

عملگر $\vec{\nabla}$ در دستگاه مختصات کارتری

$$du(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \equiv \vec{\nabla} u \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} u = \hat{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

عملگر $\vec{\nabla}$ در دستگاه مختصات استوانه ای

$$du(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} dz \equiv \vec{\nabla} u \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{k}$$

$$d\vec{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} u(\rho, \varphi, z) = \hat{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

عملگر $\vec{\nabla}$ در دستگاه مختصات کروی

$$du(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi \equiv \vec{\nabla} u \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}$$

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla} u(r, \theta, \varphi) = \hat{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

گرایان در دستگاه مختصات کارتری

عملگر برداری $\vec{\nabla}$ را در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر به دست آوردیم:

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

ضرب اسکالری عملگر $\vec{\nabla}$ فوق در تابع اسکالر سه متغیره $u(x,y,z)$ گرایان این تابع را در این دستگاه مختصات به دست می دهد

$$\vec{\nabla} u(x, y, z) = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u(x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} u(x, y, z) = \hat{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial u}{\partial z}$$

گرادیان در دستگاه مختصات استوانه ای

عملگر برداری $\vec{\nabla}$ را در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت زیر به دست آوردیم:

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

ضرب اسکالری عملگر $\vec{\nabla}$ فوق در تابع اسکالر سه متغیره $u(\rho, \varphi, z)$ گرادیان این تابع را در این دستگاه مختصات به دست می دهد

$$\vec{\nabla} u(\rho, \varphi, z) = \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u(\rho, \varphi, z)$$

$$\vec{\nabla} u(\rho, \varphi, z) = \hat{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial u}{\partial z}$$

گرادیان در دستگاه مختصات کروی

عملگر برداری $\vec{\nabla}$ را در دستگاه مختصات کروی به صورت زیر به دست آوردیم:

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ضرب اسکالری عملگر $\vec{\nabla}$ فوق در تابع اسکالر سه متغیره $u(r, \theta, \varphi)$ گرادیان این تابع را در این دستگاه مختصات به دست می دهد

$$\vec{\nabla} u(r, \theta, \varphi) = \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) u(r, \theta, \varphi)$$

$$\vec{\nabla} u(r, \theta, \varphi) = \hat{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

دیورژانسی در دستگاه مختصات کارتری

عملگر برداری $\vec{\nabla}$ را در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر به دست آوردیم:

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) A_i = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

ضرب درونی عملگر $\vec{\nabla}$ فوق در تابع برداری سه متغیره $\vec{A}(x,y,z)$ دیورژانس این تابع را در این دستگاه مختصات به دست می دهد

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z) = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

دیورژانس در دستگاه مختصات استوانه ای

عملگر برداری $\vec{\nabla}$ را در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت زیر به دست آوردیم:

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

ضرب درونی عملگر $\vec{\nabla}$ فوق در تابع برداری سه متغیره $\vec{A}(\rho, \varphi, z)$ دیورژانس این تابع را در این دستگاه مختصات به دست می دهد

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\rho, \varphi, z) = \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_{\rho} \hat{\rho} + A_{\varphi} \hat{\varphi} + A_z \hat{k})$$

تمرین: با استفاده از رابطه فوق $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ را به دست آورید:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

راهنمایی: به متغیر بودن بردار های یکه استوانه ای هنگام مشتق گیری توجه کنید:

$$\hat{\rho} = \cos\varphi \hat{i} + \sin\varphi \hat{j}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi \hat{i} + \cos\varphi \hat{j}$$

دیورژانس در دستگاه مختصات کروی

عملگر برداری $\vec{\nabla}$ را در دستگاه مختصات کروی به صورت زیر به دست آوردیم:

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ضرب درونی عملگر $\vec{\nabla}$ فوق در تابع برداری سه متغیره $\vec{A}(r, \theta, \varphi)$ دیورژانس این تابع را در این دستگاه مختصات به دست می دهد

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(r, \theta, \varphi) = \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi})$$

تمرین: با استفاده از رابطه فوق $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ را به دست آورید:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

راهنمایی: به متغیر بودن بردار های یکه کروی هنگام مشتق گیری توجه کنید:

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

کرل در دستگاه مختصات کارتری

عملگر برداری $\vec{\nabla}$ را در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر به دست آوردیم:

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

ضرب خارجی عملگر $\vec{\nabla}$ فوق در تابع برداری سه متغیره $\vec{A}(x,y,z)$ کرل این تابع را در این دستگاه مختصات به دست می دهد

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(x, y, z) = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\mathbf{curl} \mathbf{A} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

کرل در دستگاه مختصات استوانه ای

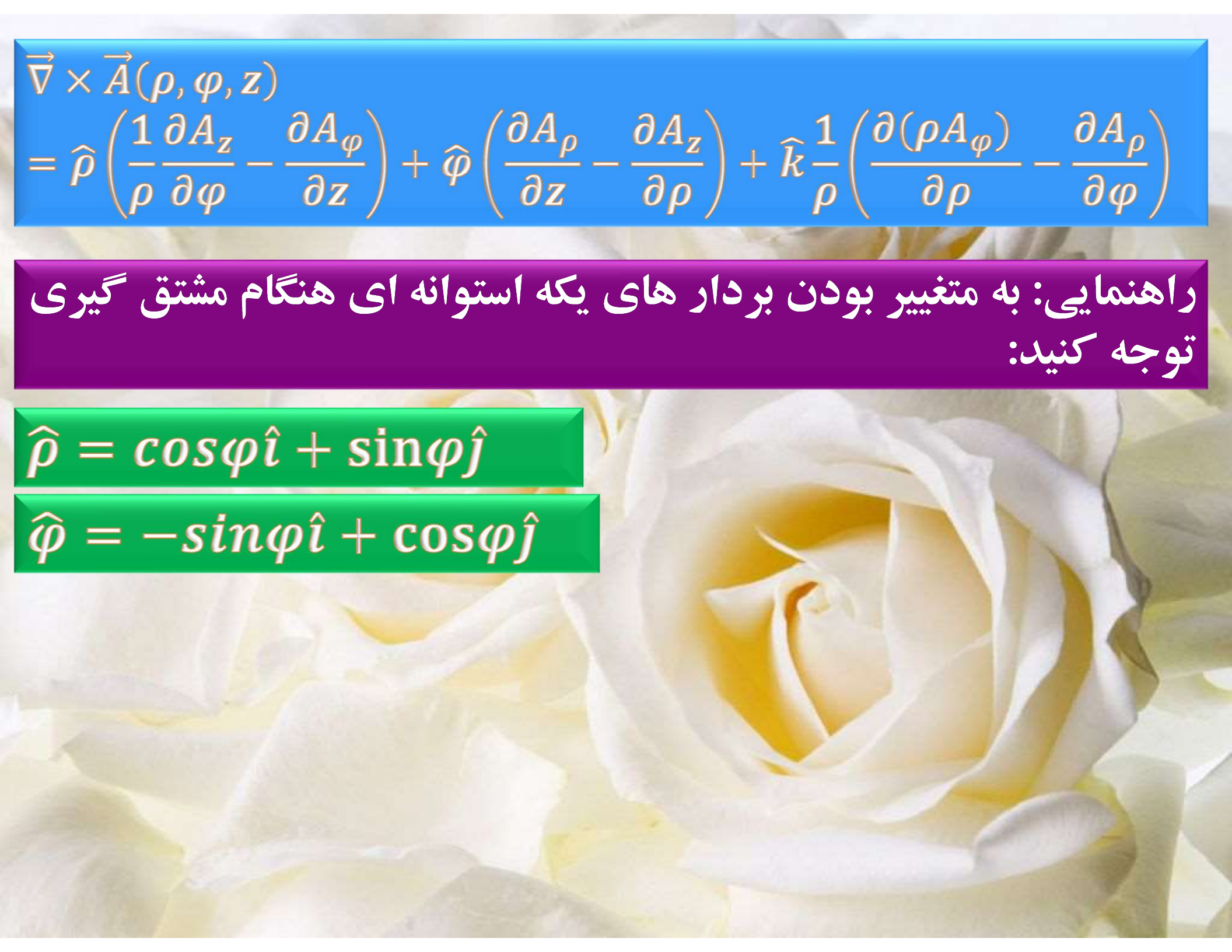
عملگر برداری $\vec{\nabla}$ را در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت زیر به دست آوردیم:

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

ضرب خارجی عملگر $\vec{\nabla}$ فوق در تابع برداری سه متغیره $\vec{A}(\rho, \varphi, z)$ کرل این تابع را در این دستگاه مختصات به دست می دهد

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\rho, \varphi, z) = \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{k})$$

تمرین: با استفاده از رابطه فوق $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ را به دست آورید:


$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\rho, \varphi, z) \\ = \hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{\varphi} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{k} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right)$$

راهنمایی: به متغیر بودن بردار های یکه استوانه ای هنگام مشتق گیری توجه کنید:

$$\hat{\rho} = \cos\varphi \hat{i} + \sin\varphi \hat{j}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi \hat{i} + \cos\varphi \hat{j}$$

کرل در دستگاه مختصات کروی

عملگر برداری $\vec{\nabla}$ را در دستگاه مختصات کروی به صورت زیر به دست آوردیم:

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ضرب خارجی عملگر $\vec{\nabla}$ فوق در تابع برداری سه متغیره $\vec{A}(r, \theta, \varphi)$ کرل این تابع را در این دستگاه مختصات به دست می دهد

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \times \vec{A}(r, \theta, \varphi) \\ &= \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \times (A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}) \end{aligned}$$

تمرین: با استفاده از رابطه فوق $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ را به دست آورید:

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \times \vec{A}(r, \theta, \varphi) \\ &= \hat{r} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ &+ \hat{\theta} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) + \hat{\varphi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

راهنمایی: به متغیر بودن بردار های یکه کروی هنگام مشتق گیری توجه کنید:

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

عملگر لاپلاسی

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

لاپلاسی در دستگاه مختصات کارتری

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \psi = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}$$

تمرین: عملگر لاپلاسی را در دستگاه مختصات استوانه ای به دست آورید

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

راهنمایی: حاصل ضرب درونی زیر را به دست آورید:

$$\nabla^2 = \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

به متغیر بودن بردار های یکه استوانه ای هنگام مشتق گیری توجه کنید:

$$\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

تمرین: عملگر لاپلاسی را در دستگاه مختصات کروی به دست آورید

$$\nabla^2$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

راهنمایی: حاصل ضرب درونی زیر را به دست آورید:

$$\nabla^2 = \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

گرایان یک کره را حساب کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - c = 0$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\frac{\vec{\nabla} f(x, y, z)}{|\vec{\nabla} f(x, y, z)|} = \frac{2(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$

تمرین: ثابت کنید که گرادیان یک صفحه بردار عمود بر صفحه را به دست می دهد:

راهنمایی: از معادله صفحه گرادیان بگیرید:

$$ax + by + cz = d$$

$$f(x, y, z) = ax + by + cz - d = 0$$

پس گرادیان یک سطح یا یک رویه بردار عمود بر آن سطح یا رویه را به دست می دهد

تمرین: الف) میدانهای برداری زیر را رسم کنید:

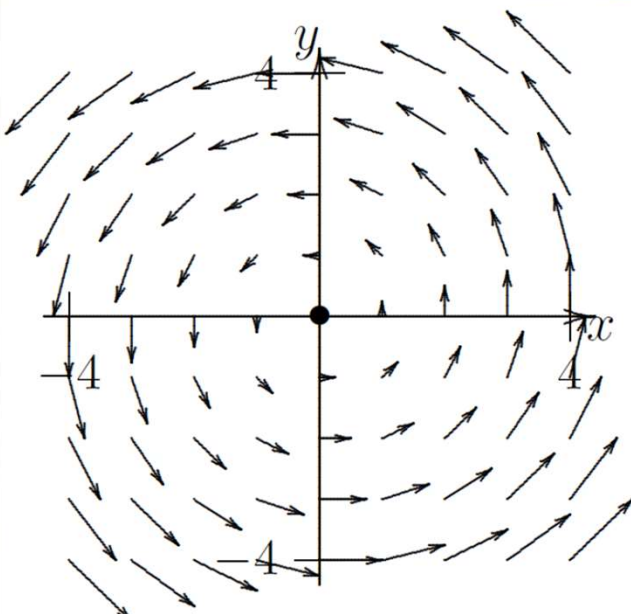
$$\vec{F} = (-y, x, 0)$$

$$\vec{F} = (y, x, 0)$$

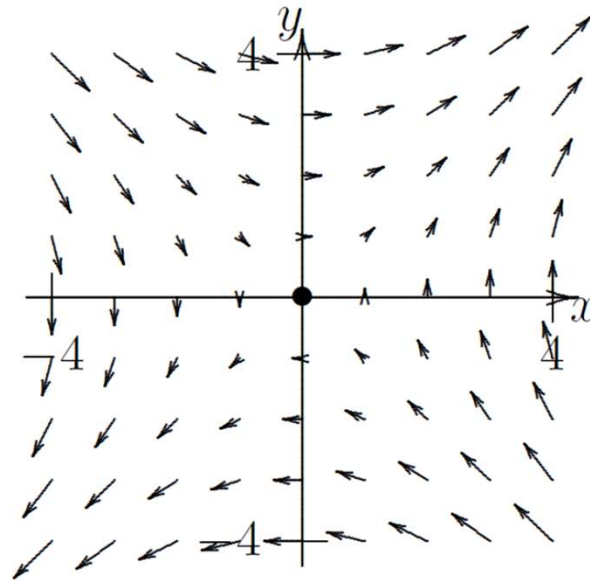
$$\vec{F} = (2x, 2y, 0)$$

ب) کرل و دیورژانس این میدانهای برداری را حساب کنید و تعیین کنید که کرل کدامیک برابر صفر است

