

مدارهای بیضی شکل – مسئله کپلر

کپلر قبل از نیوتن سه قانون زیر را بر اساس رصدهای تیکوبراهه از حرکت سیارات استنتاج کرد:

(1) سیارات در مدارهایی بیضی شکل حرکت می کنند که خورشید بر روی یکی از کانونهای آنها قرار دارد

اکنون می دانیم که این قانون از این حقیقت ناشی می شود که نیرو با عکس مربع فاصله متناسب است

(2) سطح روفته شده به وسیله بردار شعاعی خورشید تا سیارات در زمانهای مساوی، مساوی است

اکنون می دانیم که این قانون ناشی از قانون بقا اندازه حرکت زاویه است که گویای مرکزی بودن نیرو هم هست

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\hat{r}F(r)) = (\vec{r} \times \hat{r})F(r) = 0$$

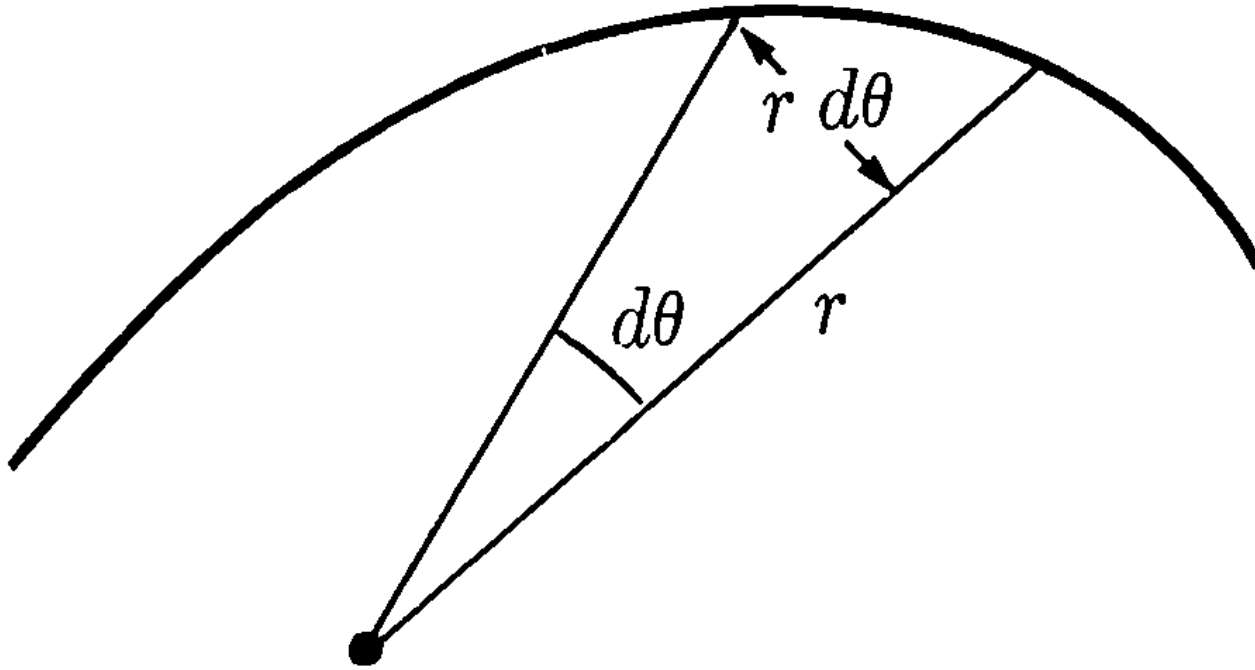
$$\vec{L} = \text{Constant}$$

یادآوری:

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$r \approx \text{const}$$

$$dS \approx \frac{1}{2} r^2 d\theta$$



$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$$

$$dS = \frac{L}{2m} dt$$

$$S = \frac{L}{2m} \tau$$

$$\tau = \frac{2m}{L} S$$

همان طور که ملاحظه می شود زمان تناوب τ به سطح روفته شده S بستگی دارد

3) مربع زمان تناوب چرخش سیارات به دور خورشید با مکعب نصف محور بزرگتر بیضی متناسب است

$$\tau = \frac{2m}{L} S$$

$$\tau = \frac{2m}{L} \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

$$a = \left| \frac{K}{2E} \right|$$

$$S = \pi ab$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}$$

$$\tau^2 = \frac{4m^2}{L^2} \pi^2 a^4 \frac{-L^2}{maK}$$

$$\tau = \frac{2m}{L} \pi ab$$

$$\tau^2 = \frac{-4m}{K} \pi^2 a^3$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{2EL^2}{mK^2} = \epsilon^2 - 1$$

