

دستگاه 2 بعدی و دارای
تقارن قطبی (دایروی) است

حرکت دایره ای یکنواخت

$$\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{r}}$$

~~$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dR}{dt}\hat{\mathbf{r}} = 0\hat{\mathbf{r}}$$~~

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$$

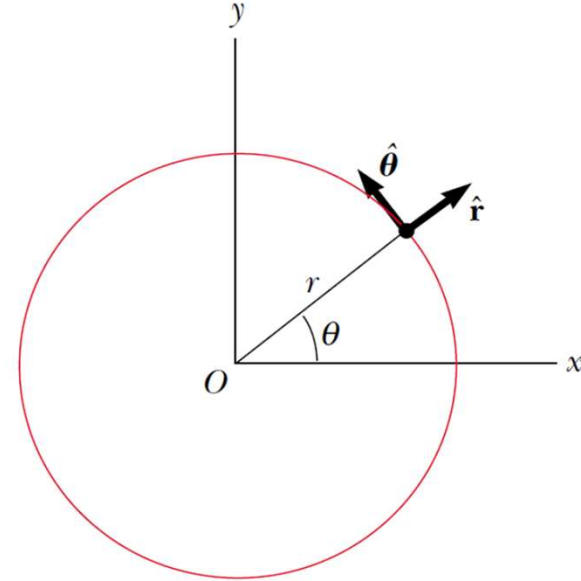
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}}$$

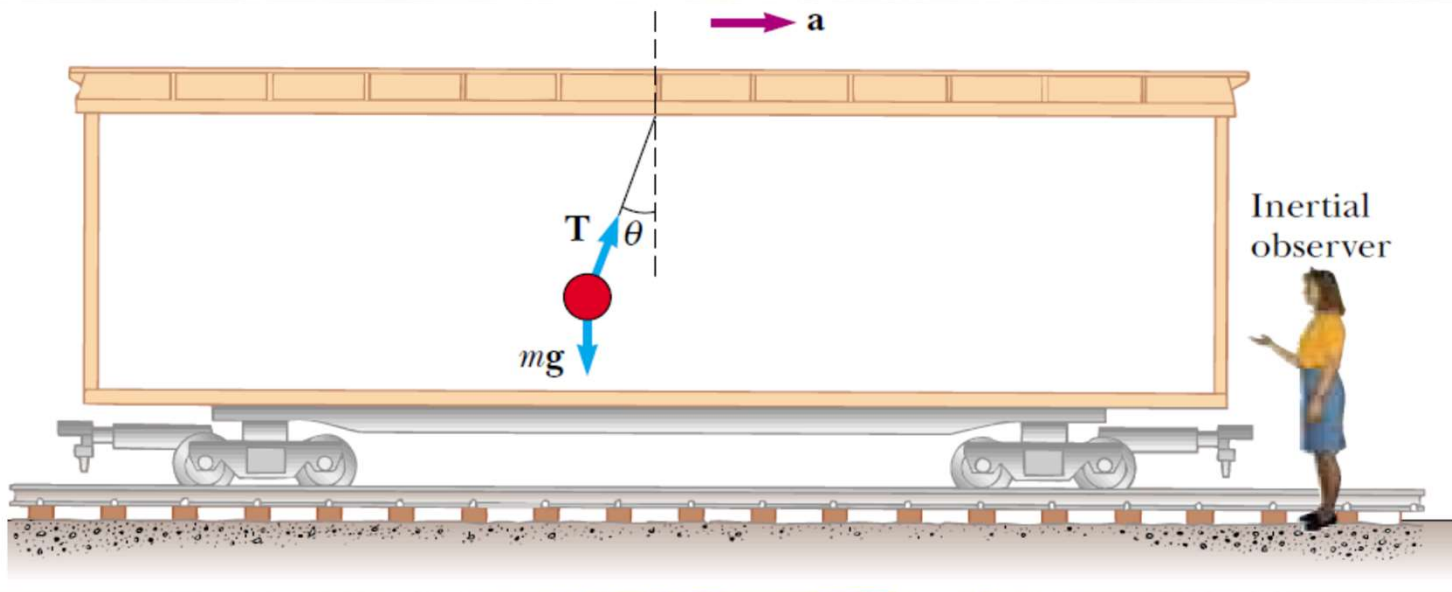


$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dR}{dt}\hat{\mathbf{r}} + R\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = R\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} = v\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + v\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = a_{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + v\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = a_{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + v\frac{d\theta}{dt}(-\hat{\mathbf{r}}) = a_{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{v^2}{R}\hat{\mathbf{r}}$$

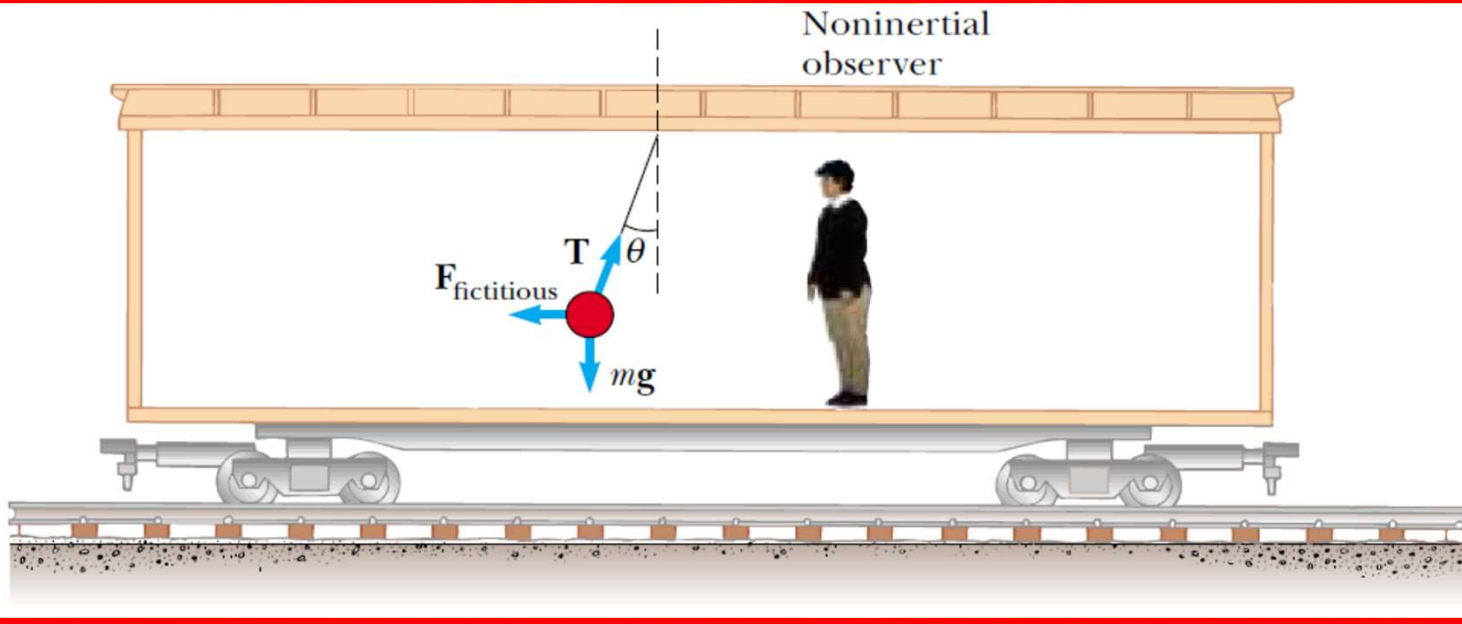
a_r

دستگاه‌های غیر لخت



مشاهده گر لخت می گوید که جسم شتاب دارد و مولفه افقی نیروی کشش نخ سبب شتاب جسم شده است

