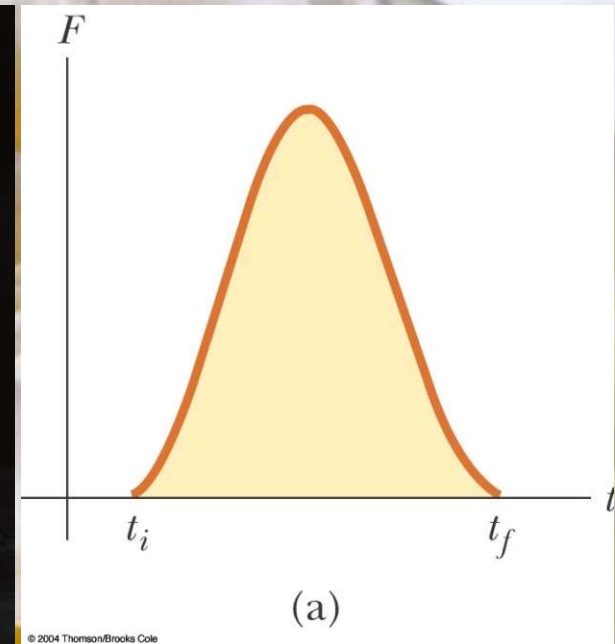


نیروهای ضربه ای وارد بر نوسانگرها

$$\Delta p = \int F(t) dt$$



فرضیات:

$$\delta t \ll 1$$

زمان اعمال ضربه خیلی کوتاه باشد

فاصله طی شده در طی زمان کوتاه اعمال ضربه قابل اغماض باشد

$$x = A'e^{-\gamma t} \cos(\theta + \omega_1 t)$$

میرایی کمتر از میرایی بحرانی باشد

$$x(t = t_0) = 0$$

نوسانگر در ابتدا در مبدا باشد

$$x(t = t_0) = A'e^{-\gamma t_0} \cos(\theta + \omega_1 t_0) = 0$$

$$\cos(\theta + \omega_1 t_0) = 0 = \cos(\pi/2)$$

$$\theta + \omega_1 t_0 = \pi/2$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \omega_1 t_0$$

$$x(t) = A'e^{-\gamma t} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t_0 + \omega_1 t\right)$$

$$x(t) = A'e^{-\gamma t} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega_1(t - t_0)\right)$$

$$x(t) = -A'e^{-\gamma t} \sin(\omega_1(t - t_0))$$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega_1(t - t_0))$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1(t - t_0))$$

$$\dot{x}(t_0) = v_0 = A\omega_1 e^{-\gamma t_0}$$

از جمله دوم مشتق به
دلیل میرایی کم صرف
نظر شده است

$$\frac{v_0}{\omega_1} e^{\gamma t_0} = \frac{p_0}{m\omega_1} e^{\gamma t_0} = A$$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega_1(t - t_0)) = \frac{p_0}{m\omega_1} e^{\gamma t_0} e^{-\gamma t} \sin(\omega_1(t - t_0))$$

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0 \\ \frac{p_0}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin[\omega_1(t - t_0)], & t > t_0 \end{cases}$$

$$p_0 = mv_0 = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} F(t) dt$$

اندازه حرکت پس از اعمال نیرو
(اندازه حرکت قبل از اعمال نیرو صفر
در نظر گرفته شده است)

پس مکان جسم ضربه خورده (با فرضیات ذکر شده) به مقدار کل ضربه
وارد شده پس از اعمال نیرو p_0 بستگی دارد و از شکل خاص تابع
 $F(t)$ مستقل است، مشروط بر آن که $F(t)$ فقط در زمان کوتاه وارد
شدن مقدار داشته و قبل و بعد از آن قابل اغماض باشد

چند نیرو که دارای چنین خاصیتی هستند:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \frac{p_0}{\delta t}, & t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t \\ 0, & t > t_0 + \delta t \end{cases}$$

