

انرژی پتانسیل

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

اگر نیروی $\vec{F}$ وارد بر ذره تابعی از مکان ذره، $\vec{r}$ ، باشد، کار انجام شده توسط نیرو به صورت زیر تعریف می شود

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

می توان انرژی پتانسیل را به صورت کار انجام شده بر ذره وقتی که از $\vec{r}$ به نقطه مرجع $\vec{r}_s$ حرکت می کند، تعریف کنیم:

در تعریف انرژی پتانسیل به صورت فوق به طور ضمنی فرض کرده ایم که انرژی پتانسیل فقط تابعی از مکان $\vec{r}$ و نقطه مرجع $\vec{r}_s$ (که یک نقطه ثابت و اختیاری در فضا است) باشد

اما باید توجه کرد که در حالت کلی انتگرال سمت راست می تواند به مسیر انتگرال گیری از $\vec{r}$ به $\vec{r}_s$ بستگی داشته باشد

لذا تعریف انرژی پتانسیل فقط در صورتی امکان پذیر است که انتگرال طرف راست مستقل از مسیر باشد

نکته فوق معادل دیفرانسیل کامل فرض کردن انرژی پتانسیل است در صورت استقلال از مسیر می توانیم بنویسیم:

$$dV(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

$$dV(\vec{r}) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}$$

به دلیل دیفرانسیل کامل بودن داریم:

از مقایسه دو رابطه فوق خواهیم داشت:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

حال اگر از طرفین رابطه به دست آمده بین نیرو انرژی پتانسیل کرل بگیریم خواهیم داشت که:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0$$

از طرفی طرف راست رابطه فوق همواره صفر است، یعنی:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

پس طرف چپ هم باید صفر شود:

چون شرط فوق با فرض استقلال از مسیر (یا فرض وجود تابع انرژی پتانسیل وابسته به مکان) به دست آمد، پس شرط فوق شرط لازمی است که باید توسط نیرو برقرار شود تا بتوان یک انرژی پتانسیل را تعریف کرد

حال ثابت می کنیم که شرط فوق نه تنها لازم بلکه کافی هم هست

برای اثبات کافی بودن شرط $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ از قضیه استوکس استفاده می کنیم:

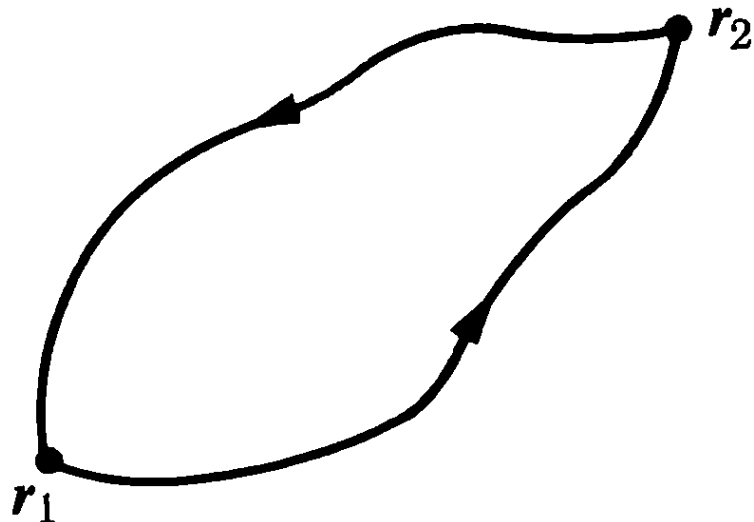
$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_s \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) dS$$

با فرض برقرار بودن شرط $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ ، طرف راست صفر می شود

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

پس برای هر مسیر بسته ای خواهیم داشت که:

لذا کار انجام شده هنگام رفتن از $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$ از مسیر مستقل خواهد بود، زیرا:



$$0 = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

پس، میزان کار انجام شده در هر یک از دو مسیر یکسان است.

پس $\vec{V} \times \vec{F} = 0$ شرط لازم و کافی برای استقلال از مسیر بودن کار یا تابع انرژی پتانسیل است

اگر $\vec{V} \times \vec{F} = 0$ آنگاه:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_s} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = T_2 - T_1$$

$$T_2 - T_1 = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

$$T_1 + V(\vec{r}_1) = T_2 + V(\vec{r}_2)$$

$$T + V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V = E$$

قضیه قانون بقا انرژی:

نیرویی که فقط تابعی از مکان باشد، و کرل آن صفر شود، کنسرواتیو (بقادار) نامیده می شود، زیرا به قضیه بقا مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل منجر می گردد.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

اگر نیرو تابعی از زمان و مکان باشد:

در این صورت اگر در یک لحظه از زمان کرل نیرو هم صفر باشد، آنگاه هنوز هم می توان یک تابع انرژی پتانسیل به صورت زیر تعریف کرد

$$V(\vec{r}, t) = - \int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}$$

اما باید توجه نمود که در این حالت قانون بقا انرژی را نمی توان اثبات کرد

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}, t)$$

و تغییر انرژی جنبشی دیگر منهای کار انجام شده بر ذره نیست:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq T_2 - T_1$$

$$V(\vec{r}, t) = - \int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}$$

زیرا انتگرالی که انرژی پتانسیل را در یک زمان معین t تعریف می کند، از تابع نیرو در آن زمان حساب می شود:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r}$$

در حالی که انتگرالی که کار را تعریف می کند، در هر نقطه با استفاده از تابع نیرو در زمانی که ذره از آن نقطه می گذرد، حساب می گردد

یعنی در انتگرال اول زمان به صورت پارامتر وارد شده است، در حالی که در انتگرال دوم (کار) زمان به صورت متغیر دینامیکی وارد شده است

اگر نیروی وارد بر یک ذره کنسرواتیو باشد، با استفاده از قانون بقا انرژی می توان اندازه سرعت ذره v را حساب کرد:

$$T + V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V = \frac{1}{2}mv^2 + V$$

در معادله فوق انرژی E ثابت است و با شرایط اولیه حرکت تعیین می شود

اما معادله فوق جهت حرکت را به دست نمی دهد، زیرا از آن نمی توان مولفه های سرعت را به دست آورد (فقط اندازه سرعت را می توان از آن به دست آورد)

نداستن جهت حرکت در یک بعد مشکلی ایجاد نمی کرد، زیرا ذره فقط در دو جهت مثبت و منفی می توانست حرکت کند

در فضای یک بعدی فقط یک مسیر حرکت برای ذره وجود داشت (و حداکثر در 2 جهت مختلف)

اما ندانستن جهت حرکت در 2 بعد یا 3 بعد، کار را بسیار دشوار می کند، زیرا در این حالتها تعداد جهات حرکات ممکن بینهایت است

در فضاها 2 بعدی و 3 بعدی، مسیرهای زیادی برای ذره وجود دارد، که نمی توان مسیر اصلی را صرفا با اندازه سرعت تعیین کرد، مگر آن که:

(1) بتوانیم مولفه های سرعت ذره را در هر لحظه از زمان تعیین کنیم

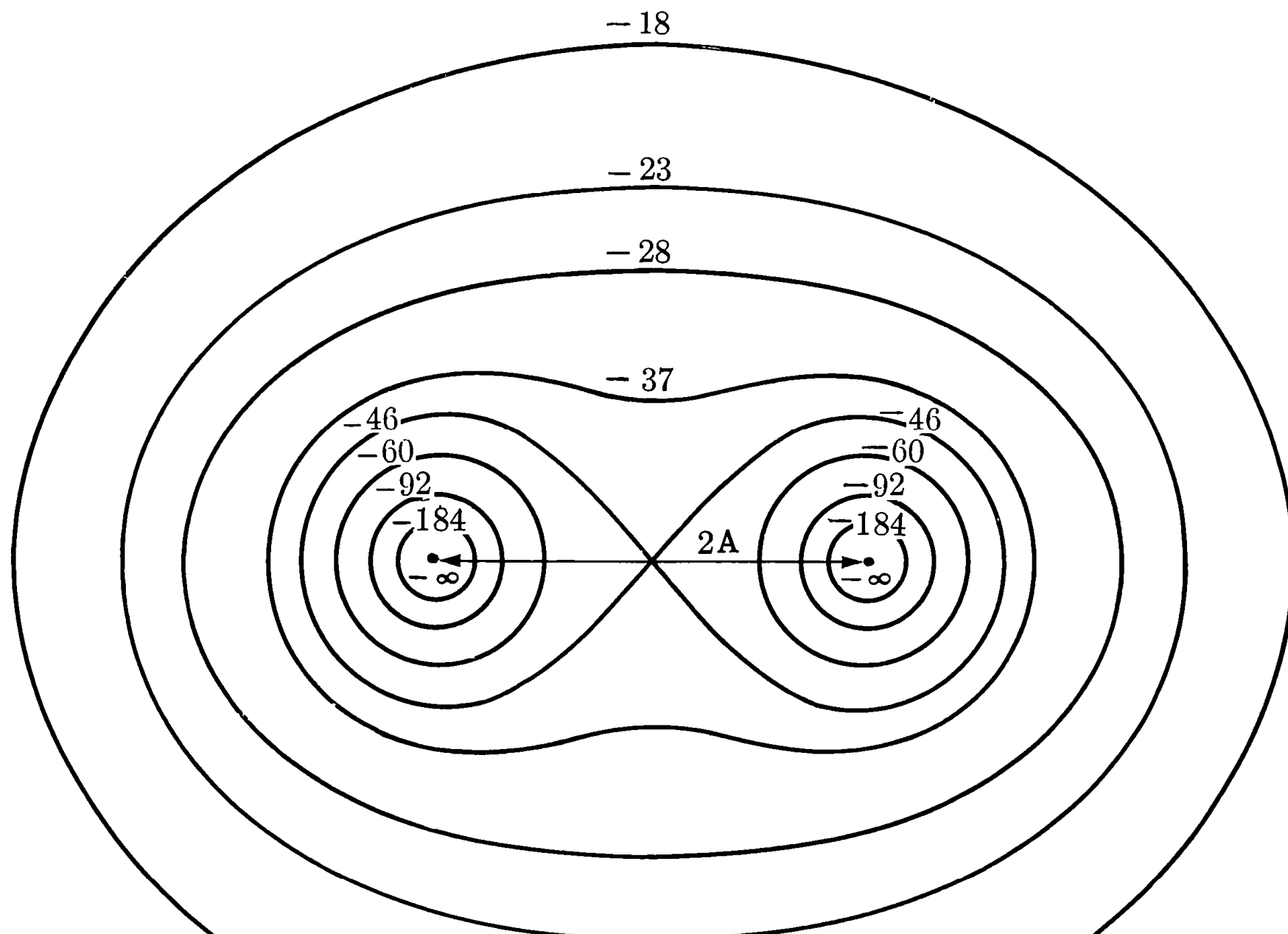
که در این صورت می توان مولفه های مکان را نیز در هر لحظه از زمان تعیین کرد و در نتیجه مسیر و جهت حرکت را به دست آورد