$$T \sin \theta = ma$$

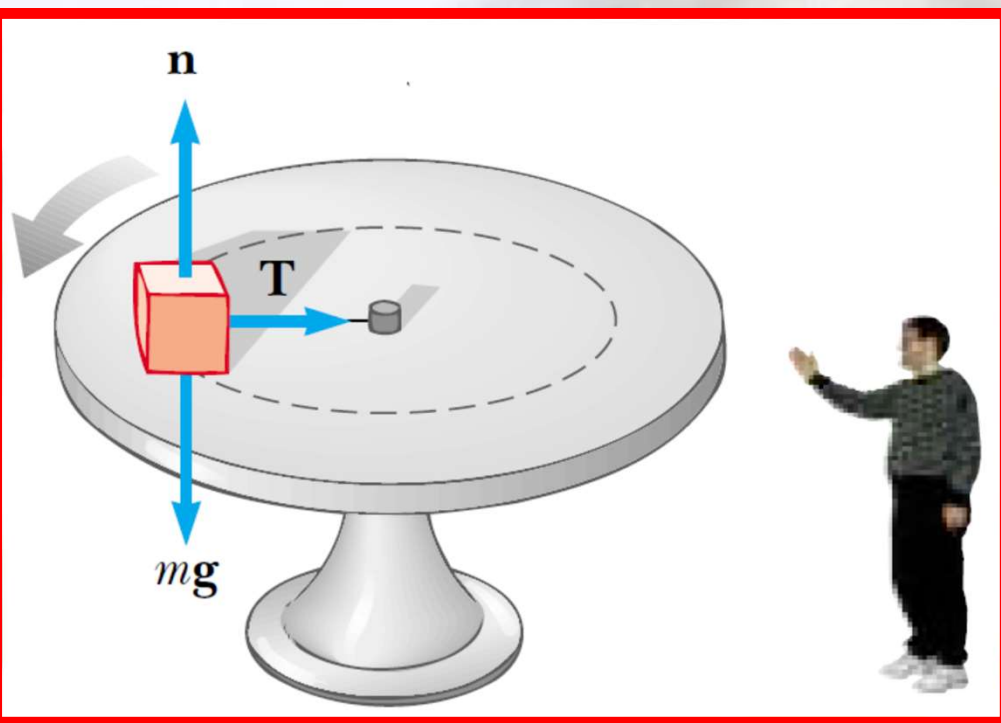


مشاهده گر غیرلخت می گوید که جسم ساکن است و مولفه افقی نیروی کشش نخ توسط نیروی مجازی وارده (که خود شخص نیز آن را حس می کند) آن را خنثی کرده است

که نتیجه هر دو سازگار با یکدیگر است

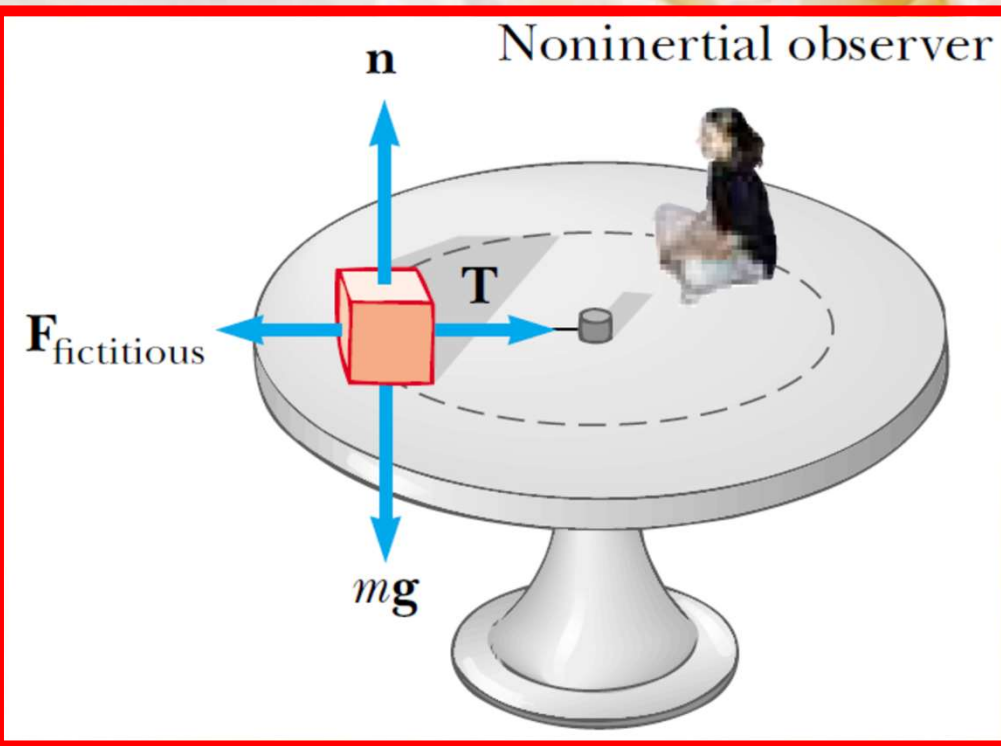
$$F_{\text{fic}} = ma$$

$$T \sin \theta = F_{\text{fic}}$$



مشاهده گر لخت می گوید که نیروی کشش نخ به جسم نیروی جانب مرکز وارد می کند و سبب حرکت دایروی آن می شود

$$T = \frac{mv^2}{R}$$



مشاهده گر غیرلخت می گوید که نیروی کشش نخ به وسیله نیروی مجازی گریز از مرکز خنثی می شود

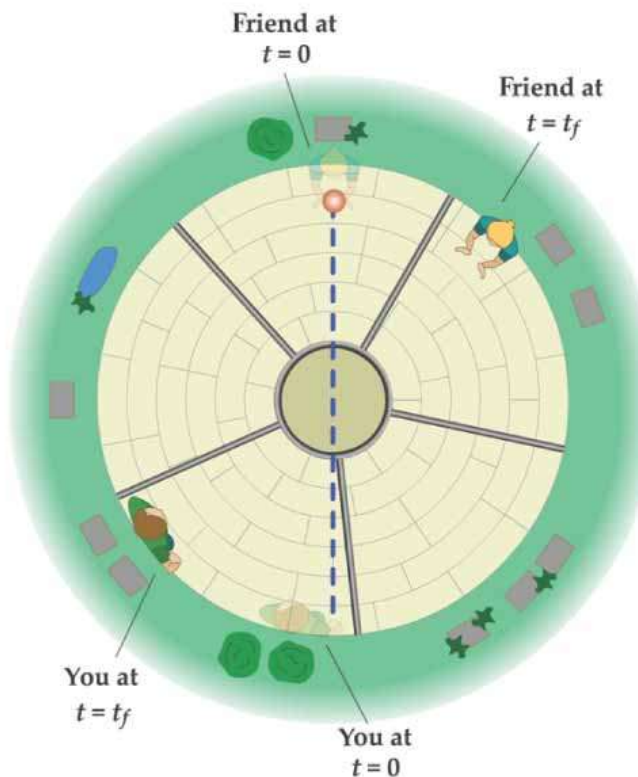
$$T - F_{fic} = 0$$

$$F_{fic} = \frac{mv^2}{R}$$

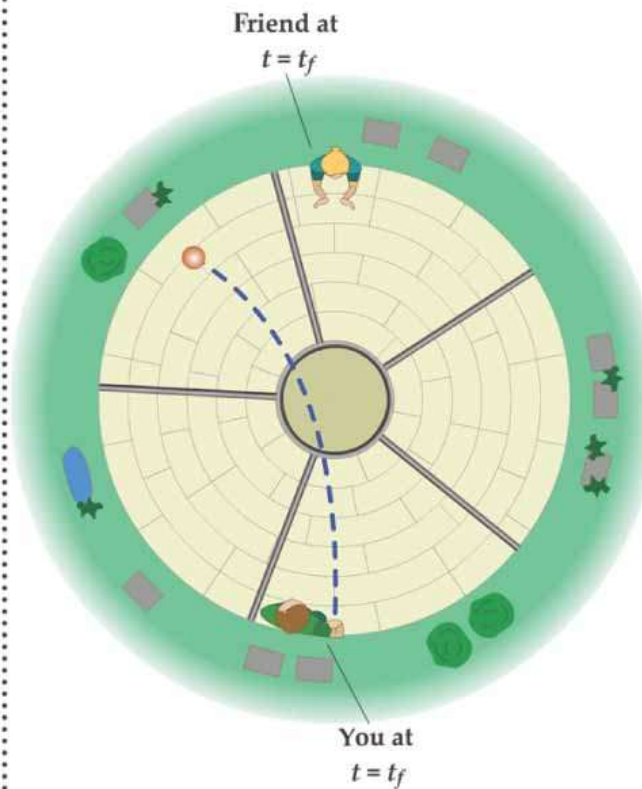
که نتیجه هر دو سازگار با یکدیگر است

The view according to an observer fixed with respect to Earth

The view according to an observer fixed with respect to the rotating platform



(a)