تابع دلتای دیراک

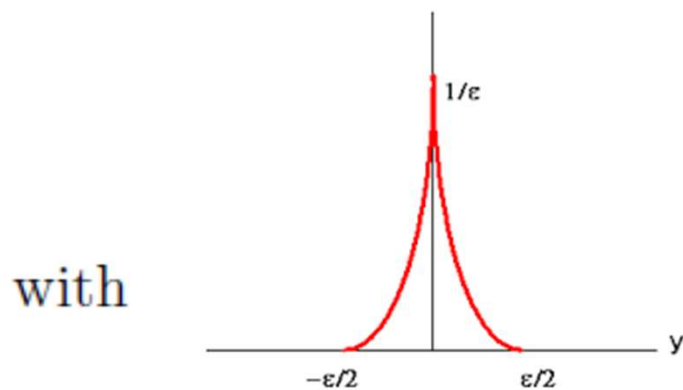
$$F(t) = \frac{p_0 \delta t}{\pi} \frac{1}{(t - t_0)^2 + (\delta t)^2}$$

تابع لورنتسی

$$F(t) = \frac{p_0}{\delta t \sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(t - t_0)^2}{(\delta t)^2} \right]$$

تابع گوسی

Dirac's delta function is defined by the following property



$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\delta(x - c) \quad (1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta(t) = 1$$

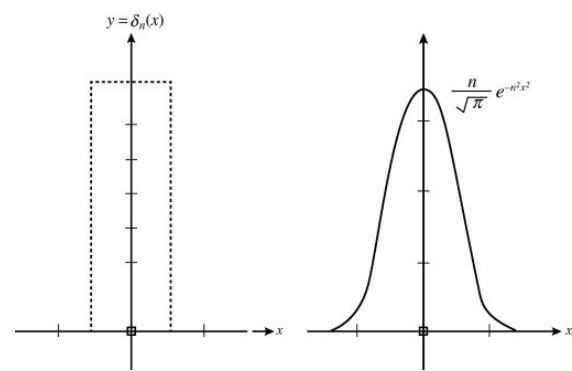


if $0 \in [t_1, t_2]$ (and zero otherwise). It is “infinitely peaked” at $t = 0$ with the total area of unity. You can view this function as a limit of Gaussian

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-t^2/2\sigma^2} \quad (3)$$

or a Lorentzian

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} \quad (4)$$



The important property of the delta function is the following relation

$$\int dt f(t) \delta(t) = f(0) \quad (5)$$

اصل ترکیب - نوسانگر هارمونیک با نیروی وارد دلخواه

Theorem 4. Let the (finite or infinite*) set of functions $x_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, be solutions of the equations

$$m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n = F_n(t), \quad (2.194)$$

and let

$$F(t) = \sum_n F_n(t). \quad (2.195)$$

Then the function

$$x(t) = \sum_n x_n(t) \quad (2.196)$$

satisfies the equation

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t). \quad (2.197)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= m \sum_n \ddot{x}_n + b \sum_n \dot{x}_n + k \sum_n x_n \\ &= \sum_n (m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n) \\ &= \sum_n F_n(t) \\ &= F(t). \end{aligned}$$

اثبات قضیه:

مثال

$$F(t) = \sum_n C_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

طبق قضیه برهم‌نهی، یک جواب خاص معادله دیفرانسیل خطی زیر:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = \sum_n \frac{C_n}{m} \frac{\sin(\omega_n t + \theta_n + \beta_n)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}}$$

$$\beta_n = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0^2 - \omega_n^2}{2\gamma \omega_n} \right)$$

در این صورت جواب عام عبارت است از:

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\theta + \omega_1 t) + \sum_n \frac{C_n}{m} \frac{\sin(\omega_n t + \theta_n + \beta_n)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}}$$

با معرفی پارامترهای زیر می توان معادله را به شکل ساده تری هم نوشت:

$$A_n = C_n \cos \theta_n$$

$$B_n = -C_n \sin \theta_n$$

$$F(t) = \sum_n A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_n C_n \cos(\omega_n t + \theta_n) \\ &= \sum_n C_n \cos \theta_n \cos \omega_n t - C_n \sin \theta_n \sin \omega_n t \\ &= \sum_n A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \end{aligned}$$

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\theta + \omega_1 t) + \sum_n \frac{A_n \sin(\omega_n t + \beta_n) - B_n \cos(\omega_n t + \beta_n)}{m \sqrt{(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}}$$

