

قبل از شروع مطالعه یک دستگاه فیزیکی ابتدا به تقارن دستگاه توجه می کنیم

سپس بر مبنای تقارن دستگاه یک دستگاه مختصات مناسب اختیار می کنیم



در این درس بر حسب تقارن مساله از دستگاه های مختصات زیر استفاده می کنیم:

(1) دستگاه مختصات کارتزی 2 بعدی

(2) دستگاه مختصات قطبی (2 بعدی)

(3) دستگاه مختصات کارتزی 3 بعدی

(4) دستگاه مختصات استوانه ای (3 بعدی)

(5) دستگاه مختصات کروی (3 بعدی)

تصویر دستگاه مختصات کارتزی 3 بعدی (استوانه ای) روی صفحه xOy همان دستگاه کارتزی 2 بعدی (مختصات قطبی) است

بنابراین دستگاه مختصات کارتزی 2 بعدی (قطبی) یک حالت خاص از دستگاه مختصات کارتزی 3 بعدی (استوانه ای) است



حرکت پرتابی

دستگاه پرتابه 2 بعدی و دارای
تقارن کارتری است

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

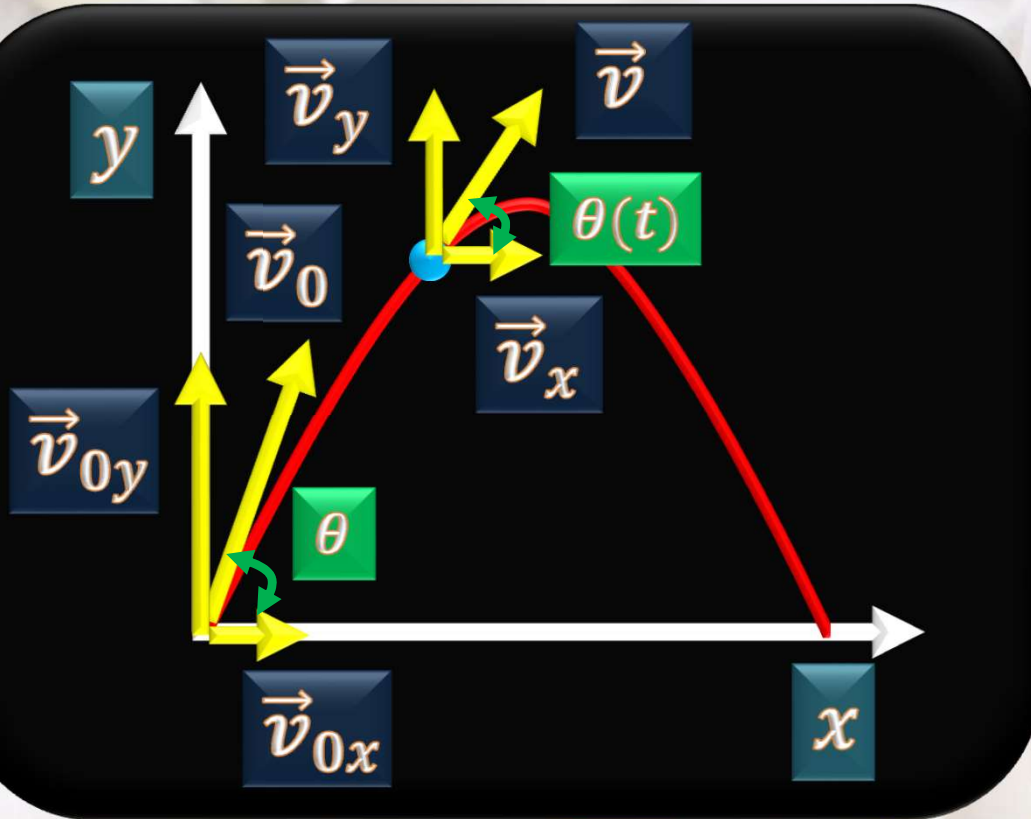
$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_y = -gt + v_{0y}$$

