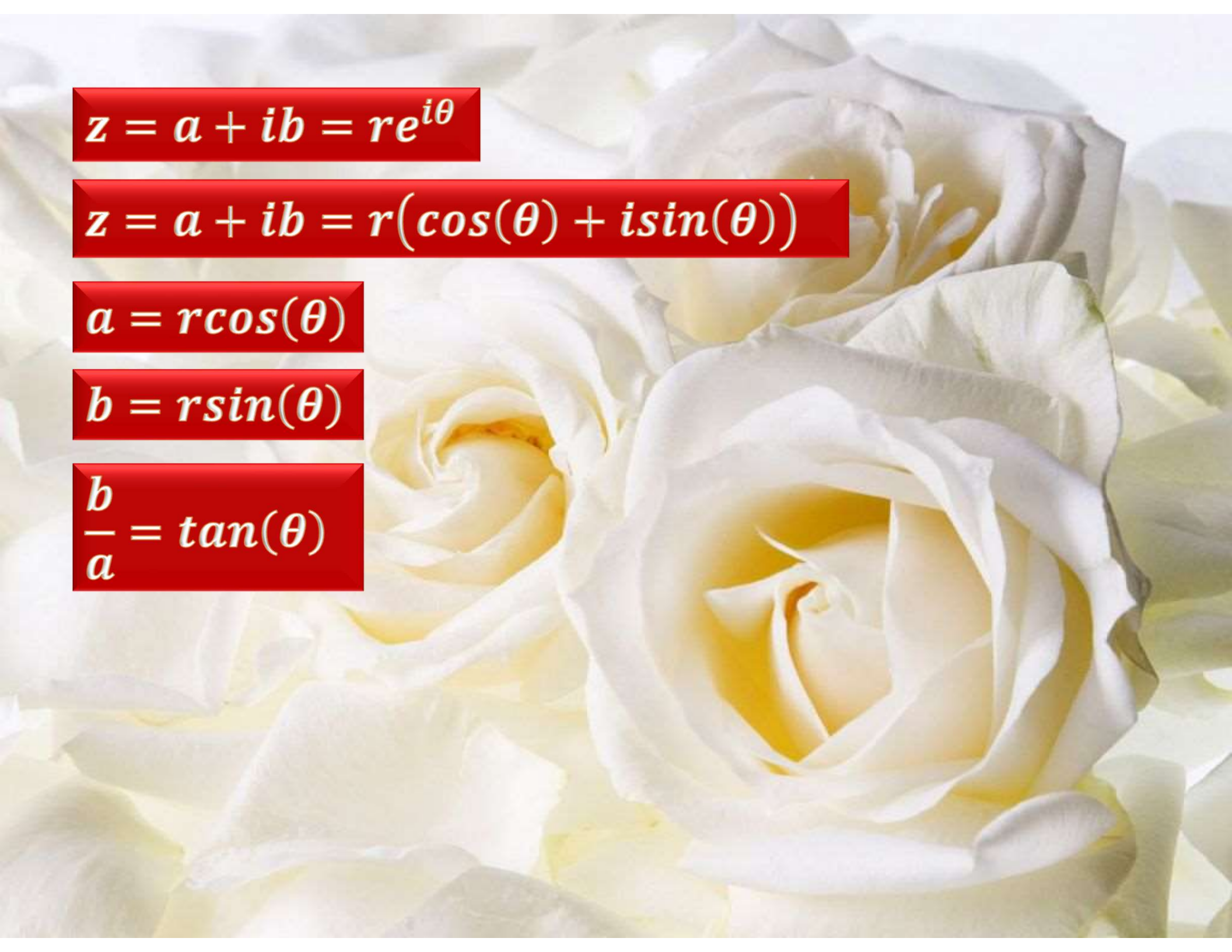
$$\begin{aligned} zz^* &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 + b^2 = re^{i\theta} re^{-i\theta} = r^2 \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)} = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

$$\tan\varphi = 2\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan(\theta) = b/a$$