(b)

حرکت دایره ای غیریکنواخت

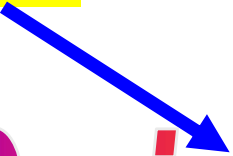
$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{\mathbf{r}})}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} = v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})}{dt} = \frac{d(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}})}{dt} = \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}})$$

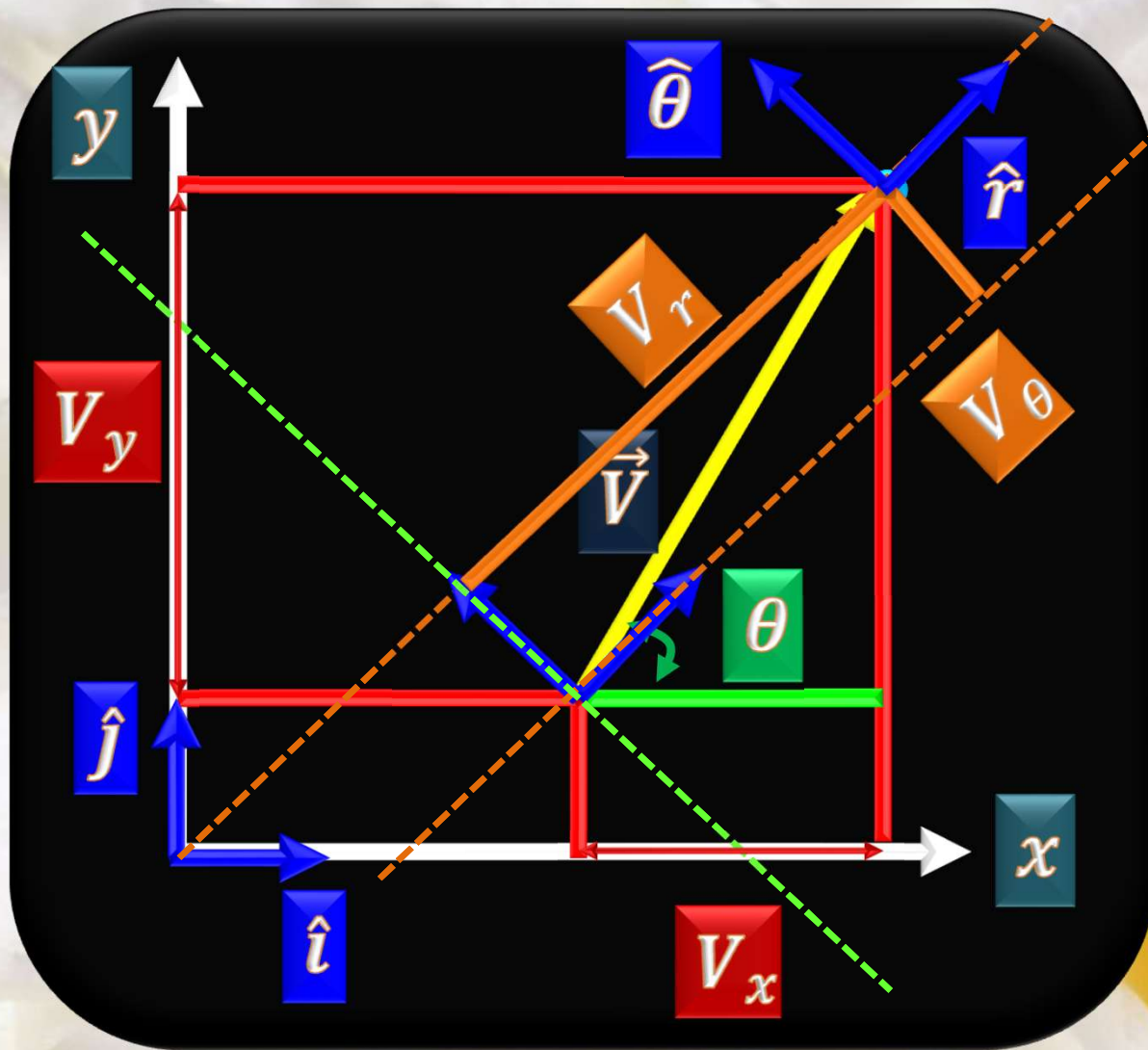
$$\mathbf{a} = \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

 **Coriolis Acceleration**

1 و 2) یک بردار در دستگاه های مختصات کارتری 2 بعدی و

قطبی



$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j}$$

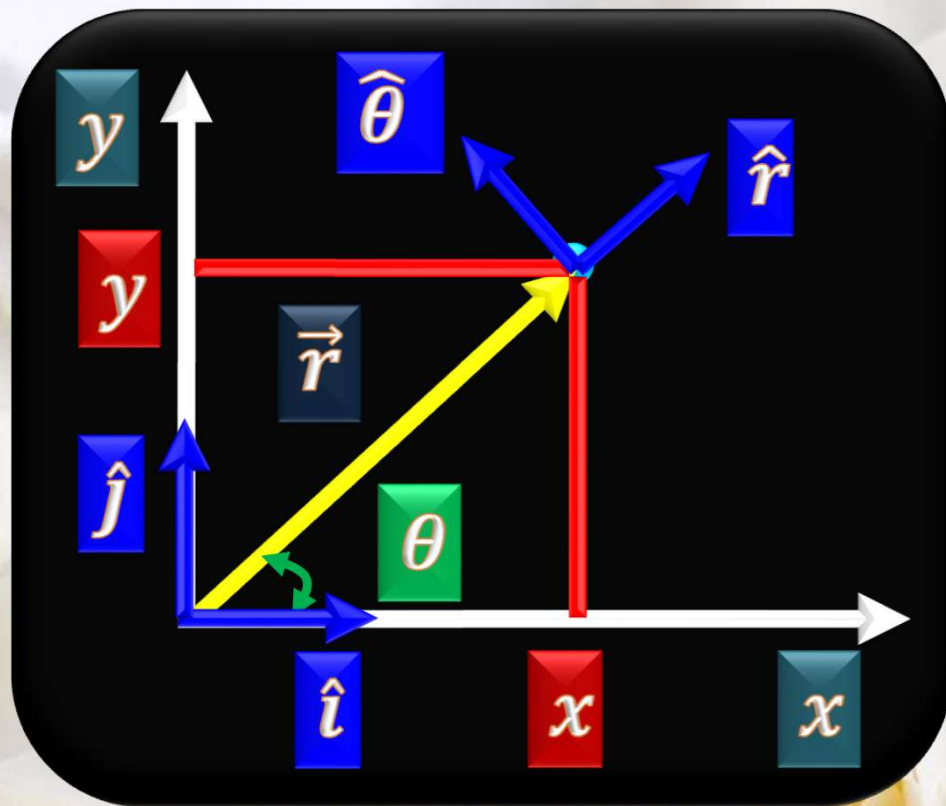
$$\vec{V} = V_r \hat{r} + V_\theta \hat{\theta}$$