$$v_y = -gt + v_0 \sin \theta$$

$$x = v_0 \cos \theta t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t$$



$$\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

در نقطه اوج مولفه قائم سرعت صفر است، پس

$$v_y = -gt + v_0 \sin \theta = 0$$

$$t_{Top} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

زمان لازم برای اثبات به زمین 2
برابر زمان لازم برای رسیدن به نقطه
اوج است، پس

$$t_{Earth} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

ارتفاع اوج با زمان اوج قابل
محاسبه است:

$$y(t_{Top}) = H = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 + v_0 \sin \theta \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

$$H = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

برد پرتابه با زمان اثابت به زمین قابل محاسبه است

$$x(t_{Earth}) = R = v_0 \cos \theta \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

معادله حرکت با حذف زمان به صورت زیر به دست می آید

$$x = v_0 \cos \theta t$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

$$y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 + v_0 \sin \theta \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x$$

برد پرتابه را می توان با معادله حرکت هم به دست آورد:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta x = 0$$

$$\left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x + \tan \theta \right) x = 0$$

$$x = 0$$

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x + \tan \theta = 0$$

$$x = 2 \tan \theta v_0^2 \cos^2 \theta / g$$

$$x = 2 \sin \theta v_0^2 \cos \theta / g$$

که همان برد پرتابه است

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

ارتفاع اوج پرتابه را می توان با معادله حرکت هم به دست آورد:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x + \tan \theta = 0$$

$$\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x = \tan \theta$$

$$y = -\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g}$$

$$x = \tan \theta \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g}$$

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

که همان ارتفاع
اوج پرتابه است

$$x = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

که همان
نصف برد است

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \right)^2 + \tan \theta \left(\frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \right)$$

برد پرتابه تحت زاویه 45
درجه بیشینه می شود

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g} = 0$$

$$\cos 2\theta = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

یک فرمول مفید بین H و R و θ

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\frac{H}{R} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \frac{g}{v_0^2 \sin 2\theta}$$

$$\frac{H}{R} = \frac{\tan \theta}{4}$$

$$\frac{4H}{R} = \tan \theta$$

با این رابطه
می توان زاویه
اولیه پرتابه را
حساب کرد

زوایای متمم دارای
بردهای یکسانی هستند

دو زاویه متمم



$$\theta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right)}{g}$$

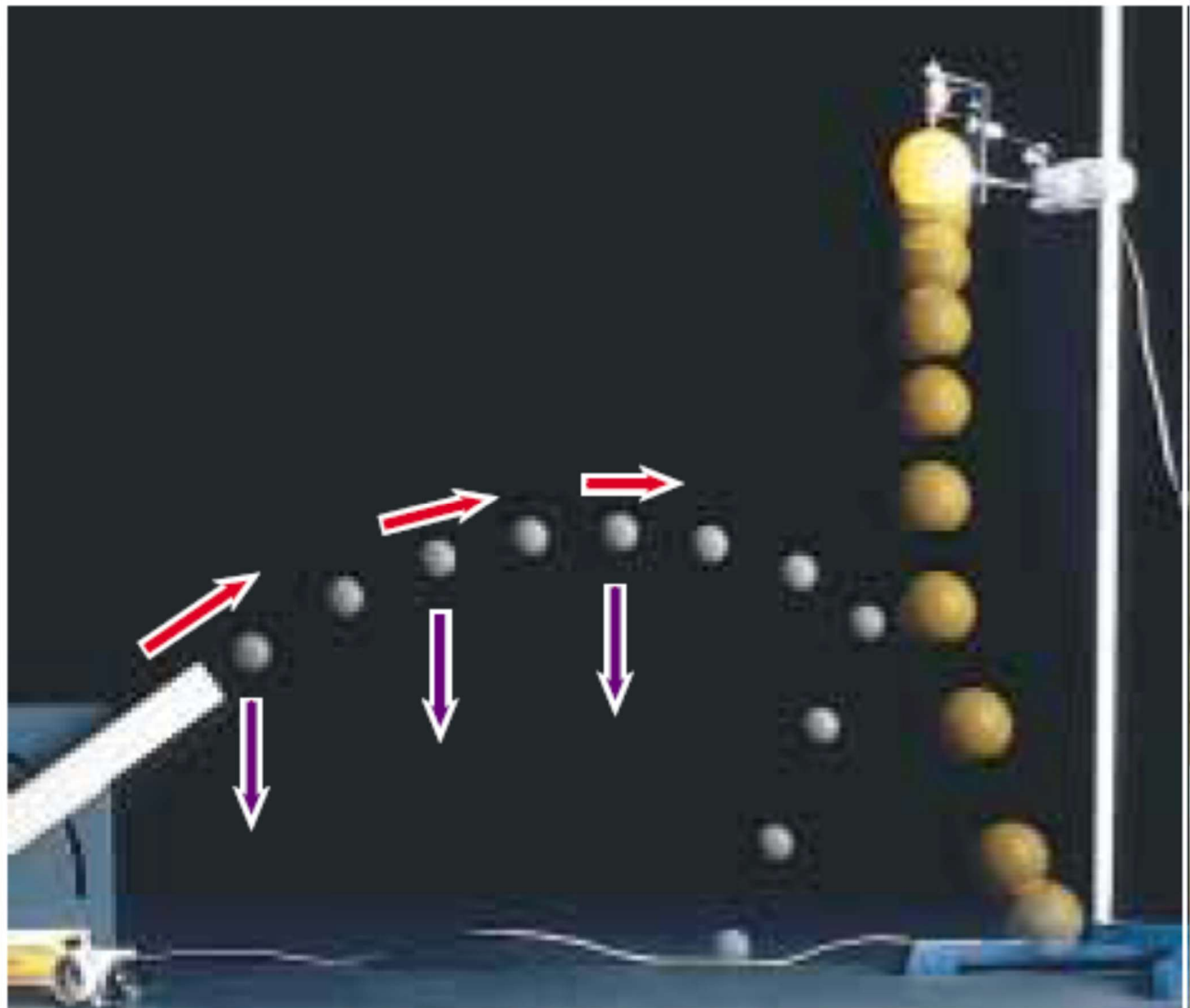
$$R = \frac{v_0^2 \sin(\pi - 2\gamma)}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\gamma}{g}$$

Example 4.4 A Bull's-Eye Every Time

In a popular lecture demonstration, a projectile is fired at a target T in such a way that the projectile leaves the gun at the same time the target is dropped from rest, as shown in Figure 4.13. Show that if the gun is initially aimed at the stationary target, the projectile hits the target.





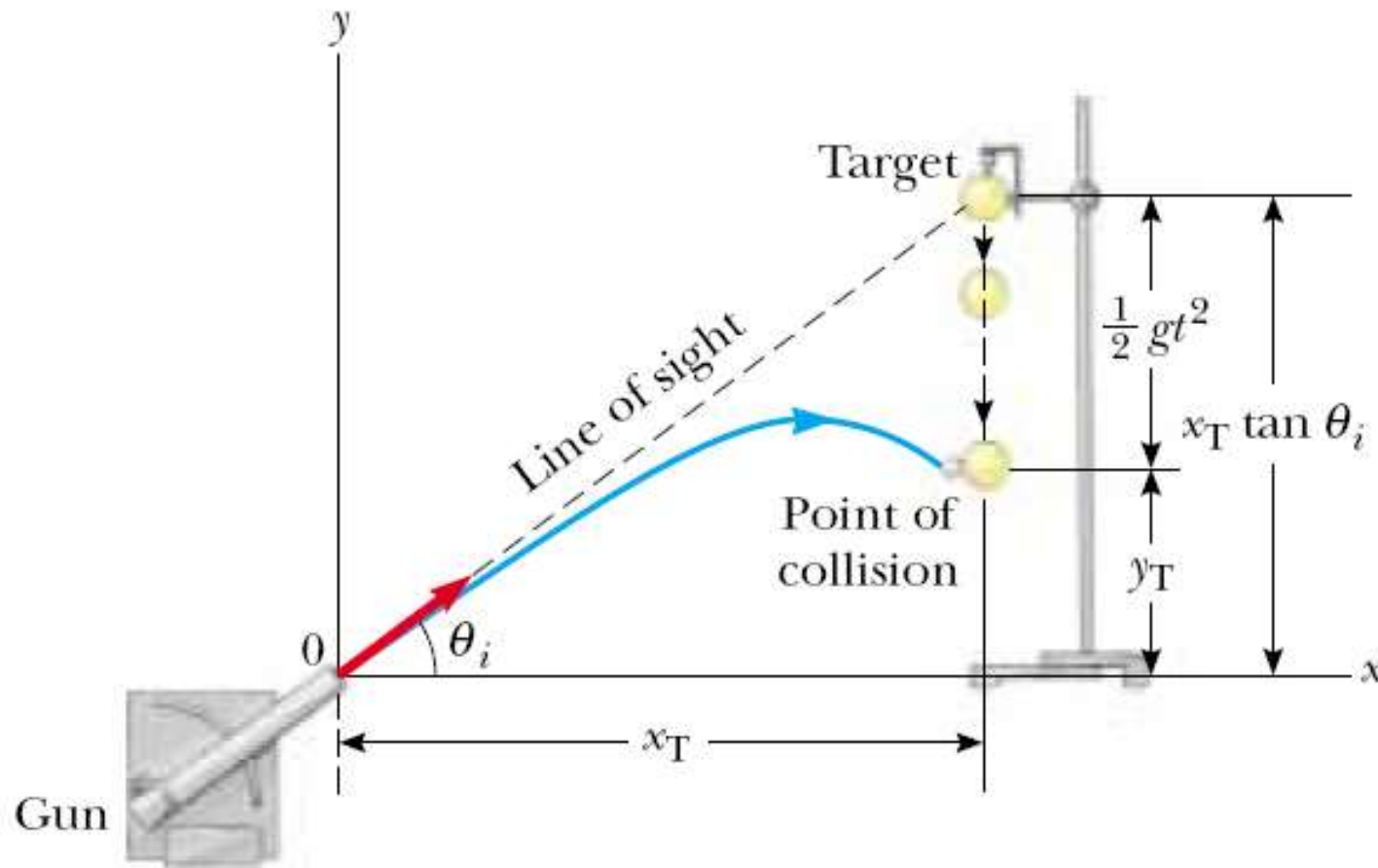
برخورد یعنی این
که اگر

$$x_P = x_T$$

آنگاه

$$y_P = y_T$$

که این امر روی
می دهد زیرا در
صورت تحقق
فرض، برقراری
حکم بدیهی است:



$$y_T = x_T \tan \theta_i - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_P = x_P \tan \theta_i - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_P = x_T \tan \theta_i - \frac{1}{2} g t^2 \\ = y_T$$

```

screen 12
cls
line(50,20)-(50,400),14
locate 2,4
print" y"
line(50,400)-(450,400),14
locate 27,57
print"x"
line(50,15)-(54,25),14
line(50,15)-(46,25),14
line(455,400)-(445,405),14
line(455,400)-(445,395),14
line(430,400)-(430,50),14
line(420,400)-(420,50),14
line(430,50)-(420,50),14
for x=420 to 430
    line(x,400)-(x,50) ,12
next x
circle(425,80),10,
line(416,77)-(370,77)
line(416,83)-(370,83)
line(370,77)-(370,83)
circle(370,94),10

```

```

xt = 370
tetai = atn((400 - 94) / (370 - 53))
g = 9.8
v0 = 1.5 * sqr(317 * g / sin(2 * tetai))
rem print 53*tan(tetai)
s = 0.00001
for t=0 to 7.7723 step s
    YT = xt * tan(tetai) + 1 / 2 * g * T ^ 2 + 94 - xt * tan(tetai)
    circle(xt,yt),10,10
    ss = ss + s
    circle(xt,yt-.15*ss),10, 0
    circle(xt,yt), 10,10
    rem circle(53,397),3
    xp = v0 * cos(tetai) * T + 53
    yp = -xp * tan(tetai) + 1 / 2 * g * T ^ 2 + 397 + 53 * tan(tetai)
    circle(xp,yp),2, 14
next t

```



