

قضایای اندازه حرکت و انرژی در سه بعد

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

قانون دوم نیوتن در سه بعد:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

که همان شکل دیفرانسیلی قضیه اندازه حرکت است و برای ابعاد بالاتر از یک بعد هم قابل استفاده است

$$d\vec{p} = \vec{F} dt$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

که همان شکل انتگرالی قضیه اندازه حرکت است و برای ابعاد بالاتر از یک بعد هم قابل استفاده است

انتگرال طرف راست، ضربه ای است که توسط نیروی $\vec{F}$ وارد می شود و برداری است که مولفه های آن انتگرالهای متناظر مولفه های $\vec{F}$ اند

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

از طرفی داریم که:

که همان شکل دیفرانسیلی قضیه انرژی جنبشی است و برای ابعاد بالاتر از یک بعد هم قابل استفاده است

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}$$

چون:

چرا؟

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1$$

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$$T_2 - T_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

که همان شکل انتگرالی قضیه
انرژی جنبشی است و برای
ابعاد بالاتر از یک بعد هم قابل
استفاده است cc

انتگرال طرف راست، کار
انجام شده روی ذره توسط
نیروی $\vec{F}$ برای جابه جایی آن
از $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$ است

قضیه اندازه حرکت زاویه ای

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

تعریف اندازه حرکت زاویه ای:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [m(\vec{r} \times \vec{v})]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m\vec{v}) + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$$

شکل دیفرانسیلی قضیه اندازه حرکت زاویه ای، که بیان می کند آهنگ تغییرات زمانی اندازه حرکت زاویه ای برابر با گشتاور نیروی وارده بر سیستم است

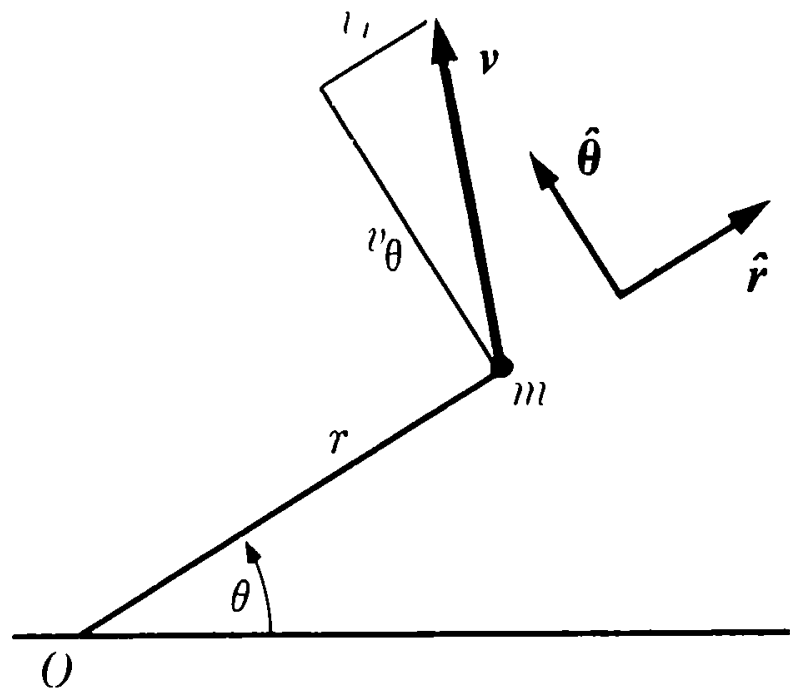
$$d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} dt = \vec{N} dt$$

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{N} dt$$

شکل انتگرالی قضیه اندازه حرکت زاویه ای، که بیان می کند تغییرات اندازه حرکت زاویه ای برابر با گشتاور نیروی وارده بر سیستم در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ است



مثال: حرکت یک ذره در دو بعد در دستگاه قطبی



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\vec{L} = m(r\hat{r} \times (v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}))$$