$$V_x = V \cos \theta$$

$$V_y = V \sin \theta$$

$$V_x^2 + V_y^2 = V^2$$

$$\frac{V_y}{V_x} = \tan \theta$$



بردار مکان در دستگاه های
کارتزی و قطبی

$$\vec{V} = V_r \hat{r} + V_\theta \hat{\theta}$$

$$\text{if } \vec{V} = \vec{r}$$



$$V_\theta = 0$$

$$V_r = r$$

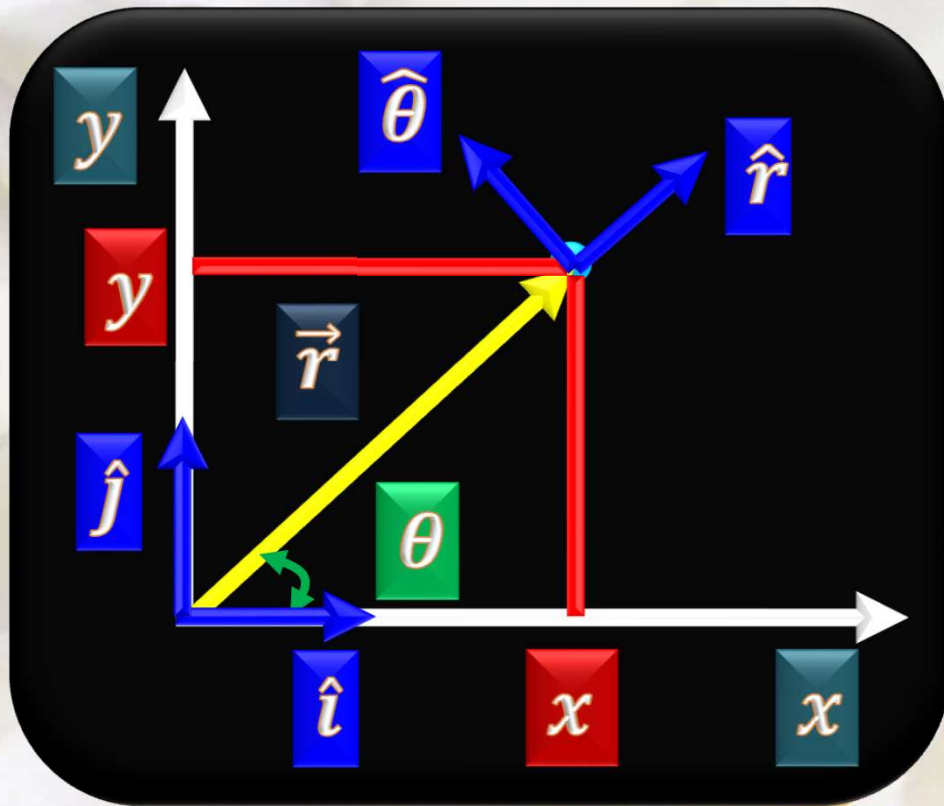
$$\vec{r} = r \hat{r}$$

پس بردار مکان شکل ساده ای در دستگاه قطبی دارد

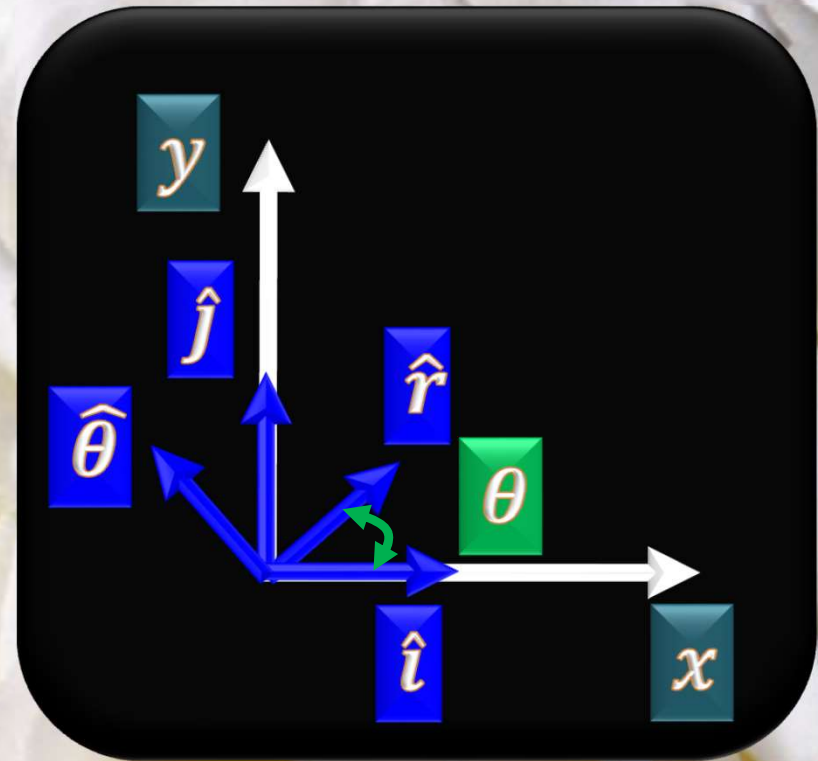
به همین دلیل مسایلی که دارای تقارن دایروی هستند در دستگاه قطبی راحت تر حل می شوند

تذکر: بدیهی است که بین بردار یکه $\hat{\theta}$ و زاویه θ تفاوت اساسی وجود دارد!

ارتباط بردارهای یکه قطبی با بردارهای یکه کارتری



نکته: بردارهای یکه قطبی با تغییر زاویه (حرکت دورانی ذره) تغییر می کنند ولی بردارهای یکه کارتری ثابتند



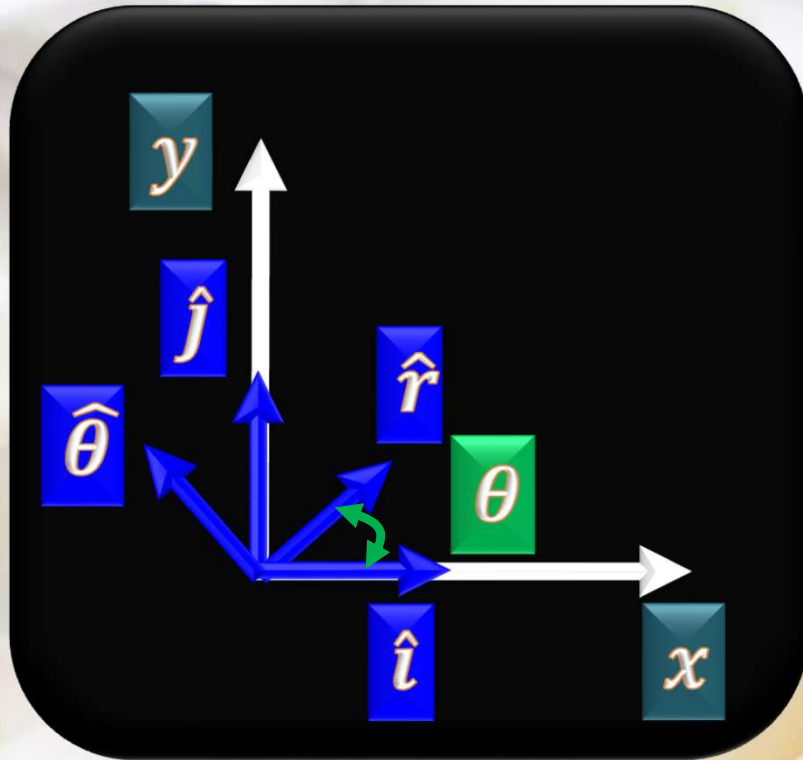
از شکل به راحتی پیدا است که:

$$\hat{r} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$

پس بردارهای یکه قطبی یک ذره در یک مسیر منحنی شکل تابع زمانند ولی بردارهای یکه کارتری مستقل از زمان

ارتباط بردارهای یکه قطبی با یکدیگر:



با مشتق گیری از بردار یکه $\hat{r}$ نسبت به زاویه θ

$$\hat{r} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$

خواهیم داشت که:

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$

که چیزی جز بردار یکه θ نیست

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j}$$

که چیزی جز منفی بردار یکه $\hat{r}$ نیست

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که:

تغییرات زمانی بردارهای یکه قطبی

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega$$

که چیزی جز سرعت زاویه ای نیست

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}$$

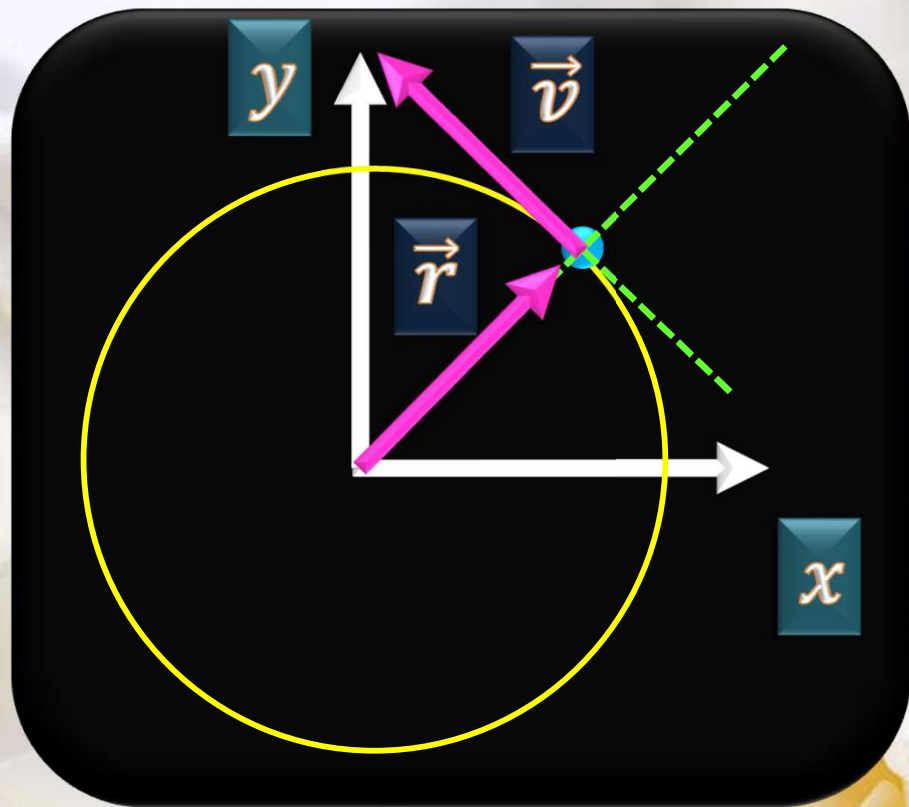
$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \hat{\theta} = \omega \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta} \hat{r} = -\omega \hat{r}$$



بردار سرعت در حرکت دایره ای
یکنواخت

از شکل پیداست که بردار مکان
فقط مولفه شعاعی و بردار سرعت
فقط مولفه مماسی دارد:

$$\vec{r} = R\hat{r}$$

$$\vec{v} = v_{\theta}\hat{\theta}$$

به صورت تحلیلی نیز می توان
نشان داد که در این حالت سرعت
فقط دارای مولفه مماسی است

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_r\hat{r} + v_{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\hat{r})$$

$$\vec{v} = \dot{R}\hat{r} + R\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} = R\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_{\theta}\hat{\theta} = R\omega\hat{\theta}$$

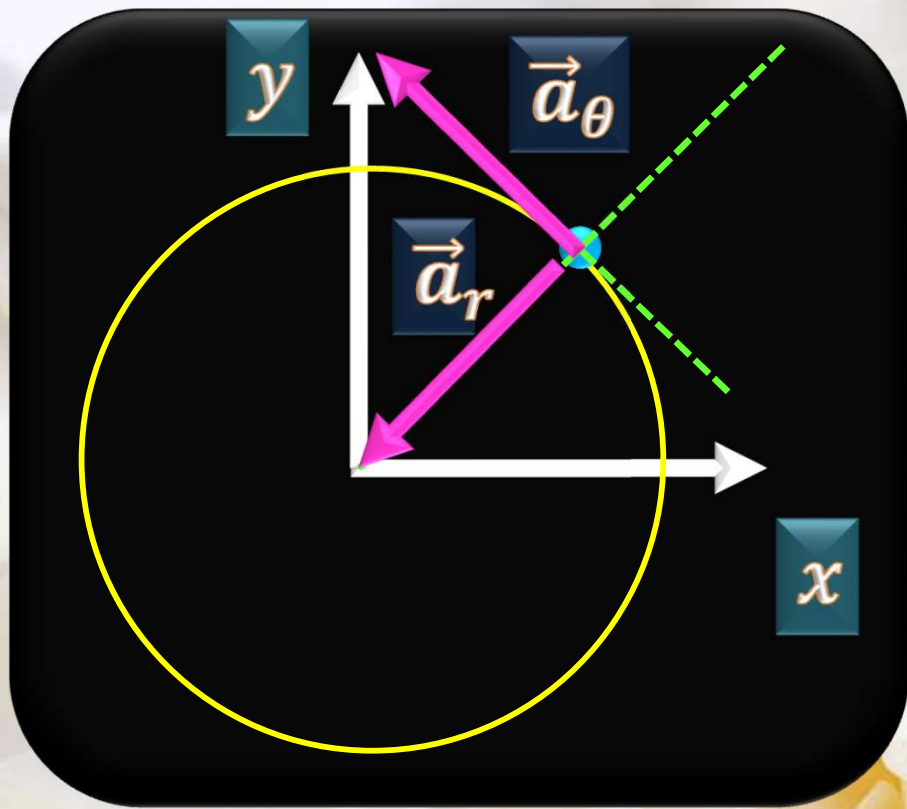
$$v_r = 0$$

$$v_{\theta} = R\omega$$

$$= v$$

در حرکت دایره ای
یکنواخت معمولاً
اندیس سرعت را نمی
گذارند (زیرا فقط یک
اندیس مماسی دارد)

بردار شتاب در حرکت دایره ای یکنواخت



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta}\hat{\theta})}{dt}$$

$$\vec{a} = R\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r})$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} = -R\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$a_r = -R\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = 0$$

$$a_r = -R\omega^2$$

$$v = R\omega$$

$$= -R \frac{v^2}{R^2} = -\frac{v^2}{R}$$

(1) بردار مکان همواره (چه در حرکت دایره ای یکنواخت و چه در حرکت دایره ای غیر یکنواخت) دارای مولفه شعاعی است

