

نیروی مرکزی متناسب با عکس مربع فاصله

نیروی مرکزی متناسب با عکس مجذور فاصله در فیزیک از اهمیت بسزایی برخوردار است

$$\vec{F} = \hat{r} \frac{K}{r^2}$$

$$'V'(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \frac{K}{r^2} dr = \frac{K}{r}$$

$$'V'(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$K = -Gm_1m_2 < 0$$

$$G = 6.67 \times \frac{10^{-8} \text{ dyne.cm}^2}{\text{gr}^2}$$

$$K = q_1q_2 < 0 \text{ or } > 0$$

برای یک نیروی دافع $K > 0$ هیچگونه حرکت تناوبی در امتداد r وجود ندارد

و فقط انرژیهای کل مثبت E امکان پذیر است

و ذره از $r = \infty$ به یک نقطه برگشت می آید و دوباره به سمت بینهایت می رود

$$V'(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$K > 0$

$K > 0$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V'(r) = E > 0$$

$K = 0$

$E > 0$

r_0

r'_T

r_T

$K < 0, L \neq 0$

$$-\frac{1}{2}(K^2m/L^2)$$

برای یک اندازه حرکت داده شده، نقطه برگشت $K > 0$ از نقطه برگشت K بزرگتر است

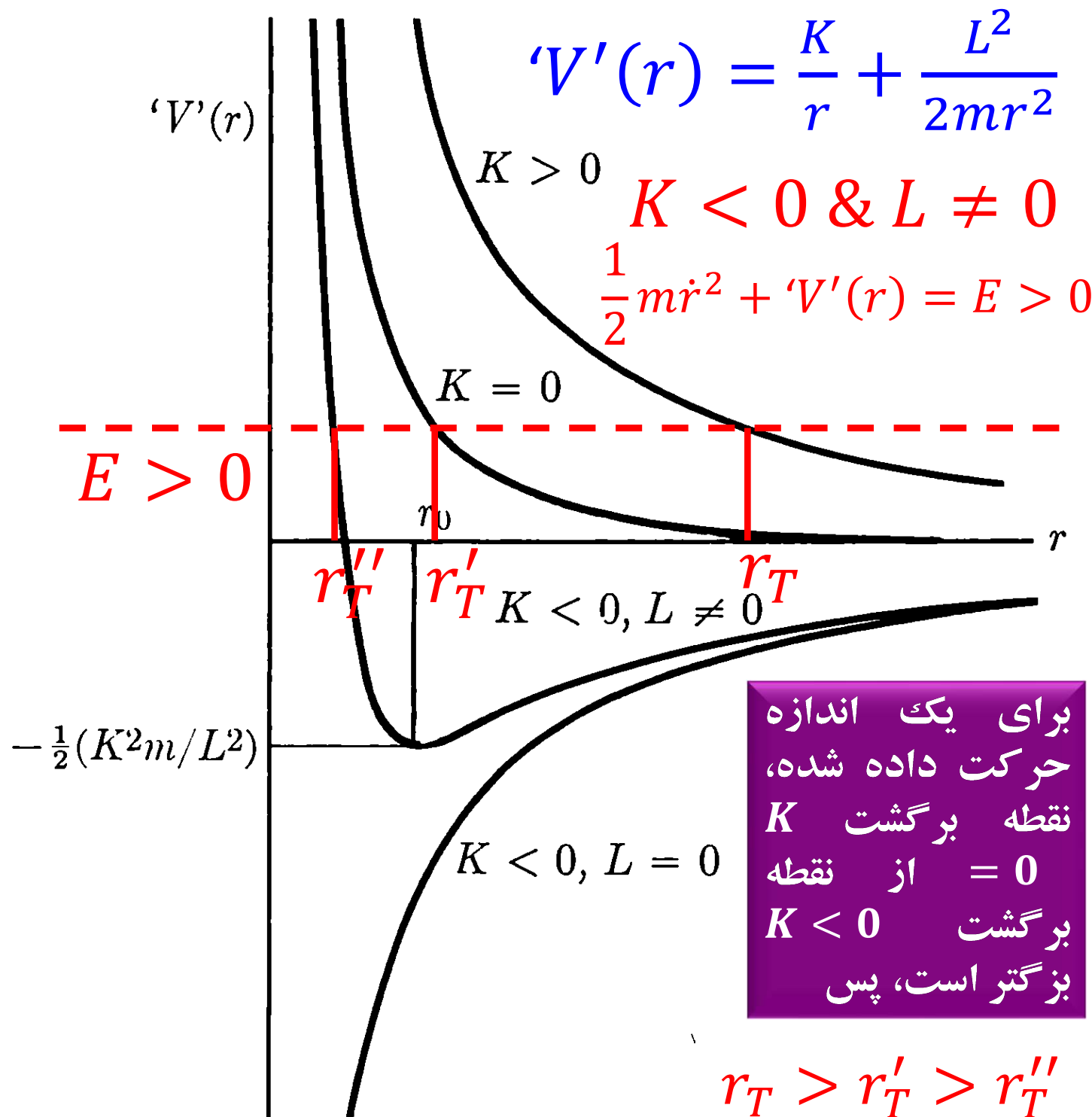
$$r_T > r'_T$$

$K < 0, L = 0$

$$0 + V'(r_T) = E$$

$$E = \frac{K}{r_T} + \frac{L^2}{2mr_T^2}$$

در نقطه برگشت $\dot{r}$ صفر است

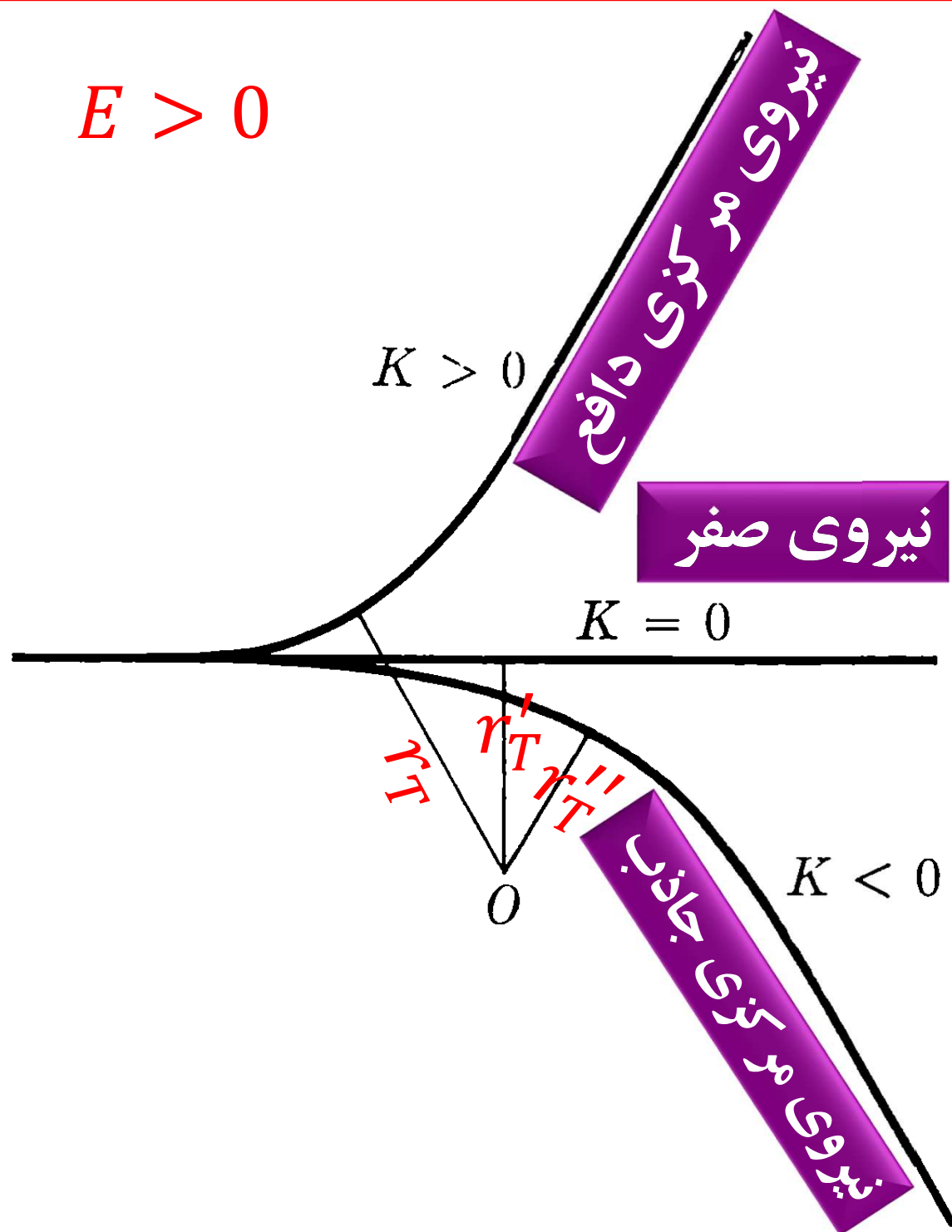


برای یک نیروی
جاذب $K < 0$ و
 $L \neq 0$ اگر E
 > 0 باز هیچگونه
حرکت تناوبی در
امتداد r وجود
ندارد

و ذره از $r = \infty$
به یک نقطه
برگشت می آید و
دوباره به سمت
بینهایت می رود

برای یک اندازه
حرکت داده شده،
نقطه برگشت K
 $= 0$ از نقطه
برگشت $K < 0$
بزرگتر است، پس