The background of the slide is a close-up photograph of several white roses. The petals are delicate and layered, with some showing a slight yellow tint. The lighting is soft, creating gentle shadows and highlights on the flower's surface.
$$z = a + ib = re^{i\theta}$$

$$z = a + ib = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$a = r\cos(\theta)$$

$$b = r\sin(\theta)$$

$$\frac{b}{a} = \tan(\theta)$$

$$z = a + ib = re^{i\theta}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

$$\dot{x} = \frac{\omega F_0}{m} \frac{e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)}$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega = re^{i\varphi}$$

$$r = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

$$\tan\varphi = 2\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$$

$$\dot{x} = \frac{\omega F_0}{m} \frac{e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} e^{-i\left(\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)}$$

$$\dot{x} = \frac{\omega F_0}{m} \frac{e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} e^{-i\left(\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)}$$

$$\dot{x} = \frac{\omega F_0}{m} \frac{e^{i\left(\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)\right)}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$= \frac{\omega F_0}{m} \frac{e^{i\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right)\right)}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right)$$

$$\tan\beta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right) = \cot\left(\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right) = \cot\varphi$$

$$= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \varphi$$

$$\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \tan\varphi$$

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} = \cot\varphi$$

$$\tan\beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} \right)$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}} = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\beta}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\dot{x} = \frac{\omega F_0}{m} \frac{e^{i(\omega t + \beta)}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$F_0 = F_0 e^{i\theta_0}$$

$$\dot{x} = \text{Re}(\dot{x})$$

$$\dot{x} = \frac{\omega F_0}{m} \frac{e^{i(\omega t + \theta_0 + \beta)}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\dot{x} = \frac{\omega F_0}{m} \frac{\cos(\omega t + \theta_0 + \beta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\mathbb{X} = \frac{\dot{\mathbb{X}}}{i\omega}$$

$$Re(\mathbb{X}) = Re\left(\frac{\dot{\mathbb{X}}}{i\omega}\right)$$

$$x = Re(\mathbb{X})$$

$$x = Re\left(\frac{\dot{\mathbb{X}}}{i\omega}\right)$$

$$\dot{\mathbb{X}} = \frac{\omega F_0}{m} \frac{e^{i(\omega t + \theta_0 + \beta)}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$x = \frac{F_0}{m} \frac{\sin(\omega t + \theta_0 + \beta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

این یک جواب خاص معادله حرکت است که شامل هیچ گونه ضریب ثابت دلخواهی نیست. برای یافتن جواب عام آن از قضیه زیر استفاده می کنیم:

Theorem 3. If $x_i(t)$ is a solution of an inhomogeneous linear equation [e.g., Eq. (2.91)], and $x_h(t)$ is a solution of the corresponding homogeneous equation [e.g., Eq. (2.90)], then $x(t) = x_i(t) + x_h(t)$ is also a solution of the inhomogeneous equation.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\theta + \omega_1 t)$$

ما قبلاً پاسخ معادله همگن زیر را

به صورت زیر به دست آورده
بوده ایم

بنابراین جواب عام معادله غیرهمگن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\theta + \omega_1 t) + \frac{F_0}{m} \frac{\sin(\omega t + \theta_0 + \beta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

نکاتی در خصوص جوابهای به دست آمده

(1) جواب کلی فوق برخلاف جواب خاص دارای 2 ثابت دلخواه است که می توان آنها را با شرایط اولیه تعیین کرد

(2) جمله اول به صورت نمایی کاهش می یابد و آن را گذرا می نامند

(3) جمله دوم با دامنه ثابتی نوسان می کند و آن را حالت پاینده گویند

4) جمله گذرا به شرایط اولیه بستگی دارد ولی جمله پاینده که پس از استهلاک جمله گذرا باقی می ماند به شرایط اولیه بستگی ندارد

5) در حالت پاینده توان داده شده به نوسانگر توسط نیروی وارده بر آن به صورت زیر قابل محاسبه است

$$\dot{x}F(t) = F_0 \cos(\omega t + \theta_0) \frac{\omega F_0}{m} \frac{\cos(\omega t + \theta_0 + \beta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$\dot{x}F(t) = \frac{\omega F_0^2}{m} \frac{\cos\beta \cos^2(\omega t + \theta_0)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} - \frac{\omega F_0^2}{2m} \frac{\sin\beta \sin 2(\omega t + \theta_0)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$\begin{aligned} P_{av} &= \langle \dot{x}F(t) \rangle \\ &= \frac{\omega F_0^2}{m} \frac{\cos\beta \langle \cos^2(\omega t + \theta_0) \rangle}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} - \frac{\omega F_0^2}{2m} \frac{\sin\beta \langle \sin 2(\omega t + \theta_0) \rangle}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \end{aligned}$$

$$\langle \cos^2(\omega t + \theta_0) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \theta_0) dt$$

$$\langle \cos^2(\omega t + \theta_0) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2(\omega t + \theta_0)}{2} dt$$