چرا حل کردن معادله نوسانگر هماهنگ واداشته تحت یک نیروی نوسانی مهم است؟

به دلیل قضیه برهمه‌نی و این که هر تابع متناوب را می توان بسط فوریه داد بنابراین طیف وسیعی از مسایل را می توان به صورت زیر با استفاده از آن حل کرد:

قضیه سری فوریه: هر گاه تابع $F(t)$ پیوسته (یا حتی تکه تکه پیوسته) و متناوب باشد، همواره می توان آن را به صورت زیر بر حسب توابع سینوسی بسط فوریه داد:

$$F(t + T) = F(t)$$

$$F(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right]$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

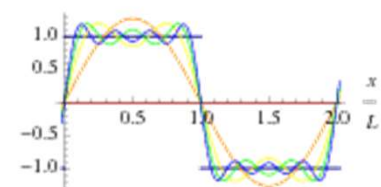
که در آن

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

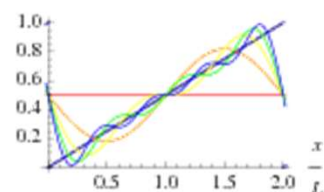
$$n = 1, 2, 3, \dots$$

تمرین: از تعامد توابع سینوسی و کسینوسی استفاده کرده و ضرایب فوق را به دست آورید

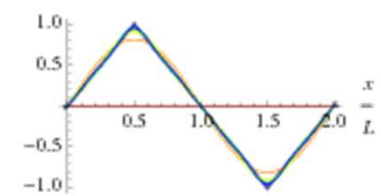
square wave



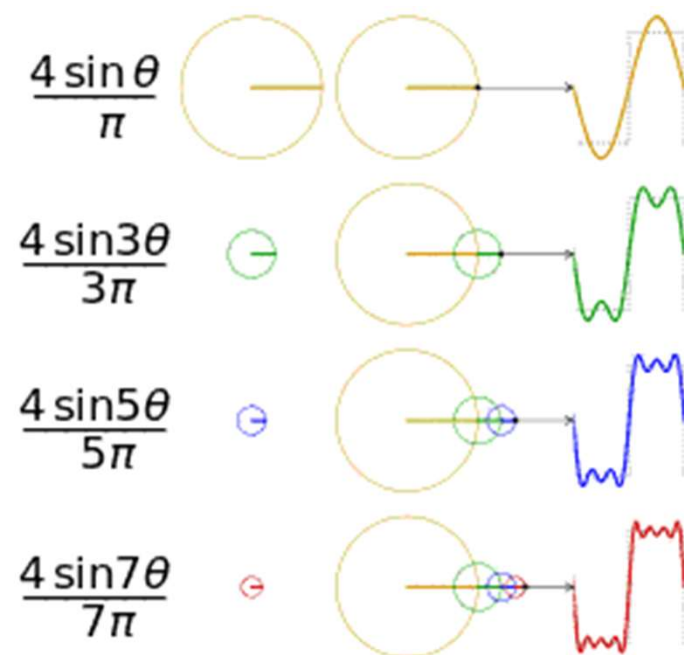
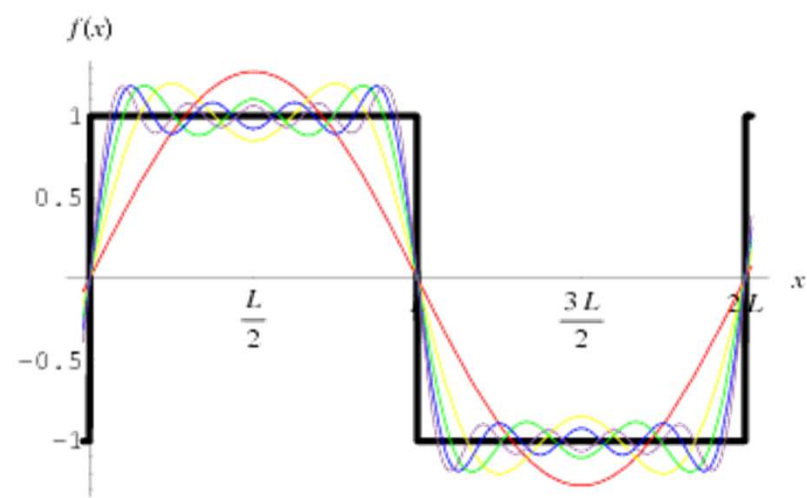
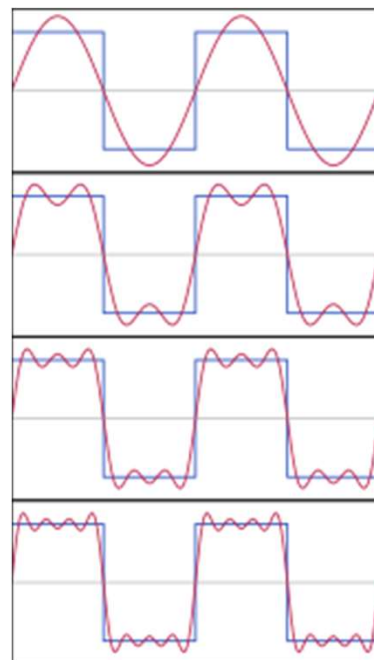
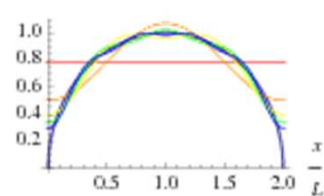
sawtooth wave