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{MG} a^3$$

$$\epsilon = \frac{c}{a} < 1$$

$$\tau = \frac{2m}{L} \pi a^2 \sqrt{\frac{-2EL^2}{mK^2}}$$

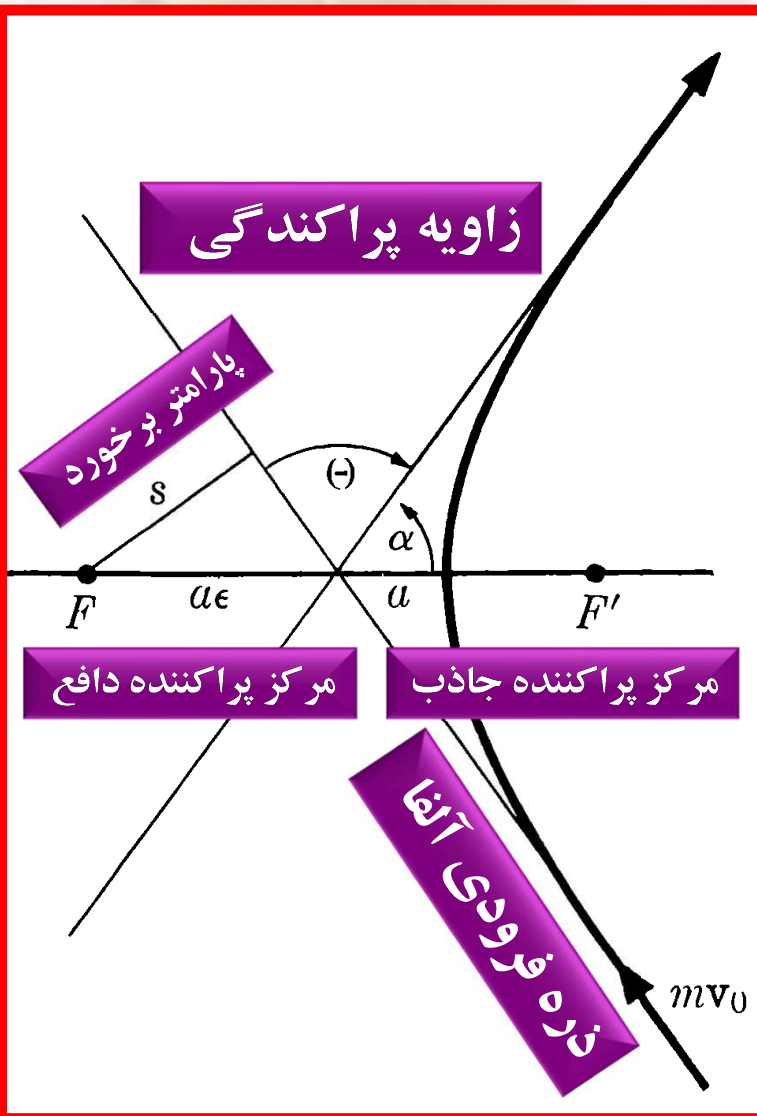
$$b = a \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

از معادله فوق می توان جرم سیاره را با اندازه گیری زمان تناوب و محور بزرگتر مدار سیاره به دست آورد

مدارهای هذلولی - مسئله راتر فورده سطح مقطع پراکندگی

پراکندگی ذرات آلفا پس از برخورد به صفحه نازک طلا

مرکز نیروی دافع در F یا مرکز نیروی جاذب در F'



$$\Theta = \pi - 2\alpha$$

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\epsilon}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^2}$$

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^2}} = (\epsilon^2 - 1)^{-1/2} = \sqrt{\frac{mK^2}{2EL^2}}$$

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$L = m v_0 s$$

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{m K^2}{2 E L^2}} = \frac{|K|}{m s v_0^2} = \frac{|q_1 q_2|}{m s v_0^2}$$

پارامتر برخورد s را نمی توان به طور تجربی اندازه گیری کرد

پس برای مقایسه با تجربه باید پارامتر برخورد s را از معادله فوق حذف کنیم

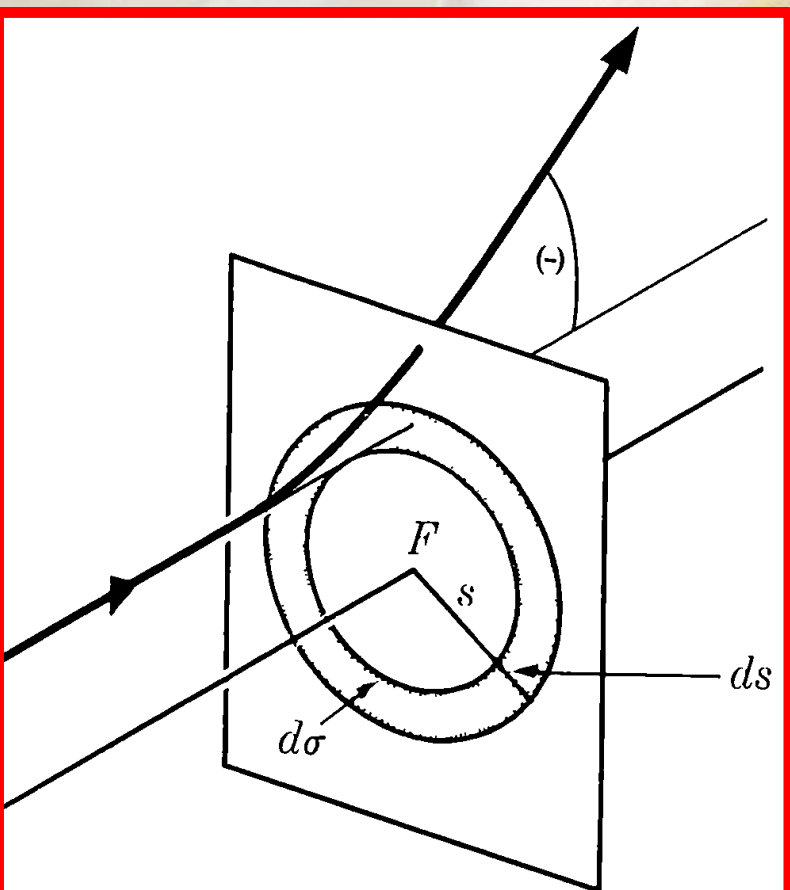
برای این کار سطح مقطع پراکندگی $d\sigma$ تحت زوایای بین Θ و $\Theta + d\Theta$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

dN تعداد ذرات پراکنده شده تحت زاویه ای بین Θ و $\Theta + d\Theta$

N تعداد ذرات تابیده

$$\frac{dN}{N} = n d\sigma$$

n تعداد مراکز پراکندگی



سطح مقطع پراکندگی را می توان سطح مقطع موثری دانست که در اطراف مرکز پراکندگی قرار گرفته است و ذره باید با آن برخورد کند تا تحت زاویه ای بین Θ و $\Theta + d\Theta$ پراکنده شود

$$d\sigma$$

سطح هدف حول هر مرکز پراکندگی

$$n d\sigma$$

سطح کل هدف در واحد سطح صفحه

$$N n d\sigma$$

تعداد متوسط ذراتی که به سطح هدف برخورد می کنند

$$dN$$

تعداد ذرات پراکنده شده تحت زاویه ای بین Θ و $\Theta + d\Theta$

$$dN = N n d\sigma$$

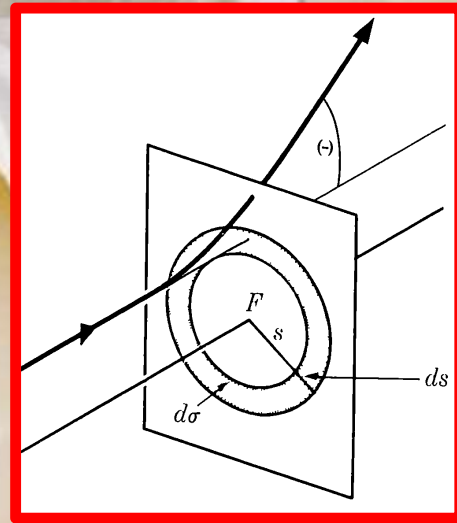
پس:

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{|q_1 q_2|}{msv_0^2}$$

$$\frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \right) d\Theta = - \frac{|q_1 q_2|}{ms^2 v_0^2} ds$$

$$\frac{1}{2\cos^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right)} d\Theta = - \frac{|q_1 q_2|}{ms^2 v_0^2} ds$$

$$d\sigma = \pi(s + ds)^2 - \pi s^2 \cong 2\pi s ds$$



$$2\pi s ds = -2\pi \frac{ms^3 v_0^2}{|q_1 q_2|} \frac{1}{2\cos^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right)} d\Theta$$

$$2\pi s ds = -2\pi \frac{ms^3 v_0^2}{|q_1 q_2|} \frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right)} d\Theta$$

$$s = \frac{|q_1 q_2|}{mv_0^2 \tan \frac{\Theta}{2}}$$

$$2\pi s ds = -2\pi \frac{mv_0^2}{|q_1 q_2|} \left(\frac{|q_1 q_2|}{mv_0^2 \tan \frac{\Theta}{2}} \right)^3 \frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right)} d\Theta$$

$$2\pi s ds = -2\pi \frac{|q_1 q_2|^2}{m^2 v_0^4} \frac{\cos \left(\frac{\Theta}{2} \right)}{2 \sin^3 \left(\frac{\Theta}{2} \right)} d\Theta$$

$$2\pi s ds = -2\pi \frac{|q_1 q_2|^2}{m^2 v_0^4} \frac{\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{2\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)} d\Theta$$

$$2\pi s ds = -2\pi \frac{|q_1 q_2|^2}{m^2 v_0^4} \frac{\sin\Theta}{4\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)} d\Theta$$

$$d\sigma \cong 2\pi s ds = -\left(\frac{q_1 q_2}{2m v_0^2}\right)^2 \frac{2\pi \sin\Theta}{\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)} d\Theta$$

فرمول سطح مقطع پراکندگی راترفورد برای توجیه پراکندگی ذرات آلفا
به وسیله صفحه نازک طلا

راترفورد نشان داد که اگر

$$q_1 = 2e$$

$$q_2 = Ze$$

فرمولش:

$$d\sigma \cong - \left(\frac{q_1 q_2}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin\Theta}{\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)} d\Theta$$

تا زمانی که فاصله حضيض:

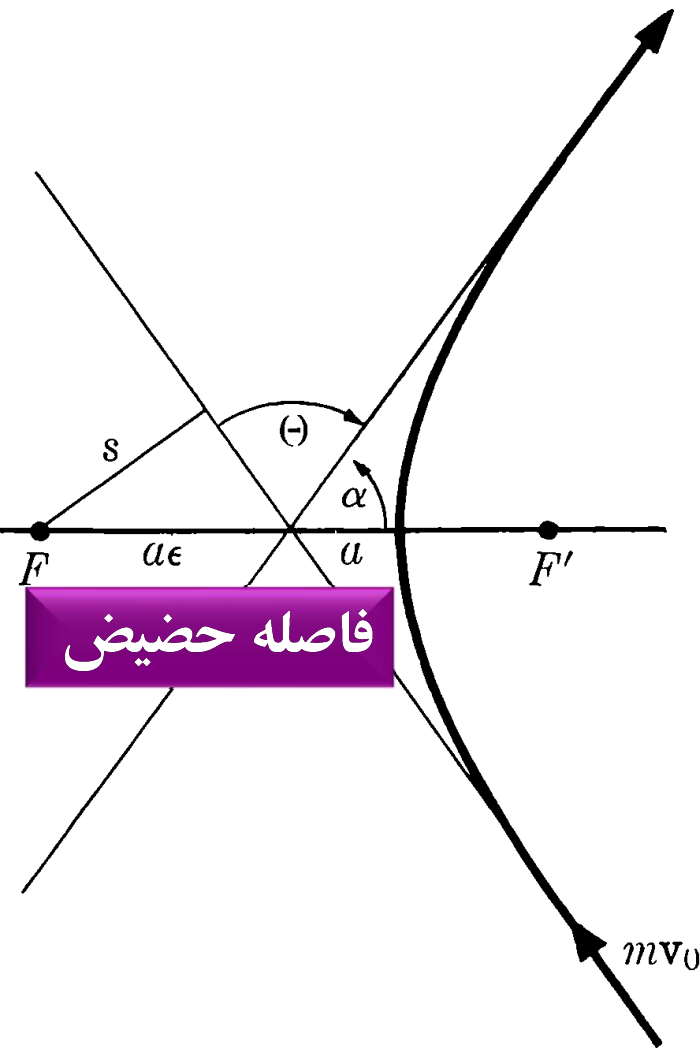
$$a + a\epsilon$$

$$a + a\epsilon > 10^{-14}m$$

از 10^{-14} متر
بزرگتر باشد:

با آزمایش او توافق دارد

بنابراین راترفورد نتیجه گرفت که ابعاد هسته
باید کوچکتر از این مقدار یعنی در حدود
فرمی باشد



فاصله حضيض

$$1 \text{ Fermi} \\ = 10^{-15}m$$

که این منشا نظریه هسته ای شد

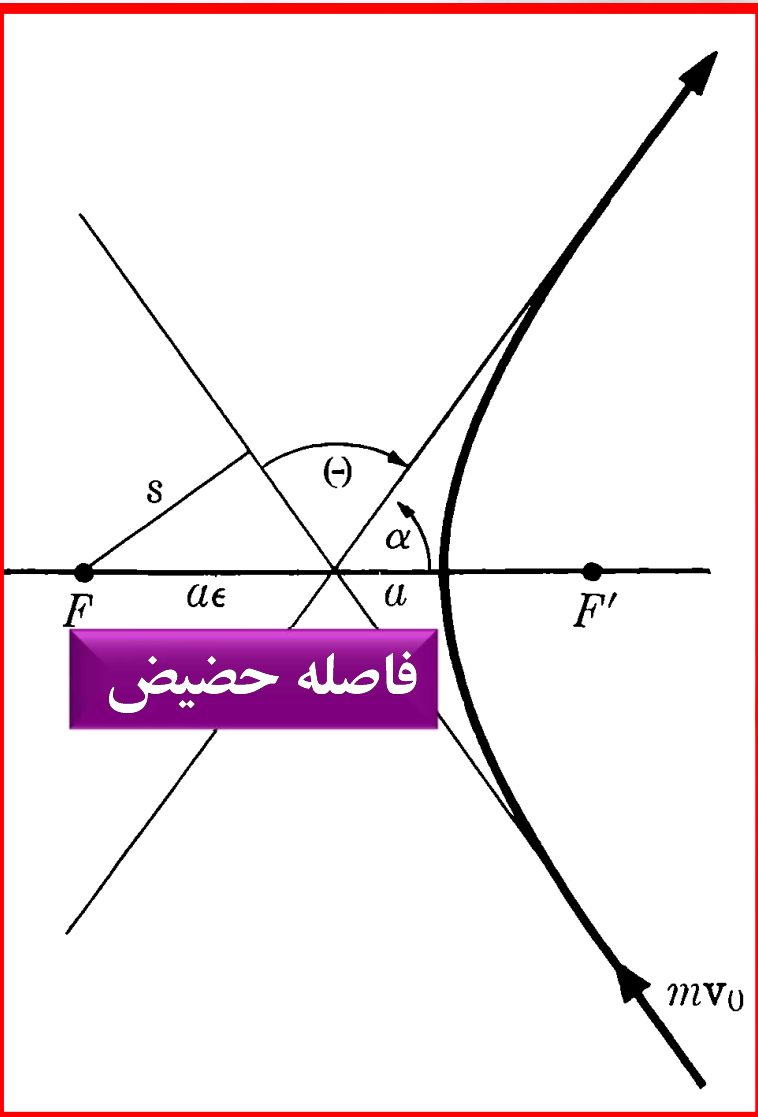
فاصله حضيض در واقع همان دورترین نقطه
برگشت است:

$$r = \frac{K}{2E} \pm \sqrt{\left[\frac{K}{2E}\right]^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

$$r = \frac{q_1 q_2}{2E} + \sqrt{\left[\frac{q_1 q_2}{2E}\right]^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

$$r = \frac{q_1 q_2}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{2mq_1^2 q_2^2}} \right)$$

$$r_{min} = \frac{q_1 q_2}{E}$$



کوچکترین فاصله حضيض
هنگامی روی می دهد که

$$L = mv_0 s = 0 \text{ or } s = 0$$