$$\langle \cos^2(\omega t + \theta_0) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos 2(\omega t + \theta_0) dt$$

$$\langle \cos^2(\omega t + \theta_0) \rangle = \frac{1}{T} \frac{1}{2} T + \frac{1}{2T} \frac{1}{2\omega} [\sin 2(\omega T + \theta_0) - \sin 2\theta_0]$$

$$\langle \cos^2(\omega t + \theta_0) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega T} \left[\sin \left(2 \times \frac{2\pi}{T} T + 2\theta_0 \right) - \sin 2\theta_0 \right]$$

$$\langle \cos^2(\omega t + \theta_0) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega T} [\sin(4\pi + 2\theta_0) - \sin 2\theta_0]$$

$$\langle \cos^2(\omega t + \theta_0) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega T} [\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_0]$$

$$\langle \cos^2(\omega t + \theta_0) \rangle = \frac{1}{2}$$

به همین ترتیب می
توان نشان داد که:

$$\langle \sin 2(\omega t + \theta_0) \rangle = 0$$

$$\langle \dot{x}F(t) \rangle = \frac{\omega F_0^2}{m} \frac{\cos\beta \langle \cos^2(\omega t + \theta_0) \rangle}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} + \frac{\omega F_0^2}{2m} \frac{\sin\beta \langle \sin 2(\omega t + \theta_0) \rangle}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$P_{av} = \langle \dot{x}F(t) \rangle = \frac{\cos\beta F_0^2}{2m} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$\dot{x} = \frac{\omega F_0}{m} \frac{\cos(\omega t + \theta_0 + \beta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} = \dot{x}_m \cos(\omega t + \theta_0 + \beta)$$

$$\dot{x}_m = \frac{\omega F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} F_0 \dot{x}_m \cos\beta$$

$$P_{av} = \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

(6) در حالت پاینده میزان متوسط توان داده شده به نوسانگر:

$$P_{av} = \langle \dot{x}F(t) \rangle = \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

برابر است با توان متوسط تلف شده از راه اصطحکاک است، زیرا:

$$\begin{aligned} P_{av} &= \langle b\dot{x}^2 \rangle = \langle 2m\gamma\dot{x}^2 \rangle = 2m\gamma\langle \dot{x}^2 \rangle = 2m\gamma\dot{x}_m^2 \langle \cos^2(\omega t + \theta_0 + \beta) \rangle \\ &= 2m\gamma\dot{x}_m^2 \frac{1}{2} = m\gamma\dot{x}_m^2 \end{aligned}$$