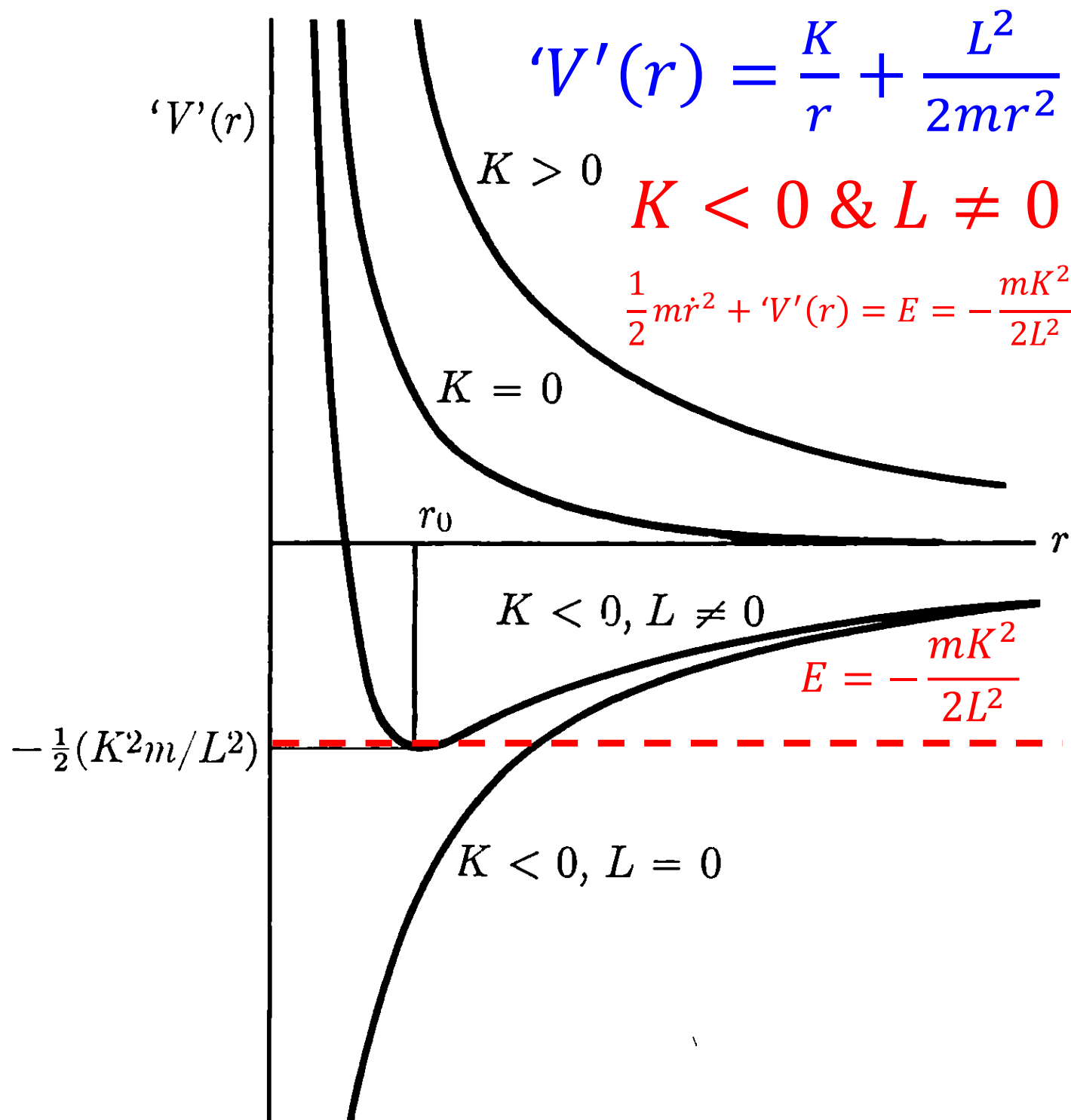
$$E > 0$$



با توجه به رابطه بین
بزرگی های نقاط
برگشت حالت های نیروی
دافع $K > 0$ ، نیروی
صفر $K = 0$ و نیروی
جاذب $K < 0$

$$r_T > r'_T > r''_T$$

مسیرهای حرکت هر
یک از حالات فوق می
تواند به این شکل باشد:



$$\left. \frac{dV'(r)}{dr} \right|_{r_0} = \frac{-K}{r_0^2} - \frac{L^2}{mr_0^3} = 0$$

$$-K - \frac{L^2}{mr_0} = 0$$

$$r_0 = -\frac{L^2}{mK}$$

$$V'(r_0) = -\frac{mK^2}{L^2} + \frac{L^2m^2K^2}{2mL^4}$$

$$V'(r_0) = -\frac{mK^2}{L^2} + \frac{mK^2}{2L^2}$$

$$V'(r_0) = -\frac{mK^2}{2L^2}$$

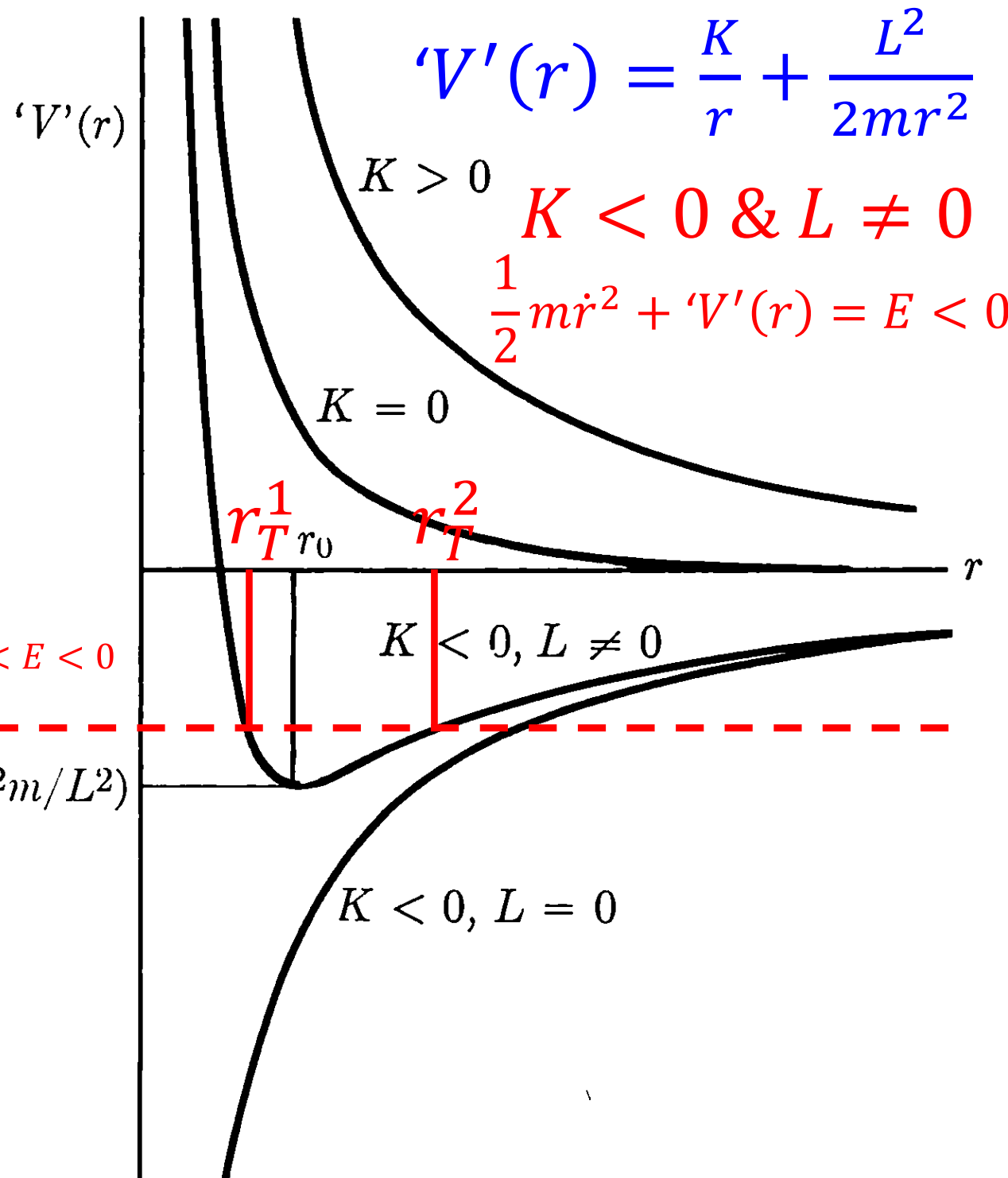
ذره در دایره ای به شعاع $r_0 = -\frac{L^2}{mK}$ حول مرکز نیرو می چرخد