triangle wave



semicircle



$$\frac{2 \sin \theta}{-\pi}$$



$$\frac{2 \sin 2\theta}{2\pi}$$



$$\frac{2 \sin 3\theta}{-3\pi}$$



$$\frac{2 \sin 4\theta}{4\pi}$$



$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx) dx$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(nx) dx$$

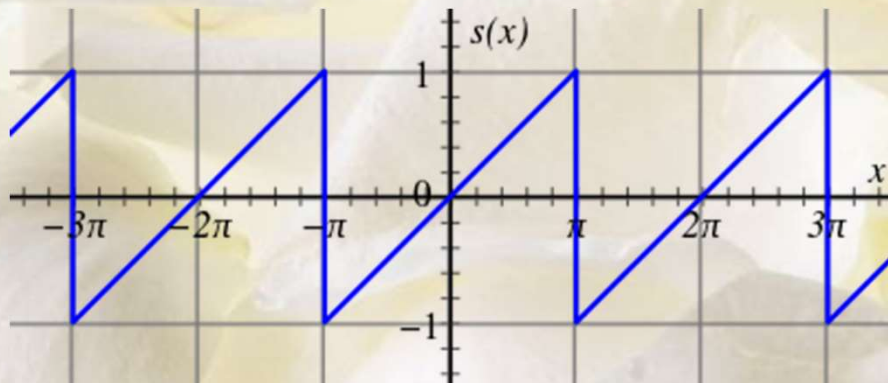
$$n = 1, 2, 3, \dots$$

تمرین: نشان دهید که این روابط با روابط موجود در قضیه فوریه هم ارزند

تابع زیر را بسط فوریه دهید و رسم کنید

مثال:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & -\pi < x < \pi \\ F(x + 2k\pi) & -\infty < x < \infty, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx) dx$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\pi} \cos(nx) dx = 0$$

$$n > 0$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{2}{\pi n} \cos(\pi n) + \frac{2}{\pi^2 n^2} \sin(\pi n)$$

$$B_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

$$n \geq 0$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$



قضیه انتگرال فوریه شکل تعمیم یافته قضیه سری فوریه است که بر توابع غیر متناوب (اما هنوز پیوسته یا حداقل تکه تکه پیوسته) نیز قابل اعمال است.