$$\vec{L} = mr v_\theta \hat{k} = m r^2 \dot{\theta} \hat{k}$$

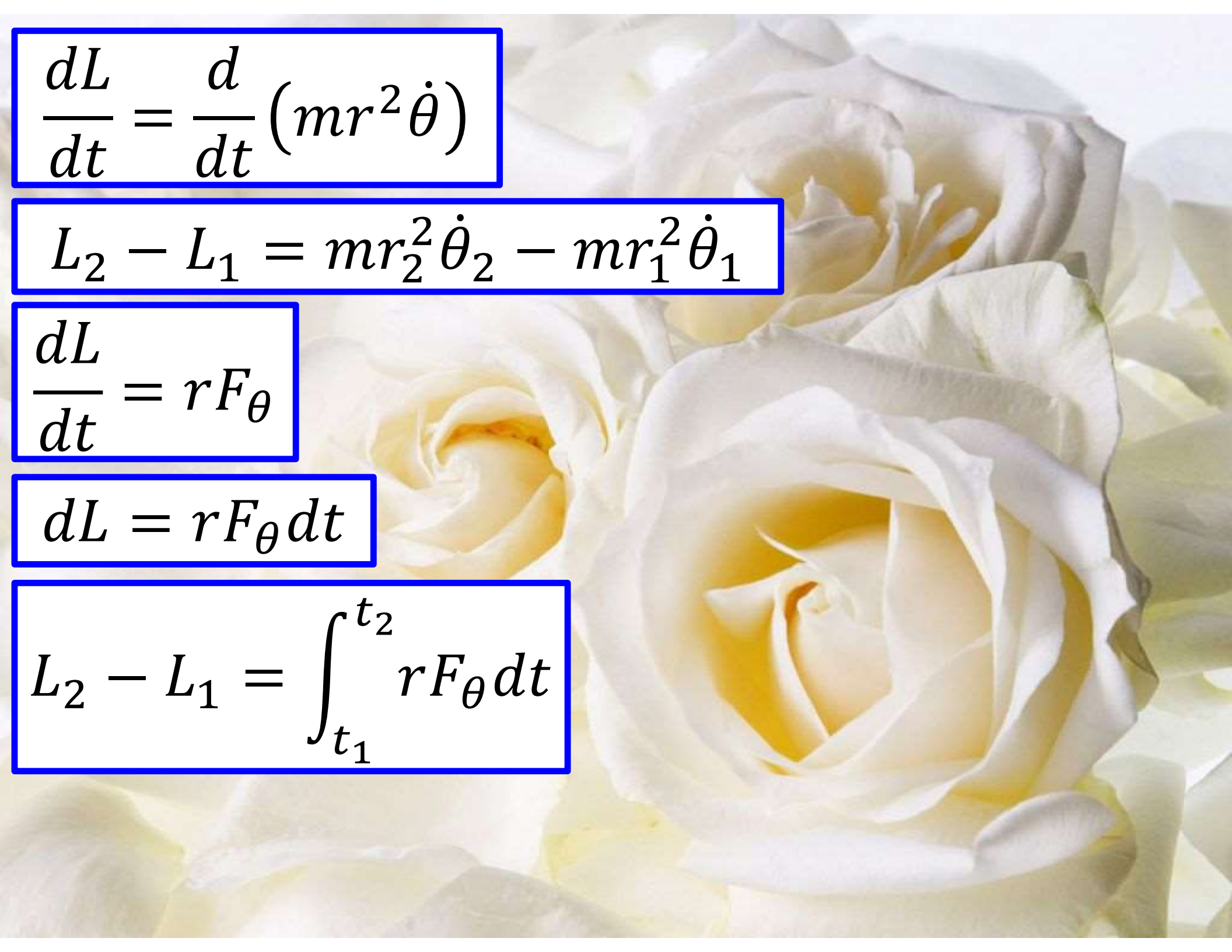
$$L = L_z = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} = m \vec{a} = m(a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta})$$

$$F_r = m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$F_\theta = m a_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\theta}) = 2m r \dot{r} \dot{\theta} + m r \ddot{\theta} = r m (2\dot{r} \dot{\theta} + \ddot{\theta}) = r F_\theta$$

The background of the entire slide is a close-up photograph of several white roses. The petals are delicate and layered, with some showing a slight yellowish tint. The lighting is soft, creating gentle shadows and highlights on the flower's surface.
$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta})$$

$$L_2 - L_1 = mr_2^2 \dot{\theta}_2 - mr_1^2 \dot{\theta}_1$$

$$\frac{dL}{dt} = rF_{\theta}$$

$$dL = rF_{\theta} dt$$

$$L_2 - L_1 = \int_{t_1}^{t_2} rF_{\theta} dt$$

بحث در باره مسئله کلی حرکت دو بعدی و سه بعدی

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

الی اصول این دسته
معادلات (کوپل شده)
با داشتن شش شرط
اولیه زیر قابل حل
هستند

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

این معادلات با یک
معادله مرتبه ششم هم
ارزاست

حل این سه معادله مرتبه دوم یا یک معادله مرتبه ششم می تواند دشوار
باشد، لذا به موارد خاص که ساده تر هستند می پردازیم:

یکی از موارد خاص آن است که هر مولفه نیرو فقط شامل مختصه متناظر و مشتق آن باشد:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x (x, \dot{x}, t)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y (y, \dot{y}, t)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z (z, \dot{z}, t)$$

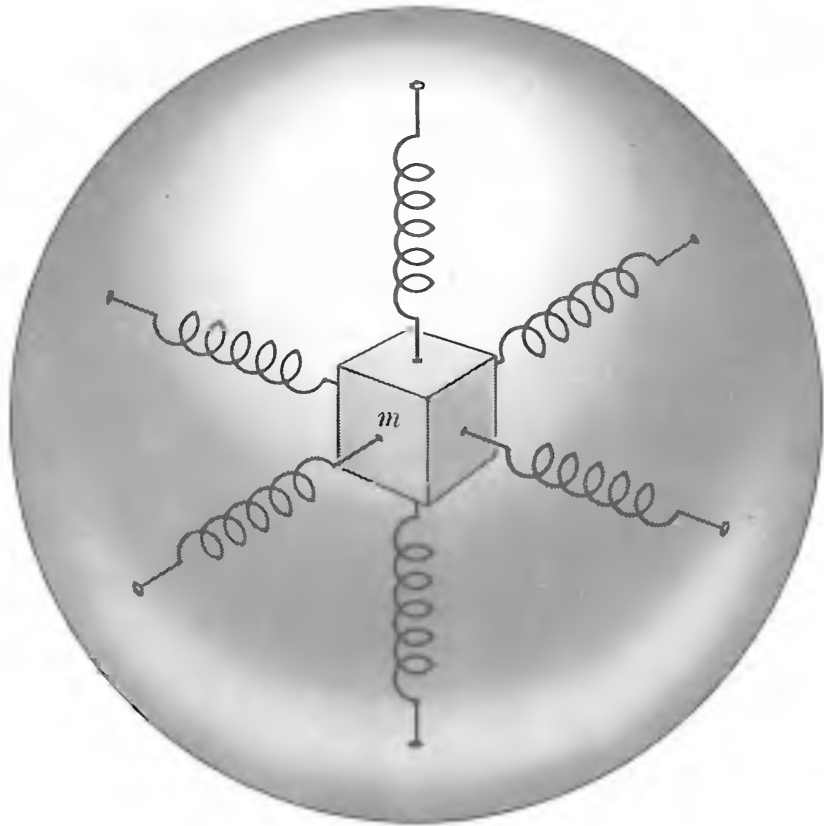
در این صورت این سه معادله مرتبه دوم دیگر با یکدیگر کوپل نشده اند و لذا سه معادله مستقل از هم را تشکیل می دهند

که می توان آنها را به طور جداگانه حل کرد

در واقع در این صورت یک مساله سه بعدی به سه مساله یک بعدی جدا از هم تبدیل می شود

به عنوان مثالی از این دست می توان به حرکت یک توپ واقع در یک تشت ژله یا اتمی در شبکه بلوری اشاره کرد

نوسانگر هماهنگ در فضاهاى دو بعدى و سه بعدى



$$m\ddot{x} = F_x(x) = -k_x x$$

$$m\ddot{y} = F_y(y) = -k_y y$$

$$m\ddot{z} = F_z(z) = -k_z z$$

$$x = A_x \cos(\omega_x t - \theta_x)$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t - \theta_y)$$

$$z = A_z \cos(\omega_z t - \theta_z)$$

$$\omega_x^2 = k_x/m$$

$$\omega_y^2 = k_y/m$$

$$\omega_z^2 = k_z/m$$

اگر روابط زیر برقرار باشند:

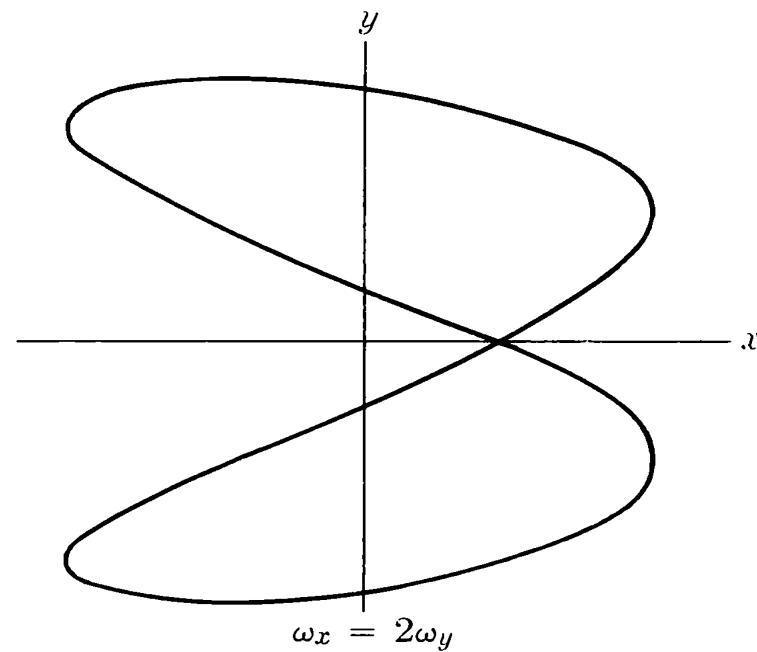
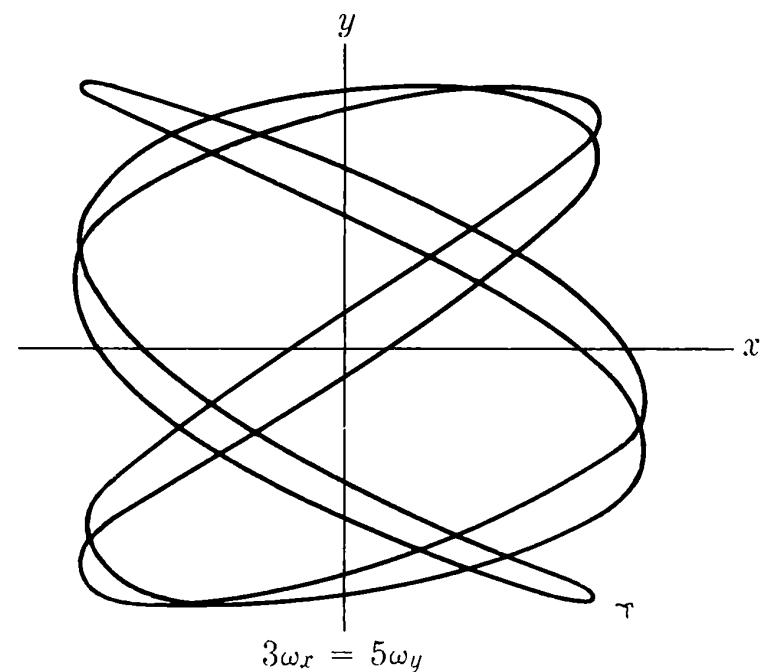
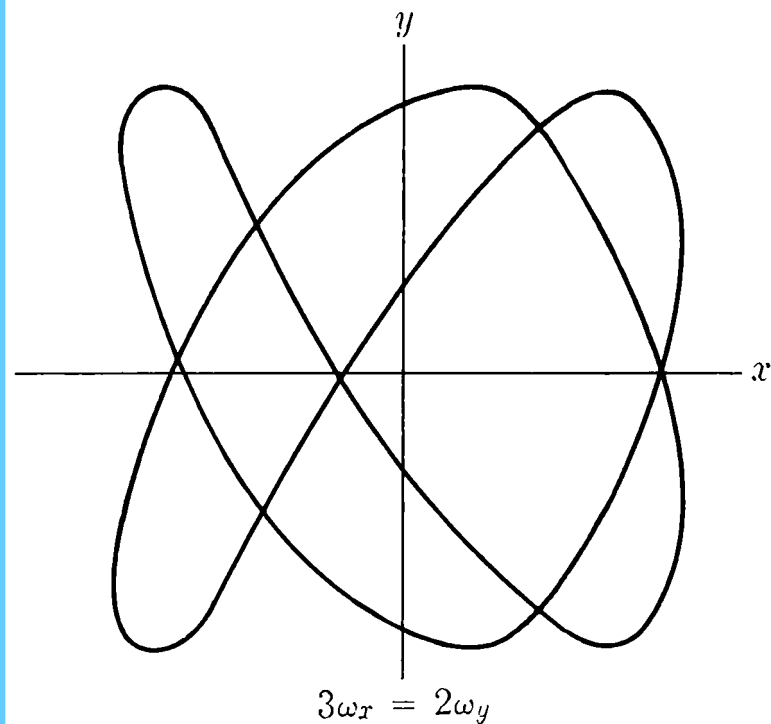
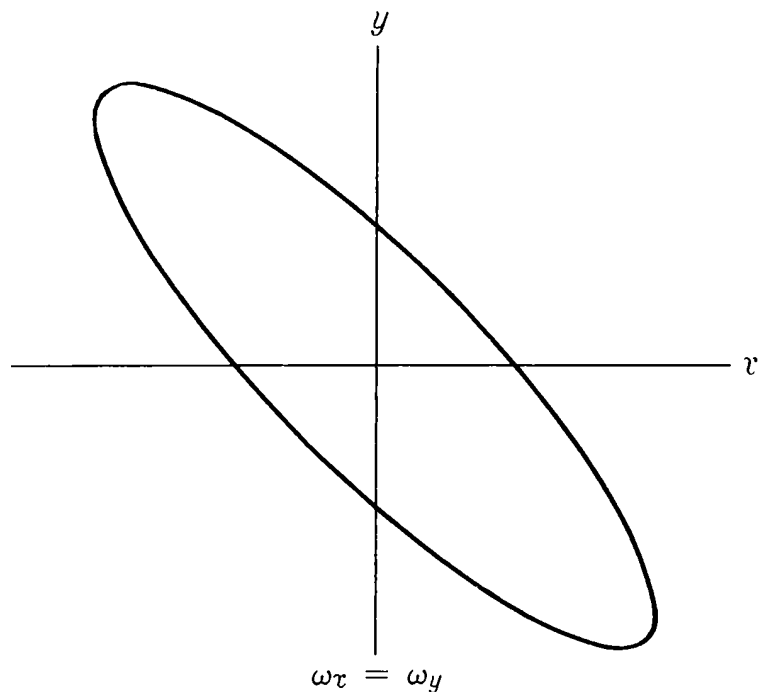
$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z}$$