اگر

$$-\frac{mK^2}{2L^2} < E < 0$$

ذره دارای 2 نقطه
برگشت است

ذره بین این 2
نقطه
برگشت
نوسان می کند



زمان تناوب نوسانهای کوچک r برابر زمان تناوب چرخش است

ابتدا زمان تناوب نوسانهای کوچک r را به دست می آوریم:

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2 V'(r)}{dr^2} \right)_{r_0}$$

$$V'(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\frac{dV'(r)}{dr} = \frac{-K}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3}$$

$$r_0 = -\frac{L^2}{mK}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(-\frac{2K}{r_0^3} + \frac{3L^2}{mr_0^4} \right)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(-\frac{2K^4 m^3}{L^6} + \frac{3L^2 K^4 m^4}{mL^8} \right)$$

$$\omega^2 = -\frac{2K^4 m^2}{L^6} + \frac{3K^4 m^2}{L^6} = \frac{K^4 m^2}{L^6}$$

$$\omega = \frac{K^2 m}{L^3}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{L^3}{K^2 m}$$

حال زمان تناوب چرخش یا حرکت مداری را به دست می آوریم:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$r_0 = -\frac{L^2}{mK}$$

$$\dot{\theta} = \frac{Lm^2K^2}{mL^4}$$

$$\dot{\theta} = \frac{mK^2}{L^3}$$

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi \frac{L^3}{K^2m}$$

که همان زمان تناوب حرکت شعاعی است

برای انرژیهای نزدیک $-\frac{mK^2}{2L^2}$ مدار منحنی بسته ای است، که مبدا آن اندکی از مرکز منحرف شده است

به طور کلی نشان خواهیم داد که اگر $L \neq 0$ باشد، مدار به ازای تمام مقادیر منفی E بیضی است

اگر $L = 0$ باشد، مساله به حرکت جسم افتان در فضای یک بعدی تبدیل می شود

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) - u$$

$$F = \frac{K}{r^2}$$

$$u = \frac{1}{r}$$

$$F = Ku^2$$

حال نشان می دهیم که مساله نیروی مرکزی متناسب با عکس مجذور فاصله با مساله یک نوسانگر هماهنگ (غیر میرا) واداشته (تحت نیرو) هم ارز است:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{m}{L^2 u^2} Ku^2 - u$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{m}{L^2} K - u$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} K$$

که معادله نوسانگر هماهنگ با فرکانس واحد است که تحت نیروی ثابتی قرار گرفته باشد:

معادله همگن:

با این تفاوت که در اینجا θ نقش t را بازی می کند

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 0$$

$$u = A \cos(\theta - \theta_0)$$

جواب معادله همگن:

$$u = -mK/L^2$$

جواب خاص بدیهی معادله غیر همگن:

جواب عام:

$$u = \frac{1}{r} = A \cos(\theta - \theta_0) - \frac{mK}{L^2}$$

ثابت دلخواه θ_0 طرز قرار گرفتن مدار در صفحه را مشخص می کند

ثابت A که ممکن است مثبت اختیار شود نقاط برگشت حرکت r را به صورت زیر مشخص می کند:

$$\frac{1}{r_1} = A - \frac{mK}{L^2}$$

ممکن نیست

$$\frac{1}{r_2} = -A - \frac{mK}{L^2}$$

حالت

$$A < -\frac{mK}{L^2}$$

زیرا r نمی تواند برای تمام مقادیر θ مثبت باشد

که معادله یک مقطع مخروطی (بیضی، سهمی، هذلولی) با کانون $r = 0$ است.

اگر

$$A > -\frac{mK}{L^2}$$

چنان که به ضرورت برای $K > 0$ چنین است، آنگاه فقط یک نقطه برگشت r_1 می تواند وجود داشته باشد، زیرا r نمی تواند منفی باشد

برای تعیین نقاط برگشت توجه می کنیم که سرعت در این نقاط باید برابر صفر باشد:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + 'V'(r) = E$$

$$0 + 'V'(r) = E$$

$$'V'(r) = E$$

$$'V'(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E$$

$$\frac{L^2}{2m} \frac{1}{r^2} + K \frac{1}{r} - E = 0$$

$$\frac{1}{r} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 + \frac{2L^2 E}{m}}}{\frac{L^2}{m}}$$

$$\frac{1}{r} = -\frac{Km}{L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

$$\frac{1}{r} = -\frac{mK}{L^2} \pm A$$

از مقایسه نقاط برگشت به دست آمده در 2
رابطه زیر:

$$\frac{1}{r} = -\frac{Km}{L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

ثابت A به صورت زیر
تعیین می شود:

$$A^2 = \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

معادله زیر معادله یک مقطع
مخروطی در دستگاه قطبی است

پس مدار برحسب شرایط اولیه
به صورت زیر قابل تعیین است

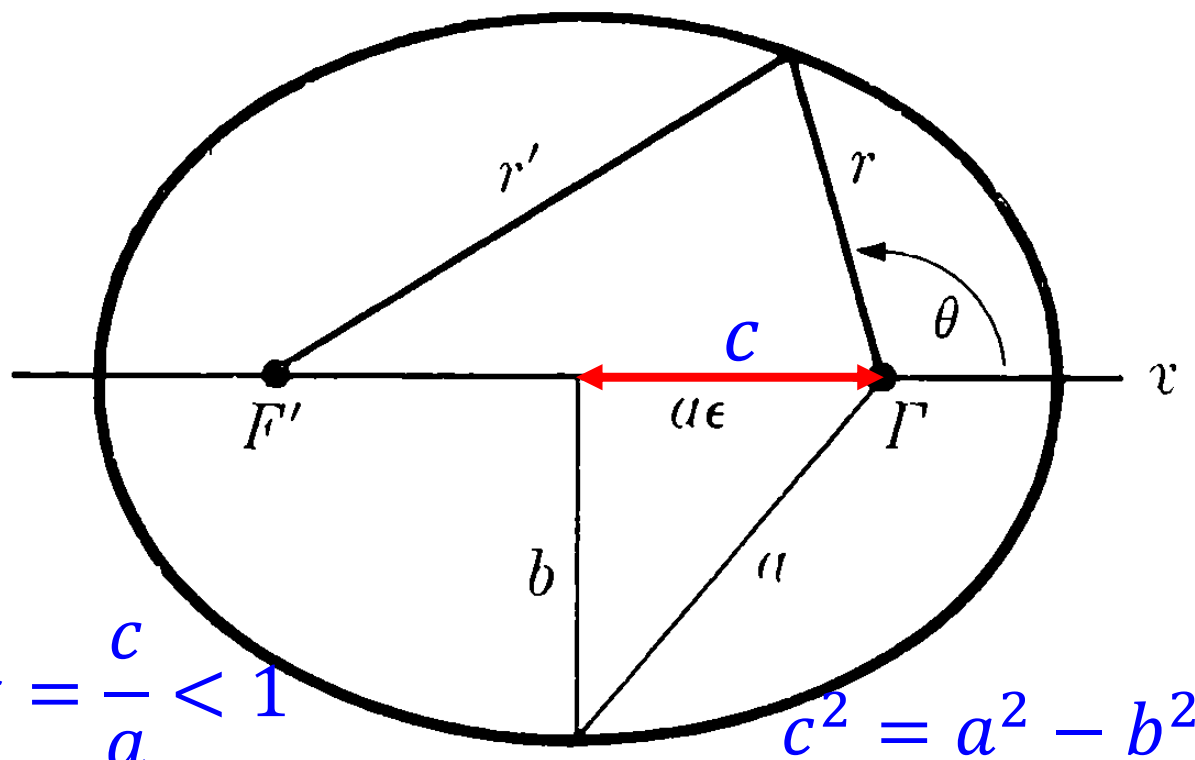
$$u = \frac{1}{r} = -\frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} \cos(\theta - \theta_0)$$