$$\vec{r} = R\hat{r}$$

(2) بردار سرعت در حرکت دایره ای یکنواخت فقط دارای مولفه مماسی است

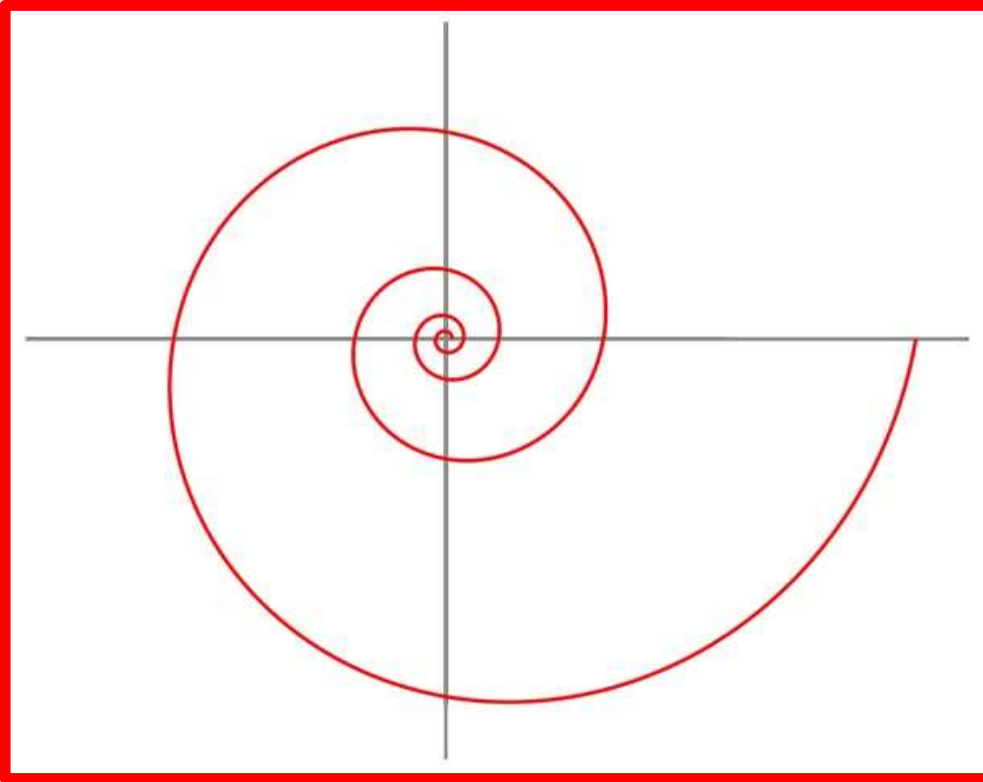
$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} = v_\theta\hat{\theta} = R\dot{\theta} = R\omega\hat{\theta}$$

(3) بردار شتاب در حرکت دایره ای یکنواخت فقط دارای مولفه شعاعی است

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} = -R\omega^2\hat{r} = -\frac{v^2}{R}\hat{r}$$

مولفه شعاعی شتاب همان شتاب جانب مرکز است

دستگاه 2 بعدی و دارای تقارن
قطبی است



بردار سرعت در حرکت حلرونی
(دایره ای) غیر یکنواخت

در این حالت شعاع نیز با زمان می
تواند تغییر کند

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

در این حالت سرعت می تواند هر
دو مولفه مماسی و شعاعی را داشته
باشد

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r})$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$$

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}\dot{\theta}\hat{r}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}$$

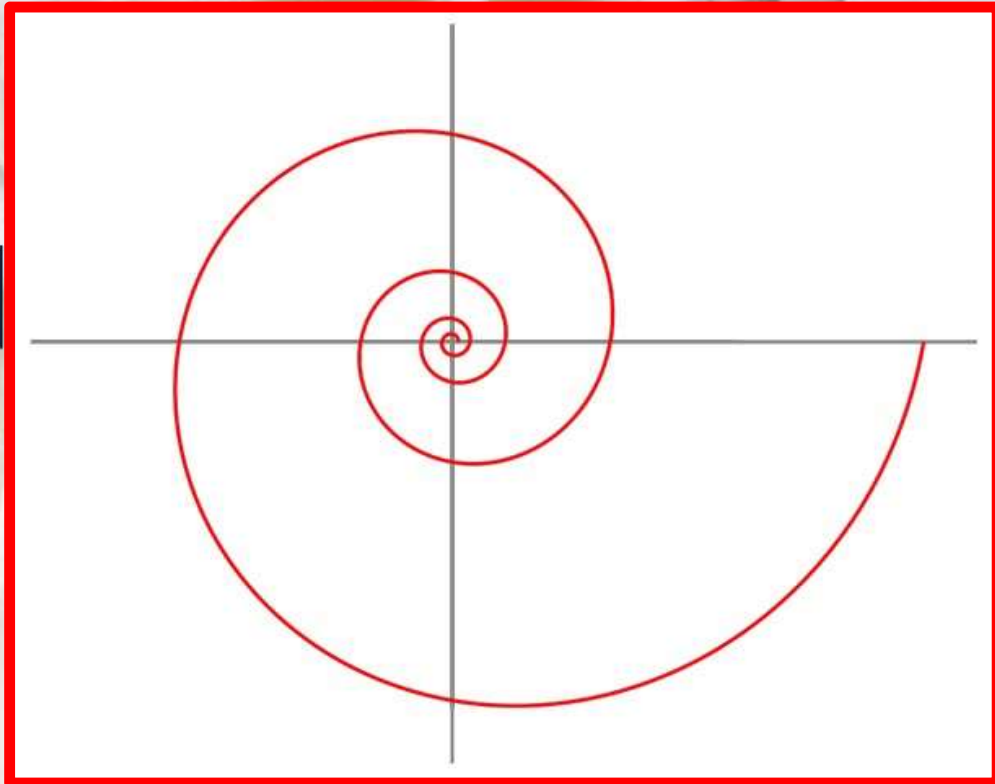
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

بردار شتاب در حرکت حلرونی
(دایره ای) غیر یکنواخت



$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$-r\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{R}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

شتاب شعاعی در دستگاه قطبی دو بخش دارد

$$-r\dot{\theta}^2$$

بخش دوم

$$\ddot{r}$$

بخش اول

بخش اول ناشی از تغییرات مرتبه دوم شعاع نسبت به زمان

بخش دوم همان شتاب جانب مرکز است

این بخش هنگامی وجود دارد که زاویه با زمان تغییر کند (بدون آن که به تغییر شعاع نیاز داشته باشد)

شتاب مماسی نیز در دستگاه قطبی دو بخش دارد

$$2\dot{r}\dot{\theta}$$

بخش دوم

$$r\ddot{\theta}$$

بخش اول

$$r\ddot{\theta} = r \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

بخش اول ناشی از تغییرات مرتبه دوم زاویه نسبت به زمان (بدون نیاز به تغییرات شعاع)

$$2r\dot{\theta} = 2\omega \frac{dr}{dt}$$

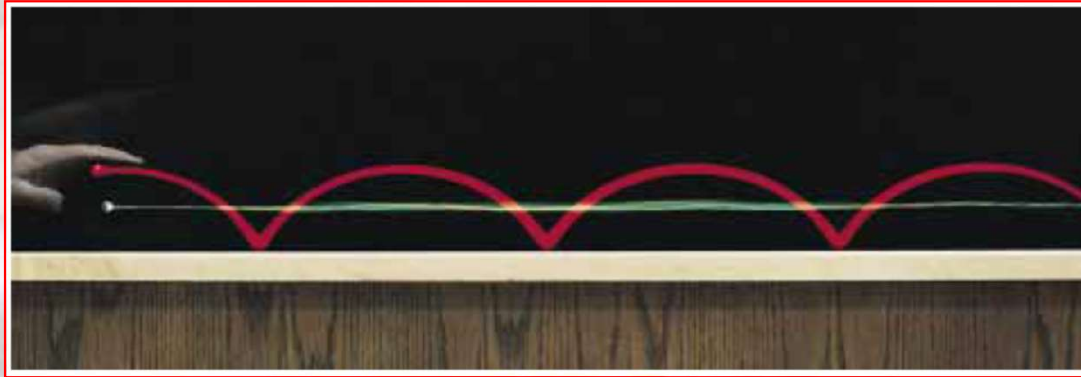
بخش دوم همان شتاب کوریولی است

این بخش هنگامی وجود دارد که هم زاویه و هم شعاع به طور همزمان با زمان تغییر کنند

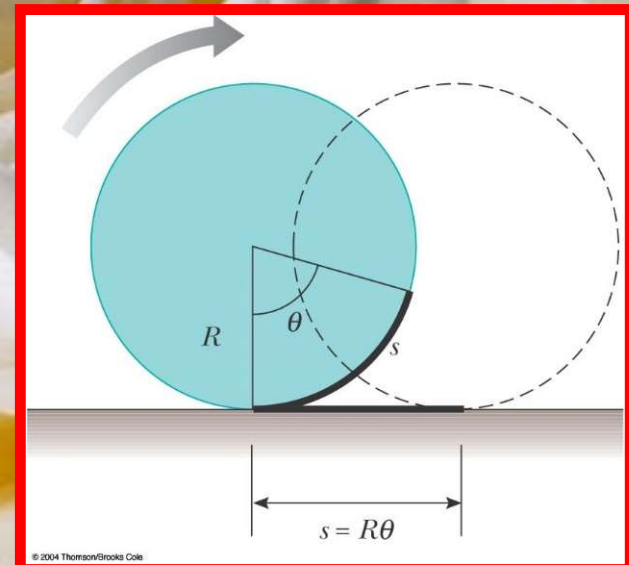
یعنی نیروی کوریولی هنگامی قابل تجربه است که روی یک دستگاه دوار در راستای شعاعی حرکت انجام شود

چرخزاد یا سیکلوئید

حرکت دستگاه 2 بعدی و تقارن آن قطبی است

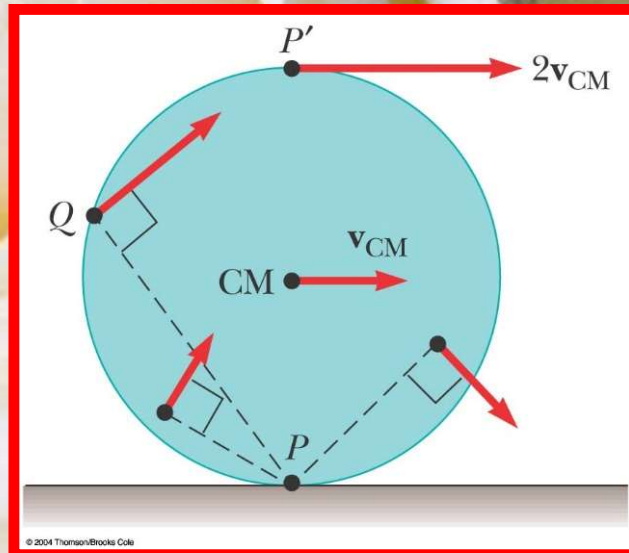


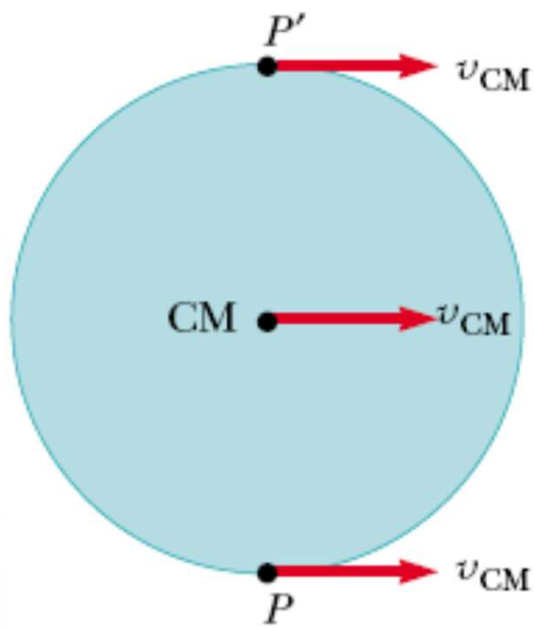
اگر چرخ (یا سکه ای) که یک نقطه روی محیط آن جوهری شده باشد کنار یک دیوار بغلتد اثری از خود روی دیوار به جا می گذارد که به آن چرخزاد می گویند



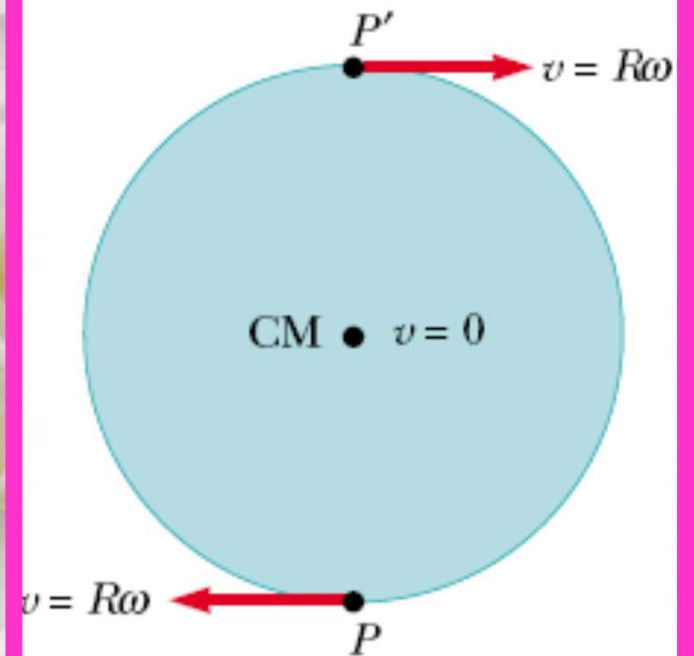
سرعت نقطه ای از چرخ که با زمین در تماس است همواره برابر با صفر است

اگر سرعت مرکز جرم چرخ v_{CM} باشد، سرعت نقطه بالای چرخ $2v_{CM}$ خواهد بود

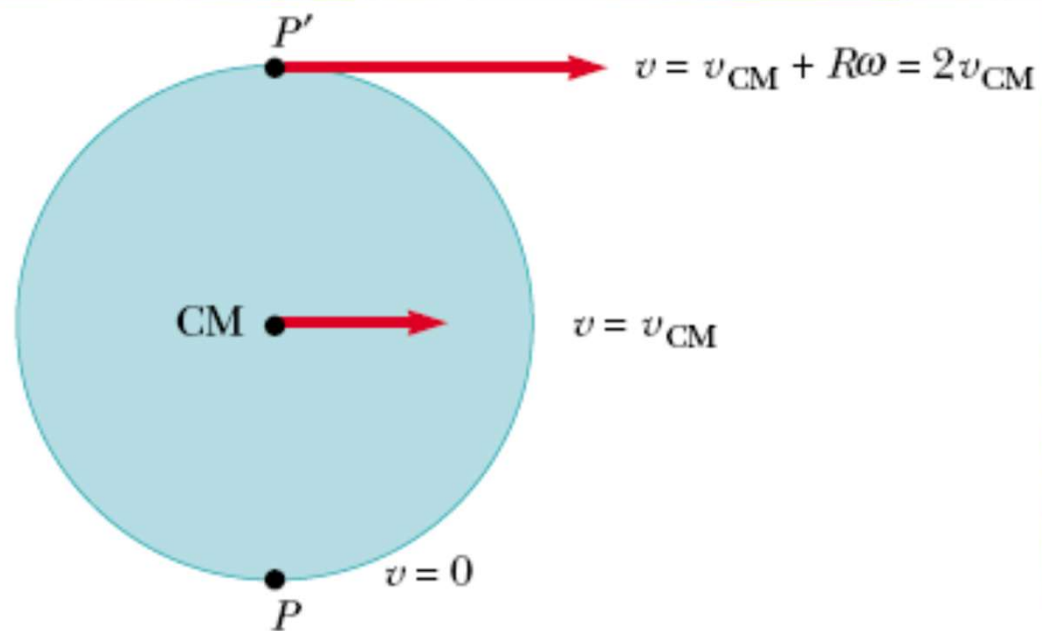




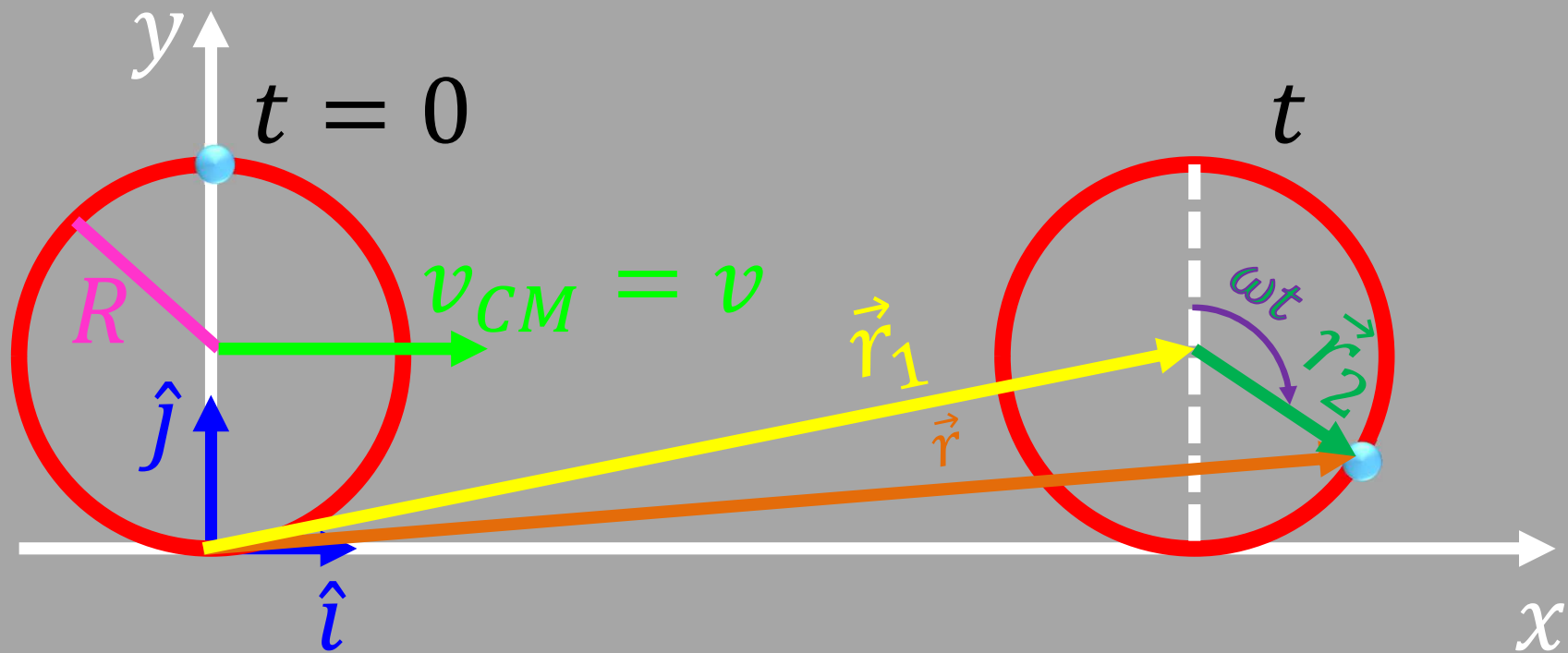
(a) Pure translation



(b) Pure rotation



(c) Combination of translation and rotation



$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{r}_1(t) = (vt)\hat{i} + R\hat{j}$$

$$\vec{r}_2(t) = R\sin\omega t\hat{i} + R\cos\omega t\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = (vt + R\sin\omega t)\hat{i} + (R + R\cos\omega t)\hat{j}$$

$$x(t) = R(\omega t + \sin\omega t)$$

$$y(t) = R(1 + \cos\omega t)$$

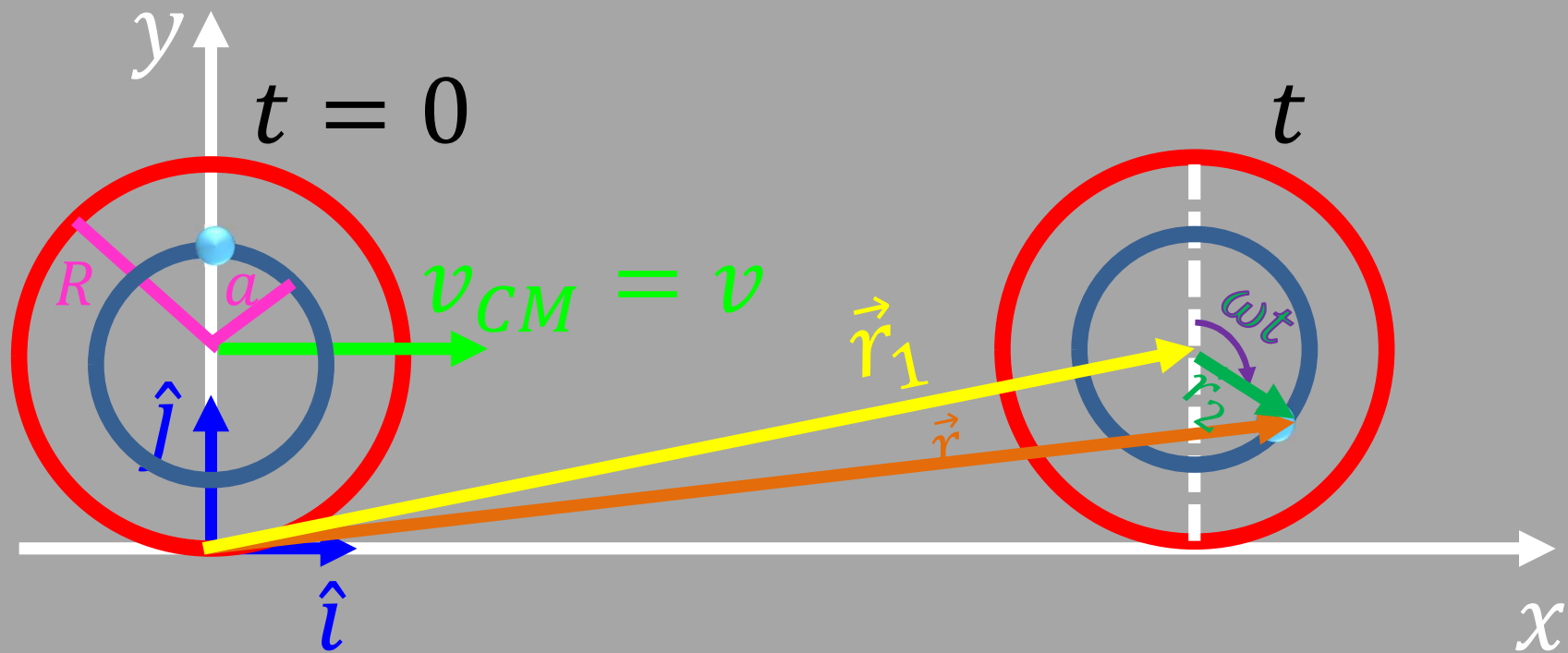
$$\vec{r}(t) = \vec{v}(t) = (v + R\omega \cos \omega t)\hat{i} - (R\omega \sin \omega t)\hat{j}$$

$$v_x(t) = R\omega(1 + \cos \omega t) \quad v_y(t) = -R\omega \sin \omega t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{a}(t) = (-R\omega^2 \sin \omega t)\hat{i} - (R\omega^2 \cos \omega t)\hat{j}$$

$$a_x(t) = -R\omega^2 \sin \omega t \quad a_y(t) = -R\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_x(t) = -\frac{v^2}{R} \sin \omega t \quad a_y(t) = -\frac{v^2}{R} \cos \omega t$$



$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{r}_1(t) = (vt)\hat{i} + R\hat{j}$$

$$\vec{r}_2(t) = a\sin\omega t\hat{i} + a\cos\omega t\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = (vt + a\sin\omega t)\hat{i} + (R + a\cos\omega t)\hat{j}$$

$$x(t) = (R\omega t + a\sin\omega t) \quad y(t) = (R + a\cos\omega t)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{v}(t) = \omega(R + a\cos\omega t)\hat{i} - a\omega\sin\omega t\hat{j}$$

$$v_x(t) = \omega(R + a\cos\omega t)$$

$$v_y(t) = -a\omega\sin\omega t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{a}(t) = (-a\omega^2\sin\omega t)\hat{i} - (a\omega^2\cos\omega t)\hat{j}$$

$$a_x(t) = -a\omega^2\sin\omega t$$

$$a_y(t) = -a\omega^2\cos\omega t$$

$$a_x(t) = -\frac{v^2}{a}\sin\omega t$$

$$a_y(t) = -\frac{v^2}{a}\cos\omega t$$