آنگاه مسیر حرکت ذره در یک فضای مکعب مستطیلی شکل به ابعاد $A_x \times A_y \times A_z$ ، مسیری بسته و تناوبی با زمان تناوب زیر خواهد بود:

$$T = \frac{2\pi n_x}{\omega_x} = \frac{2\pi n_y}{\omega_y} = \frac{2\pi n_z}{\omega_z}$$

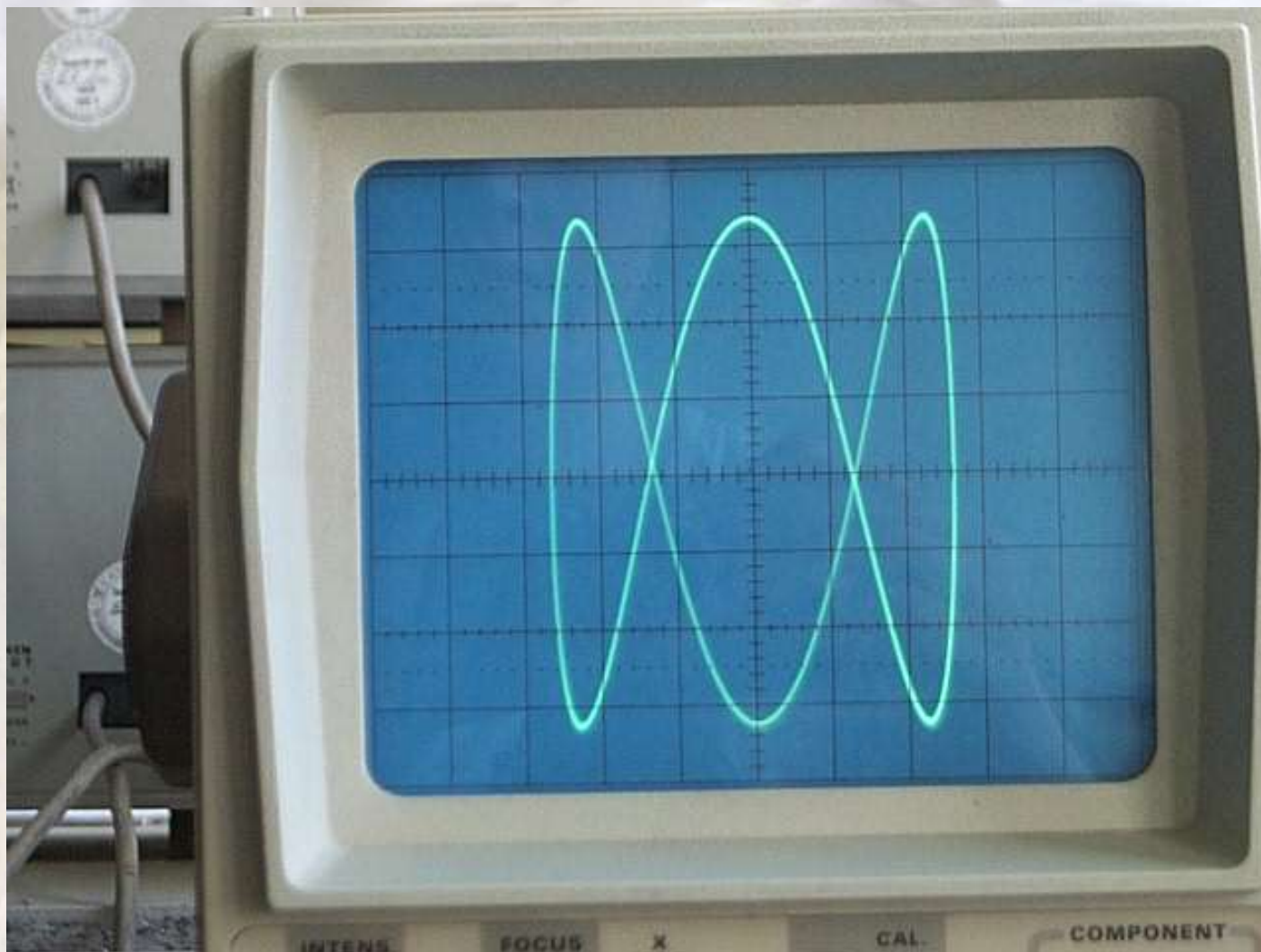
طی یک زمان تناوب، مختصه x ، n_x بار و مختصه y ، n_y بار و مختصه z ، n_z بار نوسان می کنند به طوری که در پایان زمان تناوب ذره به مکان و سرعت اولیه خود باز می گردد