معادله بیضی در دستگاه
مختصات قطبی

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta}$$

مبدأ دستگاه مختصات بر
کانون F بیضی منطبق
شده است

$$\epsilon = \frac{c}{a} < 1$$



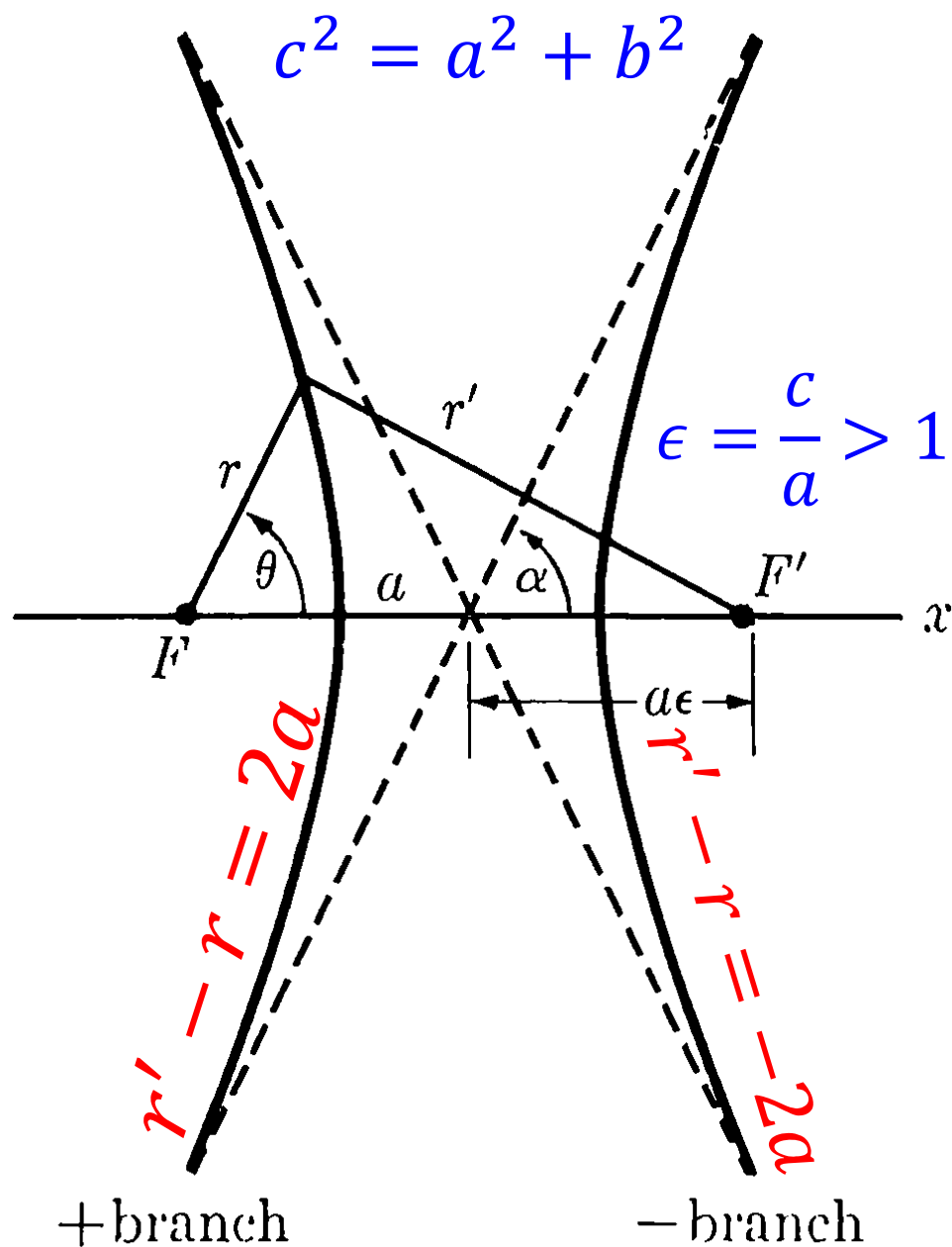
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$r' + r = 2a$$

$$r'^2 = r^2 + 4a^2\epsilon^2 + 4ra\epsilon\cos\theta$$

$$r^2 + 4a^2 - 4ra = r^2 + 4a^2\epsilon^2 + 4ra\epsilon\cos\theta$$

$$4a^2(1 - \epsilon^2) = 4ra(1 + \epsilon\cos\theta)$$



به سادگی و به طور مشابه با معادله قطبی بیضی می توان معادله هذلولی را در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر به دست آورد:

$$r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \epsilon \cos \theta}$$

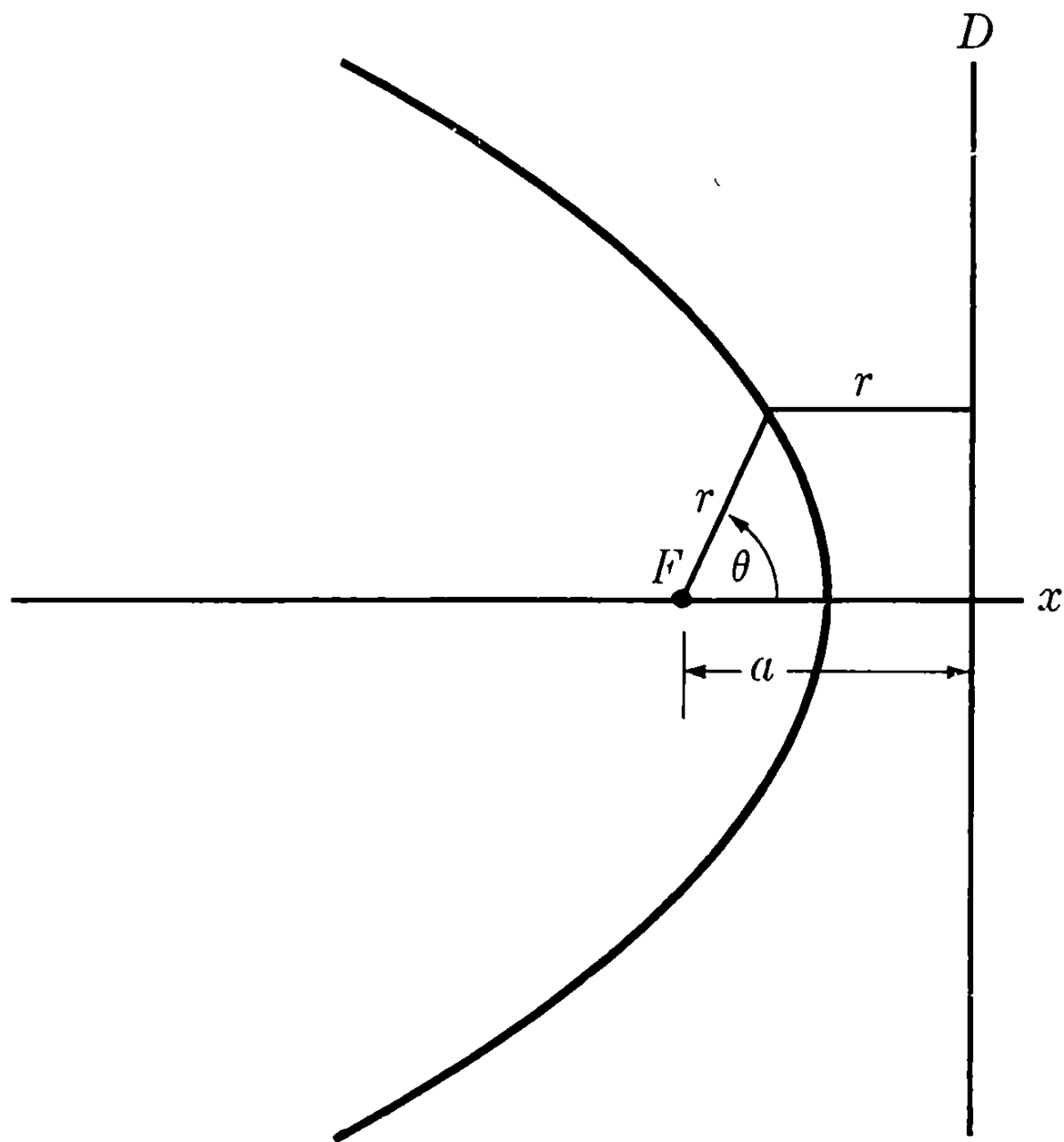
علامت مثبت مربوط به شاخه مثبت و علامت منفی مربوط به شاخه منفی است

معادلات خطوط مجانب:

$$\pm 1 + \epsilon \cos \alpha = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \alpha} r = \lim_{\theta \rightarrow \alpha} \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \epsilon \cos \theta} = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \epsilon \cos \alpha} = \infty$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\epsilon}$$



سهمی مکان هندسی
نقطاتی است که فاصله
آن از یک خط ثابت
(خط هادی) و یک نقطه
ثابت (کانون) در صفحه
مساوی باشد

$$r + r \cos \theta = a$$

$$r(1 + \cos \theta) = a$$

$$r = \frac{a}{1 + \cos \theta}$$

$$\frac{1}{r} = B + A \cos \theta$$

بنابراین در دستگاه مختصات قطبی می توان
هر سه مقطع مخروطی را به شکل زیر نوشت:

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon \cos \theta}$$

در بیضی داریم:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)} + \frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)} \cos \theta$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1+\epsilon \cos \theta}{a(1-\epsilon^2)}$$

پس:

$$B = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)}$$

$$A = \frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}$$

$$\epsilon = \frac{A}{|B|} = \frac{c}{a} < 1$$

$$B > A$$

$$a = \left| \frac{B}{A^2 - B^2} \right|$$

در سهمی داریم:

$$r = \frac{a}{1 + \cos\theta}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \cos\theta}{a}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cos\theta$$

$$B = \frac{1}{a}$$

$$A = \frac{1}{a}$$

$$\epsilon = \frac{A}{|B|} = 1$$

$$A = B$$

در هذلولی داریم:

$$r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \epsilon \cos \theta}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\pm 1 + \epsilon \cos \theta}{a(\epsilon^2 - 1)}$$

$$B = \frac{\pm 1}{a(\epsilon^2 - 1)}$$

$$0 < B < A$$

$$-A < B < 0$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\pm 1}{a(\epsilon^2 - 1)} + \frac{\epsilon}{a(\epsilon^2 - 1)} \cos \theta$$

$$A = \frac{\epsilon}{a(\epsilon^2 - 1)}$$

$$a = \left| \frac{B}{A^2 - B^2} \right|$$

پس:

$$\epsilon = \frac{A}{|B|} = \frac{c}{a} > 1$$

علامت مثبت مربوط به شاخه مثبت، که در این صورت داریم

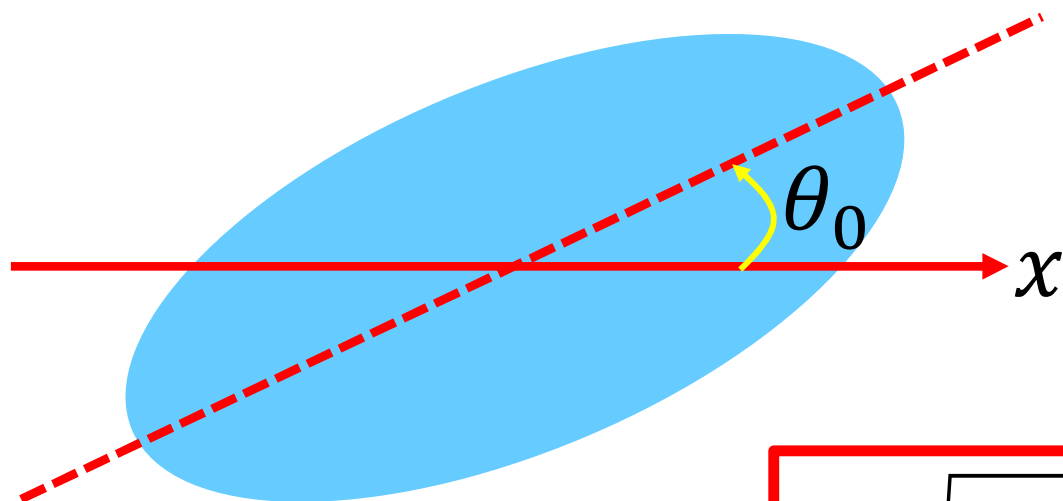
علامت منفی مربوط به شاخه منفی، که در این صورت داریم

حالت $B < -A$ امکان پذیر نیست، چون $r < 0$ به ازای هر θ می شود، که امکان پذیر نیست

$$\frac{1}{r} = B + A \cos(\theta - \theta_0)$$

اگر طرز قرار گرفتن دلخواهی
برای منحنی نسبت به محور x
اختیار کنیم، معادله چنین می شود

که در آن θ_0 زاویه بین محور x -ها و خطی است که از کانون به نقطه حضیض
وصل می شود (و آن نقطه ای است که نزدیکترین فاصله را از مبدا دارد)



معادله مقطع مخروطی
فوق با معادله زیر
همشکل است

که چیزی جز معادله مسیر
یک جسم تحت نیروی
مرکزی متناسب با عکس
مجذور فاصله نیست

$$A = \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} \cos(\theta - \theta_0)$$

$$B = -\frac{mK}{L^2}$$

که در آن:

پس خروج از مرکز مدار به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\epsilon = \frac{A}{|B|}$$

$$B = -\frac{mK}{L^2}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m}}$$

حال با استفاده از خروج از مرکز نوع مدار به صورت زیر تعیین می شود:

الف) نیروی مرکزی جاذب ($K < 0$)

$$1) E < 0 \Rightarrow \epsilon < 1$$

بیضی

$$2) E = 0 \Rightarrow \epsilon = 1$$

سهمی

$$3) E > 0 \Rightarrow \epsilon > 1$$

هذلولی

ب) نیروی مرکزی دافع ($K > 0$)

$$1) E > 0 \Rightarrow \epsilon > 1$$

شاخه منفی
هذلولی

حالت‌های دیگر امکان پذیر نیستند

چون B منفی و در نتیجه r هم منفی می شود که امکان پذیر نیست

این نتایج با
بحث‌های
کیفی قبلی
ما در توافق
است

$$a = \left| \frac{B}{A^2 - B^2} \right|$$

$$B = -\frac{mK}{L^2}$$

$$A^2 = \left(\frac{mK}{L^2} \right)^2 + \frac{2mE}{L^2}$$

$$A^2 - B^2 = \frac{2mE}{L^2}$$

$$a = \left| -\frac{mK}{L^2} \frac{L^2}{2mE} \right| = \left| \frac{K}{2E} \right|$$

نیم محور بزرگتر a در مدارهای بیضی و هذلولی فقط به ثابتهای K و E بستگی دارد و مستقل از ثابتهای ϵ و L است

بنابراین انرژی E هم فقط به نیم محور بزرگتر a و K بستگی دارد و به عکس

$$\frac{1}{r} = -\frac{Km}{L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

$$\frac{L^2}{2m} \frac{1}{r^2} + K \frac{1}{r} - E = 0$$

$$Er^2 - Kr - \frac{L^2}{2m} = 0$$

$$r = \frac{K \pm \sqrt{K^2 + \frac{2L^2 E}{m}}}{2E}$$

$$r = \frac{K}{2E} \pm \sqrt{\left[\frac{K}{2E}\right]^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

قبلا نقاط برگشت را به این صورت به دست آورده بودیم

نشان دهید که عکس نقاط برگشت از رابطه زیر به دست می آیند:

برای اثبات از معادله اصلی شروع می کنیم منتها به جای $\frac{1}{r}$ آن را بر حسب r مرتب می کنیم:

کوچکترین
شعاع بیضی را
به دست آورید:

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta}$$

$$\cos\theta = 1$$

$$r_{min} = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon}$$

$$r_{min} = \frac{a(1-\epsilon)(1+\epsilon)}{1+\epsilon}$$

$$r_{min} = a(1-\epsilon)$$

بزرگترین شعاع
بیضی را به
دست آورید:

$$\cos\theta = -1$$

$$r_{max} = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1-\epsilon}$$

$$r_{max} = \frac{a(1-\epsilon)(1+\epsilon)}{1-\epsilon}$$

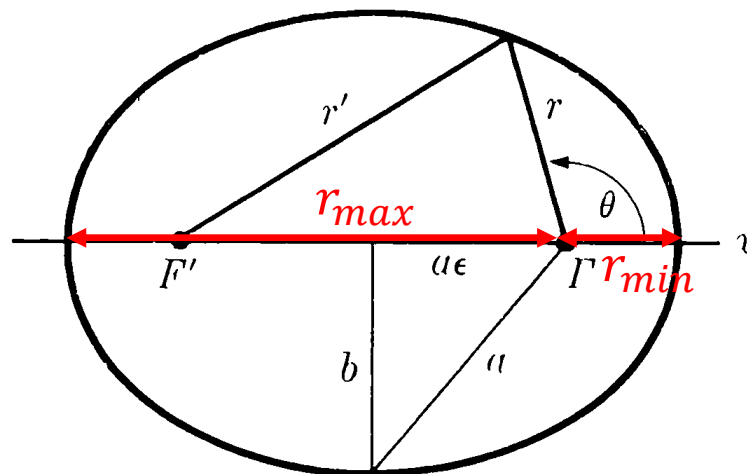
$$r_{max} = a(1+\epsilon)$$

کوچکترین و بزرگترین
شعاع هذلولی را به
دست آورید:

$$r = \frac{a(\epsilon^2-1)}{\pm 1+\epsilon\cos\theta}$$

$$r = \frac{a(\epsilon^2-1)}{\pm 1\pm\epsilon}$$

$$r = a(\epsilon \mp 1)$$



علامت منفی
برای شاخه
مثبت و علامت
مثبت برای
شاخه منفی

با استفاده از نقاط برگشت و بزرگترین و کوچکترین شعاعهای بیضی، a و ϵ را به دست آورید:

$$r = \frac{K}{2E} \pm \sqrt{\left[\frac{K}{2E}\right]^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

$$r_{max} = a(1 + \epsilon)$$

$$r_{min} = a(1 - \epsilon)$$

برای
هذلولی نیز
می توان به
روش مشابه
عمل کرد

$$r = \left| \frac{K}{2E} \right| \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{mK^2}} \right)$$

$$a = \left| \frac{K}{2E} \right|$$

که
نتایج
قبلی
سازگار
است با

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}$$

پس اگر بدانیم که مسیر بیضی یا هذلولی است می توانیم اندازه و شکل آن را به سهولت از روش ساده انرژی با استفاده از معادله زیر به دست آوریم

$$V'(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

در این روش نیازی به به دست آوردن معادله دقیق انرژی نیست