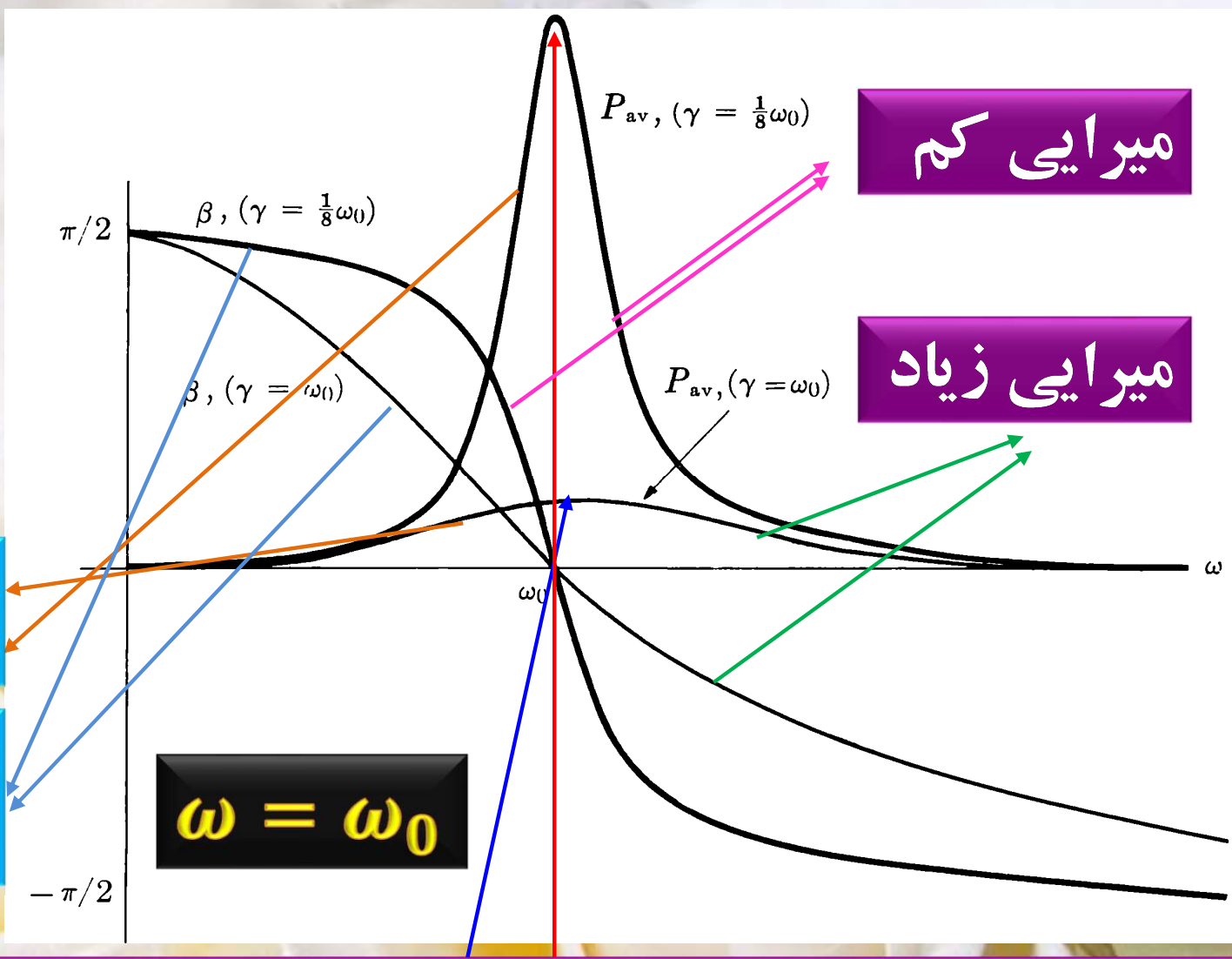
$$= \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

$$\dot{x}_m = \frac{\omega F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$



$$P_{av} = \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} \right)$$



میرایی کم

میرایی زیاد

(7) توان متوسط در حالت تشدید بیشینه می شود

(8) اگر ضریب میرایی نسبت به فرکانس طبیعی خیلی کوچکتر باشد، توان متوسط فقط در نزدیکی فرکانس طبیعی بزرگ است

$$\gamma \ll \omega_0$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0\Delta\omega$$

$$P_{av} = \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

$$P_{av} \approx \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma \omega^2}{(2\omega_0\Delta\omega)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

$$\omega^2 \approx \omega_0^2$$

$$P_{av} \approx \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma \omega_0^2}{4\omega_0^2(\Delta\omega)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2} \approx \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma \omega_0^2}{4\omega_0^2[(\Delta\omega)^2 + \gamma^2]}$$

$$P_{av} \approx \frac{F_0^2}{4m} \frac{\gamma}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}$$

این فرمول فقط در نزدیکی فرکانس
طبیعی صادق است

$$\cos\beta = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \approx \frac{\gamma}{\sqrt{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}}$$

$$\sin\beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \approx \frac{-\Delta\omega}{\sqrt{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \approx 0$$

$$\sin\beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \approx 1$$

$$x = \frac{F_0}{m} \frac{\sin(\omega t + \theta_0 + \beta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \approx \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \theta_0) = \frac{F(t)}{m\omega_0^2}$$

$$F(t) = m\omega_0^2 x = kx$$

به طور مشابه در
نزدیکی فرکانس
تشدید داریم که:

آنگاه

$$\omega \ll \omega_0$$

(9) اگر

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

پس اکنون حرکت فقط به
جرم ذره و فرکانس نیروی
وارد بستگی دارد و از
اصطحاک و نیروی
بازگرداننده مستقل است

$$\cos\beta = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \approx 0$$

$$\sin\beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \approx -1$$

$$x = \frac{F_0}{m} \frac{\sin(\omega t + \theta_0 + \beta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \approx -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta_0) = -\frac{F(t)}{m\omega^2}$$

$$F(t) = -m\omega^2 x$$

آنگاه

$$\omega_0 \ll \omega$$

(10) اگر

$$\beta = -\frac{\pi}{2}$$

پس اکنون حرکت فقط به جرم ذره و فرکانس نیروی وارد بستگی دارد و از اصطحاک و نیروی بازگرداننده مستقل است