در فضای دو بعدی مسیر حرکت ذره اشکال زیبایی را تولید می کند، که به آنها اشکال لیسازو گویند



شکلهای لیسازو





$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z}$$

اگر روابط زیر برقرار نباشند:

آنگاه حرکت تناوبی نخواهد بود

در این صورت ذره پس از گذشت زمان به اندازه کافی طولانی تمام فضای $A_x \times A_y \times A_z$ را پر خواهد کرد

$$k_x = k_y = k_z$$

اگر هر سه ثابت فتر مساوی باشند:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z$$

آنگاه هر سه فتر کانس با هم مساوی خواهند شد:

در این صورت نوسانگر را ایزوتروپ یا همگن گویند

در این صورت حرکت تناوبی و مدار آن یا بیضی شکل، یا مستقیم الخط یا دایروی است

برای اثبات نکته فوق توجه خود را به دو بعد معطوف می کنیم:

نوسانگر هماهنگ ایزوتروپ دو بعدی

$$m\ddot{x} = -kx = -kr\cos\theta$$

$$m\ddot{y} = -ky = -kr\sin\theta$$

$$\theta_x - \theta_y = \delta$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$y = \frac{A_y}{A_x} x \cos\delta - A_y \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_x}\right)^2} \sin\delta$$

$$x = A_x \cos(\omega_0 t - \theta_x)$$

$$y = A_y \cos(\omega_0 t - \theta_y)$$

$$\cos(\omega_0 t - \theta_x) = \frac{x}{A_x}$$

$$y = A_y \cos(\omega_0 t - \theta_x + (\theta_x - \theta_y))$$

$$y = A_y \cos(\omega_0 t - \theta_x) \cos(\theta_x - \theta_y) - A_y \sin(\omega_0 t - \theta_x) \sin(\theta_x - \theta_y)$$

$$y = \frac{A_y}{A_x} x \cos \delta - A_y \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} \sin \delta$$

$$A_x y - A_y x \cos \delta = -A_y \sqrt{A_x^2 - x^2} \sin \delta$$

$$A_x^2 y^2 - 2A_x A_y x y \cos \delta + A_y^2 x^2 \cos^2 \delta = A_y^2 A_x^2 \sin^2 \delta - A_y^2 x^2 \sin^2 \delta$$

$$A_x^2 y^2 - 2A_x A_y x y \cos \delta + A_y^2 x^2 (\cos^2 \delta + \sin^2 \delta) = A_y^2 A_x^2 \sin^2 \delta$$

$$A_y^2 x^2 - 2A_x A_y x y \cos \delta + A_x^2 y^2 = A_y^2 A_x^2 \sin^2 \delta$$

که بسته به اختلاف فاز δ و نسبت دامنه ها A_x/A_y می تواند معادله یک خط، دایره یا بیضی باشد:

$$A_y^2 x^2 - 2A_x A_y xy \cos \delta + A_x^2 y^2 = A_y^2 A_x^2 \sin^2 \delta$$

$$A_y^2 x^2 + A_x^2 y^2 = A_y^2 A_x^2$$

آنگاه:

$$\delta = \pm \frac{\pi}{2}$$

اگر:

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

که معادله یک بیضی است

$$x^2 + y^2 = R^2$$

آنگاه:

$$A_x = A_y = R$$

اگر:

که معادله یک دایره است

$$A_y^2 x^2 \mp 2A_x A_y xy + A_x^2 y^2 = 0$$

آنگاه:

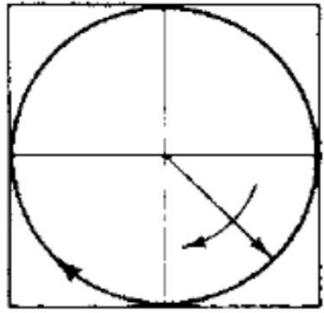
$$\delta = 0, \pi$$

اگر:

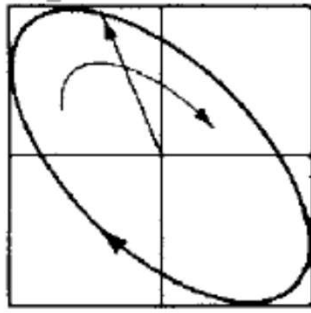
$$(A_y x \mp A_x y)^2 = 0$$

$$y = \pm \frac{A_y}{A_x} x$$

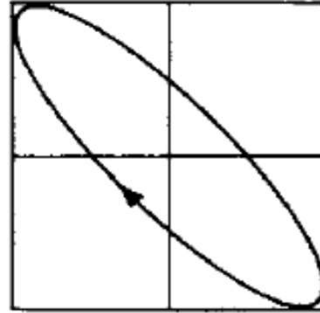
که معادله یک خط است



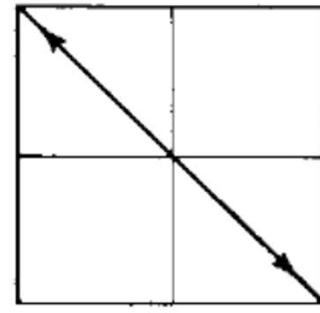
$\delta = 90^\circ$



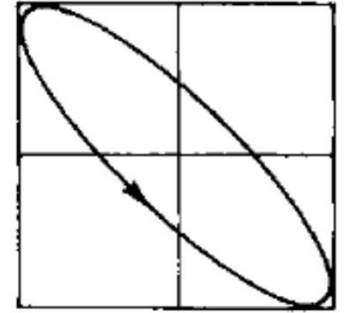
$\delta = 120^\circ$



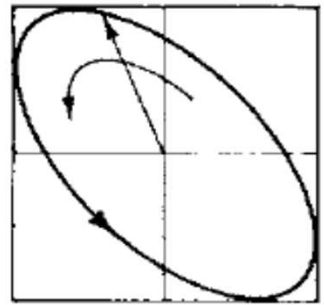