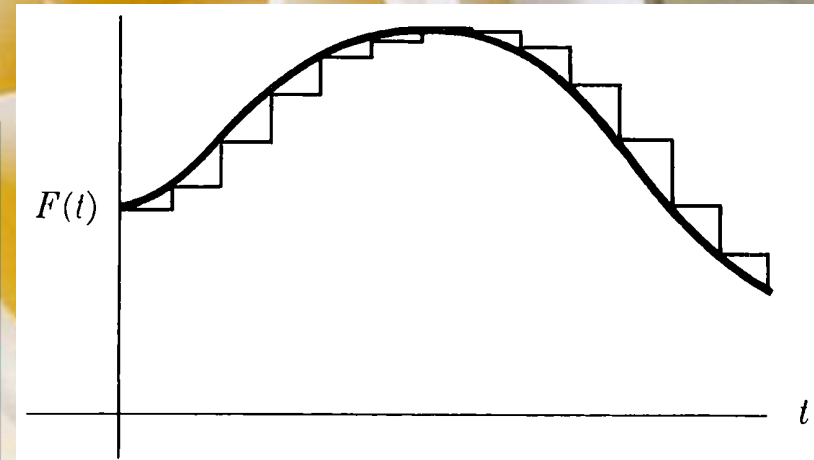
علاوه بر روش فوریه روش تابع گرین نیز قابل استفاده است

روش تابع گرین مبتنی بر توابع ضربه ای است حال آن که روش فوریه مبتنی بر توابع متناوب پیوسته است

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n(t)$$

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & t < t_n \\ F(t_n), & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ 0, & t > t_{n+1} \end{cases}$$

$$t_n = n\delta t$$



طبق قضیه برهم‌نهی، یک جواب خاص معادله دیفرانسیل خطی زیر:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

را می‌توان به صورت زیر برای میرایی کمتر از میرایی بحرانی نوشت:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_n \\ \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t_n)}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin[\omega_1(t-t_0)], & t_n \leq t \leq t_{n+1} \end{cases}$$

بنابراین تابع گرین مساله به شکل زیر است

$$G(t, t') = \begin{cases} 0, & t' > t \\ \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{m\omega_1} \sin[\omega_1(t-t')], & t' \leq t \end{cases}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') F(t') dt'$$

تابع گرین به عنوان هسته انتگرال به شکل زیر به کار می‌رود

Green's Functions Method

$$L(x)u(x) = f(x)$$

$$u(x) = L^{-1}(x)f(x)$$

$$LL^{-1} = L^{-1}L = 1$$

we define the inverse operator as

$$L^{-1}f = \int dx' G(x; x') f(x')$$

where the kernel $G(x; x')$ is the *Green's Function* associated with the differential operator L

Note that $G(x; x')$ is a two-point function which depends on x and x'

The Green's function $G(x; x')$ then satisfies

$$L(x)G(x; x') = \delta(x - x')$$

The solution can then be written in terms of the Green's function as

$$u(x) = \int dx' G(x; x') f(x')$$

$$\begin{aligned} Lu(x) &= L \int dx' G(x; x') f(x') \\ &= \int dx' LG(x; x') f(x') \\ &= \int dx' \delta(x - x') f(x') \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Green's Function for Laplace's Equation

$$L(x)u(x) = f(x)$$

$$L(x)G(x; x') = \delta(x - x')$$

$$u(x) = \int dx' G(x; x') f(x')$$

$$\int_V \nabla \cdot \hat{A} dV = \int_S \hat{A} \cdot d\hat{\sigma}.$$

$$A = \phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi$$

$$\nabla \cdot \hat{A} = \nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \phi \nabla^2 \psi - (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) - \psi \nabla^2 \phi = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi.$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\hat{\sigma}.$$

$$LG(x, x') = \nabla^2 G(x, x') = \delta(x - x').$$

$$\nabla^2 \Phi(x) = \rho(x) \quad \Phi(x) \longrightarrow \Phi(x) \quad \psi \longrightarrow G(x; x') \Rightarrow \quad \nabla^2 \psi = \delta(x - x')$$

$$\int_V \phi(x') \delta(x - x') - G(x, x') \nabla^2 \phi(x') d^3 x' = \int_S [\phi(x') \nabla' G(x, x') - G(x, x') \nabla' \phi(x')] \cdot d\hat{\sigma}'$$

$$\phi(x) = \int_V G(x, x') \rho(x') d^3 x' + \int_S [\phi(x') \nabla' G(x, x') - G(x, x') \nabla' \phi(x')] \cdot d\hat{\sigma}'.$$

$$\Phi(x) = \int dx' G(x; x') \rho(x')$$

$$G(x; x') = \frac{1}{|x - x'|}$$

$$\Phi(x) = \int \frac{\rho(x') dx'}{|x - x'|}$$