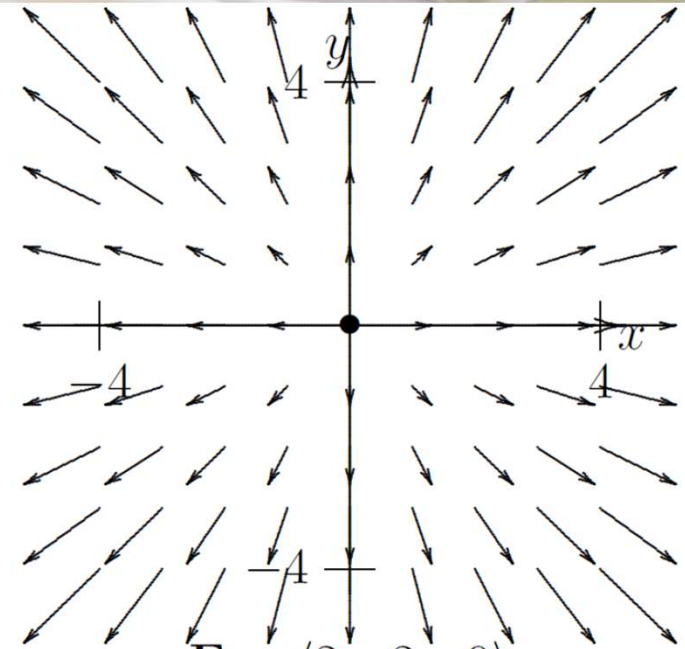
ج) نتایج را به صورت فیزیکی تفسیر کنید



$$\mathbf{F} = \langle -y, x, 0 \rangle$$



$$\mathbf{F} = \langle y, x, 0 \rangle$$

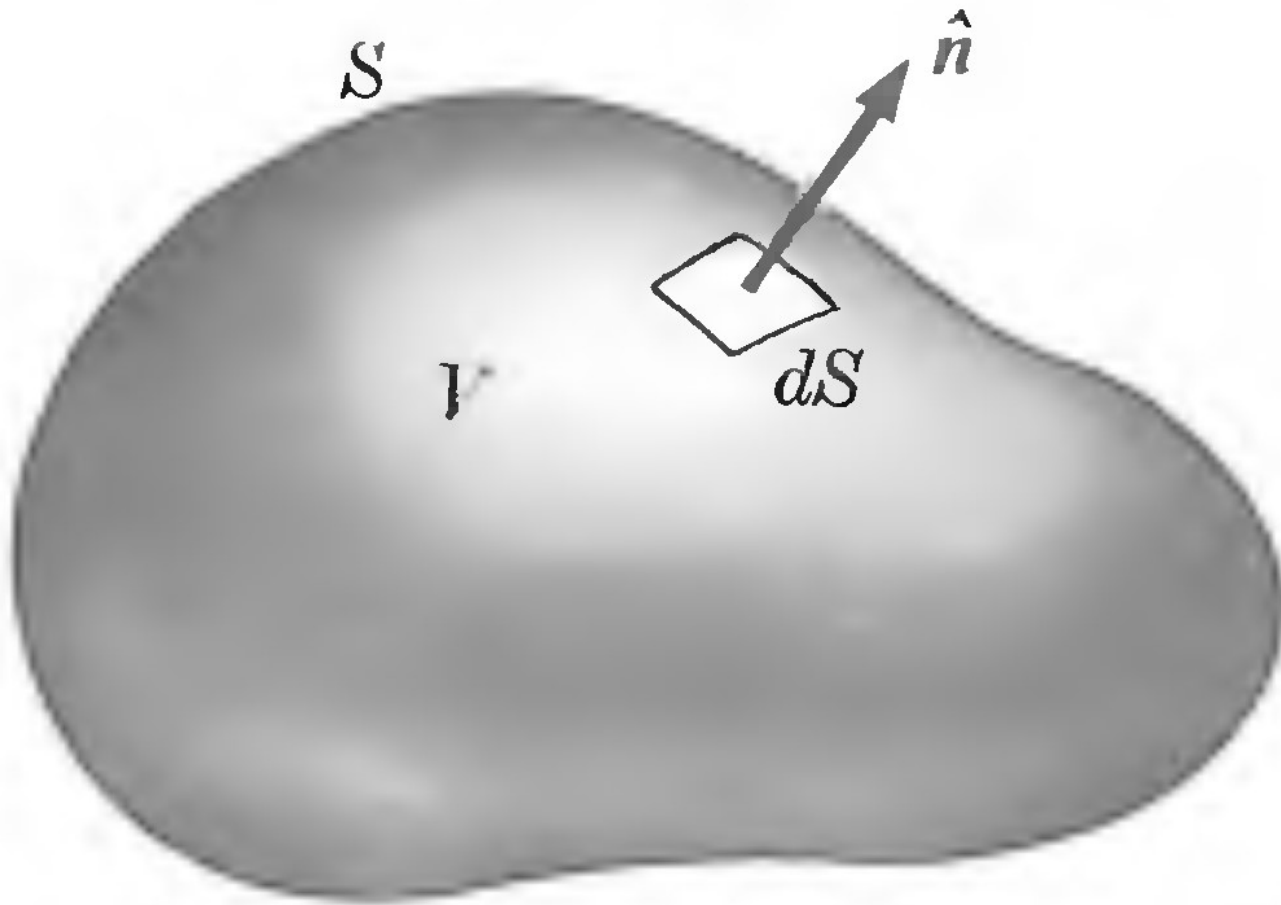


$$\mathbf{F} = \langle 2x, 2y, 0 \rangle$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A} dS$$

قضیه گوس

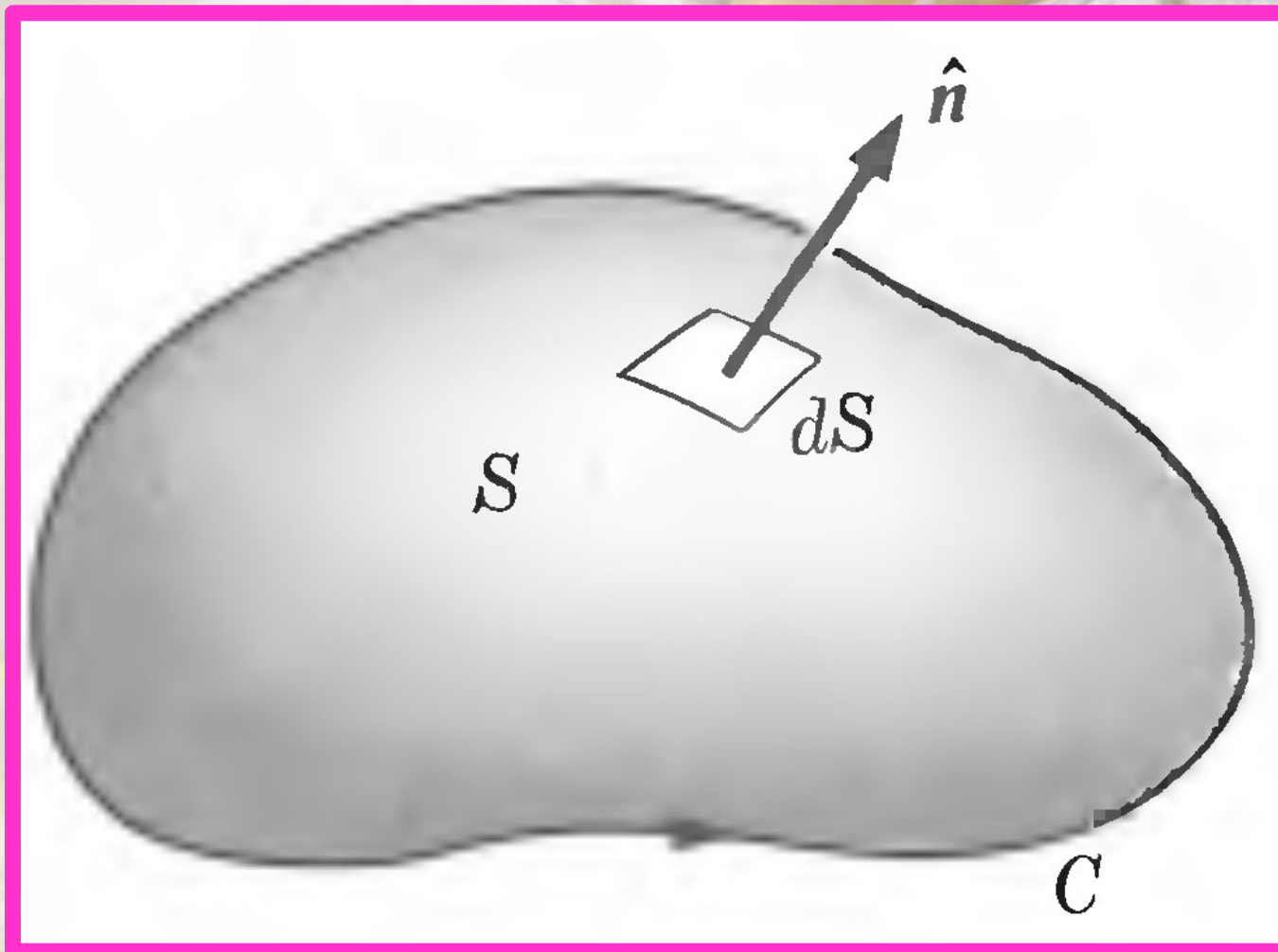
این قضیه نشان می دهد که چطور می توان یک انتگرال حجمی را به یک انتگرال سطحی تبدیل کرد و بر عکس

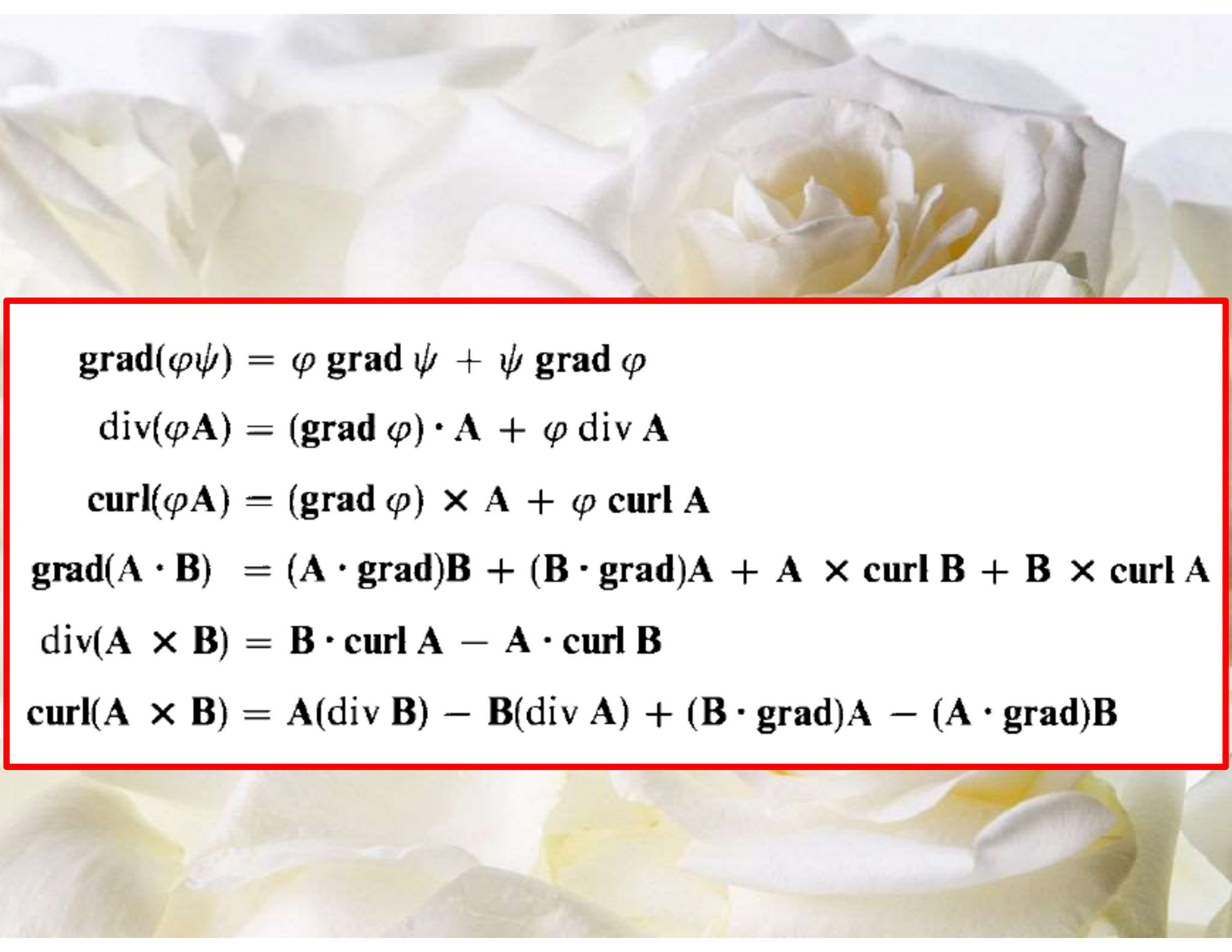


$$\oint_S \hat{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

قضیه استوکس

این قضیه نشان می دهد که چطور می توان یک انتگرال سطحی را به یک انتگرال خطی تبدیل کرد و بر عکس




$$\mathbf{grad}(\varphi\psi) = \varphi \mathbf{grad} \psi + \psi \mathbf{grad} \varphi$$

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) = (\mathbf{grad} \varphi) \cdot \mathbf{A} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{A}$$

$$\operatorname{curl}(\varphi \mathbf{A}) = (\mathbf{grad} \varphi) \times \mathbf{A} + \varphi \operatorname{curl} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{curl} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{curl} \mathbf{A}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{B}$$

$$\operatorname{curl}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\operatorname{div} \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\operatorname{div} \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{B}$$

$$\mathbf{curl grad} \varphi \equiv 0$$

$$\mathbf{div curl} \mathbf{A} \equiv 0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{curl grad} \varphi &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}\end{aligned}$$

$$\mathbf{curl grad} \varphi = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ikj} \mathbf{e}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j}$$

$$\mathbf{curl grad} \varphi = - \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j}$$

$$\mathbf{curl grad} \varphi \equiv 0$$

$$\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$$