$\delta = 150^\circ$



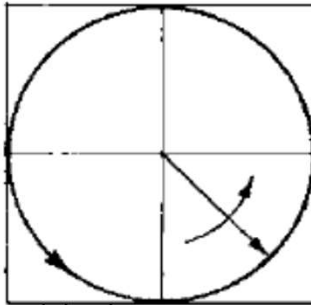
$\delta = 180^\circ$



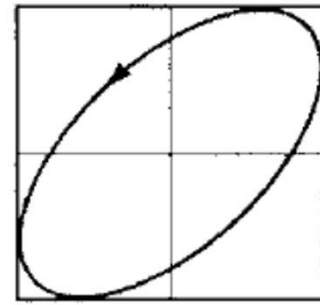
$\delta = 210^\circ$



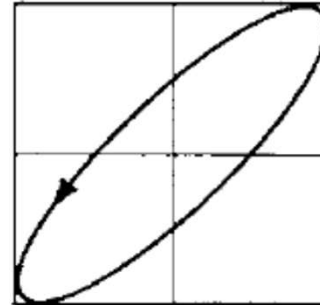
$\delta = 240^\circ$



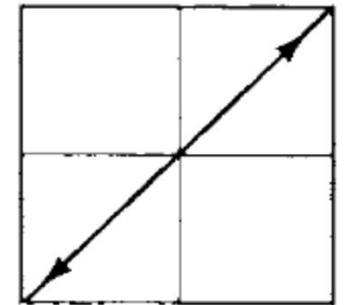
$\delta = 270^\circ$



$\delta = 300^\circ$



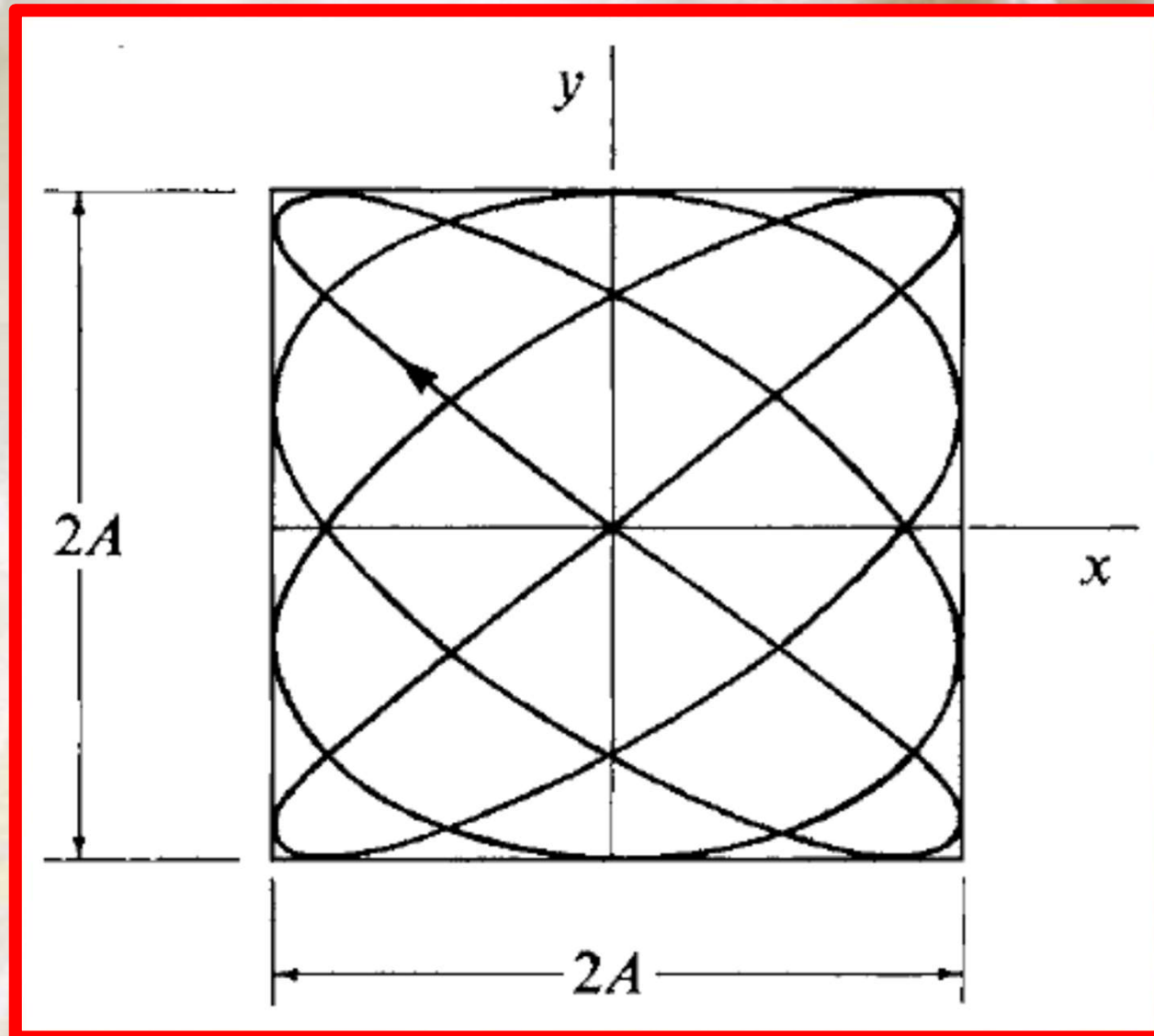
$\delta = 330^\circ$



$\delta = 360^\circ$

$$A_x = A_y$$

اگر فرکانسها مساوی نباشند مسیرها دیگر بیضی، دایره یا خط نخواهند شد، بلکه اشکال لپساژو خواهند شد



$$\omega_x = 3/4\omega_y$$

$$\delta = 0$$

$$A_x = A_y = A$$

اشکال لیسازو شدیداً به اختلاف فازها بستگی دارند:

