

حرکت ذره در میدان الکترومغناطیسی

طبق یکی از معادلات ماکسول داریم که:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

پس اگر میدان مغناطیسی تابعی از زمان نباشد، خواهیم داشت که:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

که در این صورت نیروی الکتریکی وارد بر ذره کنسرواتیو است

$$\Phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

لذا می توان پتانسیل الکتریکی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})$$

پس:

$$V = q\Phi(\vec{r})$$

پس انرژی پتانسیل را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$d\vec{r} \parallel \vec{v}$$

$$T + V = E$$

$$T + q\Phi = E$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

نیروی مغناطیسی بر سرعت ذره عمود است

پس نیروی مغناطیسی نمی تواند کاری بر ذره انجام دهد

بنابراین قانون بقا انرژی صادق باقی می ماند، زیرا فقط به میدان کنسرواتیو الکتریکی وابسته است:

بر یک ذره در یک میدان الکترومغناطیسی نیروی لورنتس وارد می شود:

که با استفاده از آن می توان حرکت یک ذره را در یک میدان الکترومغناطیسی مورد بررسی قرار داد

مثال: حرکت یک ذره متحرک در صفحه xy در یک میدان مغناطیسی
یکنواخت در جهت $\hat{k}$ را مورد بررسی قرار دهید:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B\hat{k}$$

$$B = \text{const.}$$

$$\vec{E} = 0$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = q/c\vec{v} \times \vec{B}$$

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c}\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{qB}{c}\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = 0$$

$$\dot{z} = \text{cte.} = v_{0z} = 0$$

$$z = \text{cte.} = z_0$$

حل دو معادله
دیفرانسیل اول هم
مشکل نیست ولی می
توان از رهیافت ساده تر
انرژی نیز مساله را حل
کرد

پس حرکت در صفحه xy انجام می شود

$$m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}) = \frac{qB}{c}\vec{v} \times \hat{k} = \frac{qB}{c}(-\dot{x}\hat{j} + \dot{y}\hat{i} + 0\hat{k})$$

$$T + q\Phi = E$$

$$\Phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$T = E$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = E$$

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = \frac{q}{c} vB \sin 90$$

$$F = \frac{qvB}{c} = cte.$$

$$F = ma = \frac{qvB}{c} = cte.$$

$$a = \frac{qvB}{mc} = cte.$$

یعنی
اندازه
سرعت
ثابت
است

یعنی اندازه های نیرو و شتاب هر دو ثابت و بردار آنها بر بردار سرعت عمودند

از طرفی اندازه سرعت نیز طبق قانون بقا ثابت است

بنابراین حرکت ذره چیزی جز یک حرکت دایره ای یکنواخت نمی تواند باشد

$$a = r\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r} = \frac{F}{m}$$

$$F = \frac{qvB}{c} = m \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{cmv}{qB}$$

$$v = \frac{qBr}{mc}$$

با استفاده از طیف سنج جرمی می توان جرم ذرات را اندازه گیری کرد:

اساس کار یک طیف سنج جرمی به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2}mv^2 = q(\Phi_0 - \Phi_1)$$

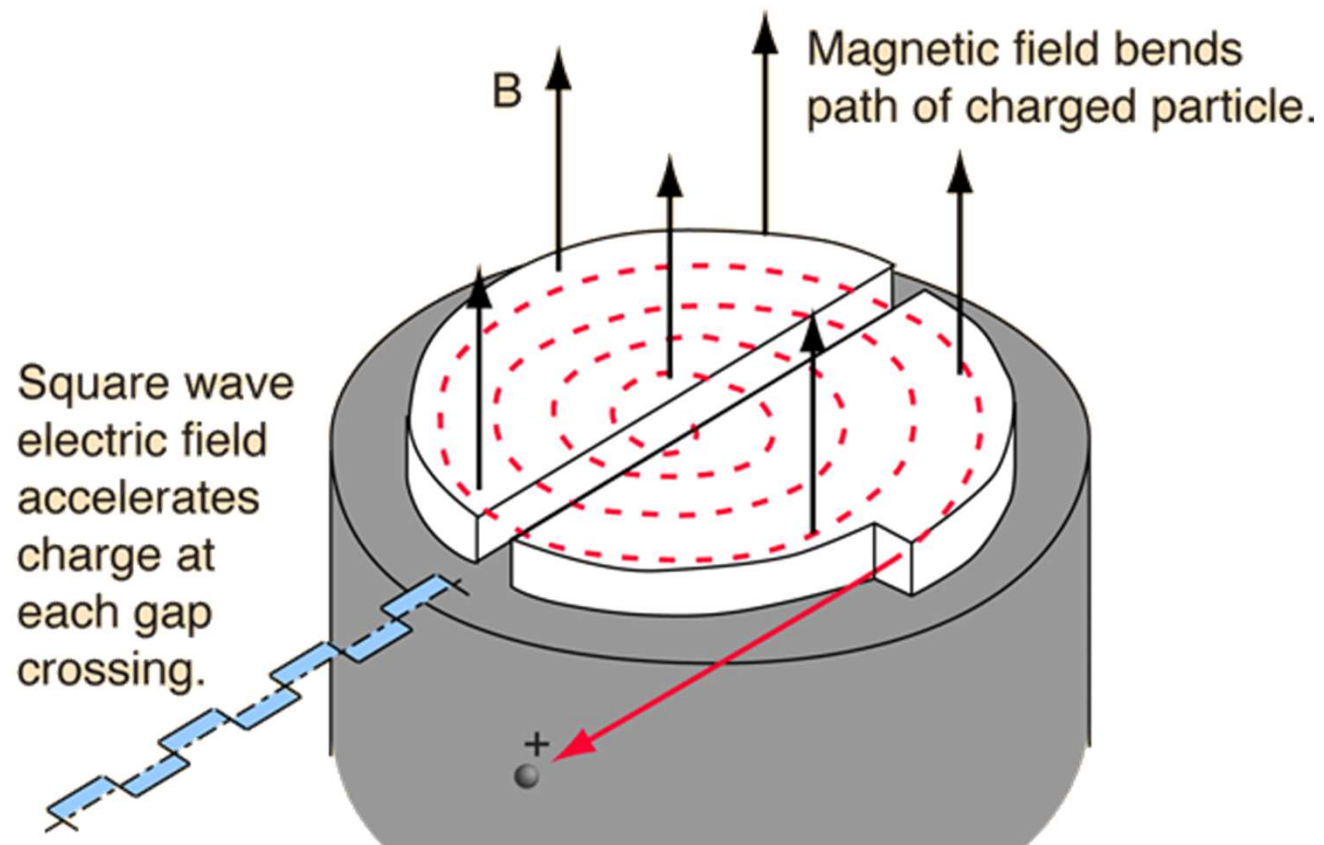
در یک طیف سنج جرمی ابتدا به وسیله اختلاف الکتریکی معلومی به یک ذره شتاب داده می شود:

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{qBr}{mc} \right)^2 = q(\Phi_0 - \Phi_1)$$

سپس ذره از یک میدان مغناطیسی یکنواخت عبور داده می شود

$$m = \frac{qB^2r^2}{2c^2(\Phi_0 - \Phi_1)}$$

حال می توان جرم ذره را به سادگی محاسبه کرد



در یک سیکلوترون ذرات باردار در یک میدان مغناطیسی یکنواخت در مسیرهای دایره ای شکل حرکت می کنند

انرژی ذرات با عبور از میدان الکتریکی متناوبی در هر دور 2 بار افزایش می یابد

$$r = \frac{cmv}{qB}$$

لذا شعاع دوایر نیز زیاد می شود:

تا شعاع به ماکزیمم مقدار خود یعنی شعاع دستگاه برسد

$$v_{max} = \frac{qBr_{max}}{cm}$$

در این شعاع ذرات با سرعت ماکزیمم از دستگاه خارج می شوند:

فرکانس میدان الکتریکی متناوب باید همان فرکانس ν دوران ذرات باشد

$$\nu = 2\pi r \nu$$

بنابراین اگر B ثابت باشد، فرکانس ν مستقل از شعاع r خواهد شد.

$$\nu = \frac{qB}{2\pi mc}$$

طبق نظریه نسبیت خاص جرم ذرات در سرعت های نزدیک سرعت نور افزایش می یابد، پس برای جبران باید ν کم شود یا B افزایش یابد (مانند بتا ترون که در آن B افزایش می یابد). در نظریه نسبیت این رابطه هنوز هم صادق است.

مثال: حرکت یک ذره در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی زیر را بررسی کنید:

$$\vec{B} = B\hat{k}$$

$$\vec{E} = E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}$$

$$m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}) = q\vec{E} + \frac{qB}{c}\vec{v} \times \hat{k} = qE_y\hat{j} + qE_z\hat{k} + \frac{qB}{c}(-\dot{x}\hat{j} + \dot{y}\hat{i} + 0\hat{k})$$

$$m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}) = \frac{qB}{c}\dot{y}\hat{i} + \left(qE_y - \frac{qB}{c}\dot{x}\right)\hat{j} + qE_z\hat{k}$$

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c}\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = qE_y - \frac{qB}{c}\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = qE_z$$

$$\dot{z} = \frac{q}{m}E_z t + \dot{z}_0$$

$$z = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E_z t^2 + \dot{z}_0 t + z_0$$

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c} \dot{y}$$

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c} \ddot{y}$$

$$m\ddot{y} = qE_y - \frac{qB}{c} \dot{x}$$

$$m\ddot{x} = \frac{q^2 B}{mc} E_y - \frac{q^2 B^2}{mc^2} \dot{x}$$

$$\omega = \frac{qB}{mc}$$

$$a = \frac{qE_y}{m}$$

$$\frac{d^2 \dot{x}}{dt^2} = a\omega - \omega^2 \dot{x}$$

$$\frac{d^2 \dot{x}}{dt^2} + \omega^2 \dot{x} = a\omega$$

که معادله یک نوسانگر هماهنگ
و داشته است

$$\dot{x} = \frac{a}{\omega} + A_x \cos(\omega t + \theta_x)$$

$$x = C_x + \frac{at}{\omega} + \frac{A_x}{\omega} \sin(\omega t + \theta_x)$$

حال به طریق مشابه برای یافتن مولفه y سرعت عمل می کنیم:

$$m\ddot{y} = qE_y - \frac{qB}{c}\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{qB}{c}\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c}\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{qB}{c}\left(\frac{qB}{mc}\dot{y}\right)$$

$$\frac{d^2\dot{y}}{dt^2} = -\frac{q^2B^2}{m^2c^2}\dot{y}$$

که معادله یک نوسانگر هماهنگ ساده است

$$\dot{y} = A_y \cos(\omega t + \theta_y)$$

$$y = C_y + \frac{A_y}{\omega} \sin(\omega t + \theta_y)$$

اکنون در 2 معادله به دست آمده شش مجهول داریم:

درحالی که فقط 4 شرط اولیه داریم

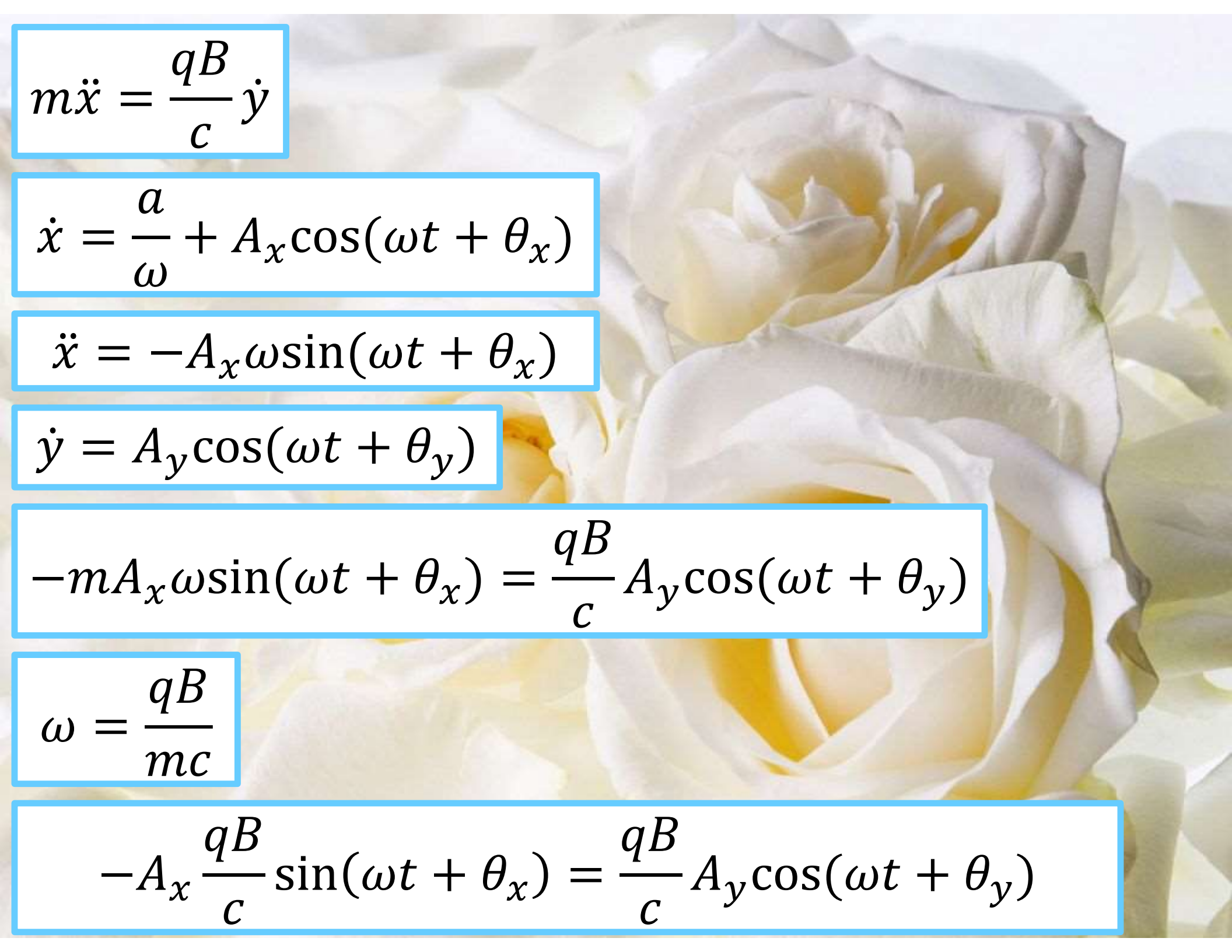
مشکل از آنجایی نشأت می گیرد که ما از معادلات مشتق گرفتیم و در نتیجه جواب اضافه تولید کردیم، مثلاً

$$x = 3$$

$$\dot{x} = 0$$

$$\dot{x} = C$$

اما فقط به ازای یک مقدار خاص C معادله اصلی برقرار است


$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c} \dot{y}$$

$$\dot{x} = \frac{a}{\omega} + A_x \cos(\omega t + \theta_x)$$

$$\ddot{x} = -A_x \omega \sin(\omega t + \theta_x)$$

$$\dot{y} = A_y \cos(\omega t + \theta_y)$$

$$-mA_x \omega \sin(\omega t + \theta_x) = \frac{qB}{c} A_y \cos(\omega t + \theta_y)$$

$$\omega = \frac{qB}{mc}$$

$$-A_x \frac{qB}{c} \sin(\omega t + \theta_x) = \frac{qB}{c} A_y \cos(\omega t + \theta_y)$$

$$-A_x \sin(\omega t + \theta_x) = A_y \cos(\omega t + \theta_y)$$

$$A_x = A_y$$

معادله فوق فقط وقتی برقرار است که

$$-\sin(\omega t + \theta_x) = \cos(\omega t + \theta_y)$$

و

به طور مشابه می توان نشان داد که باید رابطه زیر نیز برقرار باشد:

$$\cos(\omega t + \theta_x) = \sin(\omega t + \theta_y)$$

برای این کار کافی است از معادله زیر شروع شود:

$$m\ddot{y} = qE_y - \frac{qB}{c}\dot{x}$$

$$\theta_y = \theta_x + \frac{\pi}{2}$$

دو معادله فوق زمانی به طور همزمان برقرار است که:

$$A_x = A_y = \omega A$$

$$\theta_x = \theta$$

$$\theta_y = \theta + \frac{\pi}{2}$$

$$x = C_x + \frac{at}{\omega} + A \sin(\omega t + \theta)$$

$$y = C_y + A \cos(\omega t + \theta)$$

برای سادگی فرض می کنیم که:

که دیگر مشکل داشتن مجهولات زیادی نسبت به تعداد شرایط اولیه را ندارند