$$V(x, y, z) \leq E$$

(2) شرط زیر برقرار باشد:

به مثال زیر در خصوص حالت دوم توجه کنید:

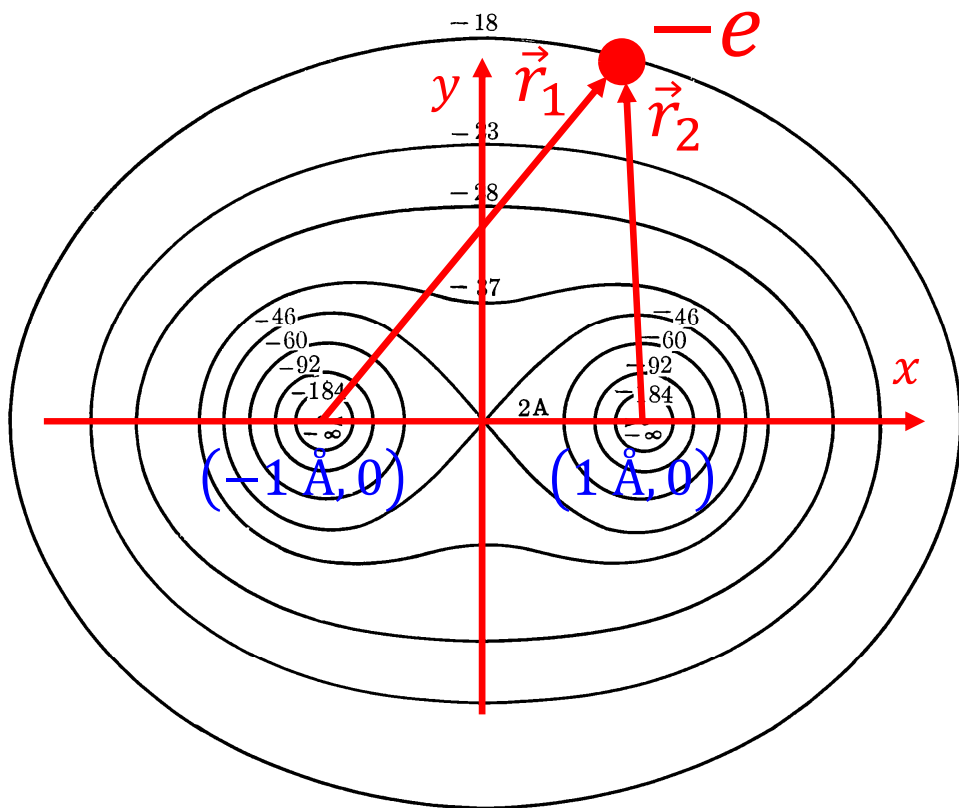
مثال: ملکول یونیزه هیدروژن H_2^+ را در نظر بگیرید و در خصوص مسیرهای ممکن حرکت یک الکترون در میدان جاذبه الکتریکی حاصل از این ملکول بحث کنید:



کانتور انرژی پتانسیل بر حسب 10^{-12} ارگ یک الکترون واقع در پتانسیل ملکول H_2^+ (دو پروتون به فاصله $2 \text{ \AA}$ از یکدیگر)

انرژی پتانسیل الکترون در میدان
جاذبه این ملکول به صورت زیر
است:

$$V(x, y, z) = -\frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2}$$



$$E < -46 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

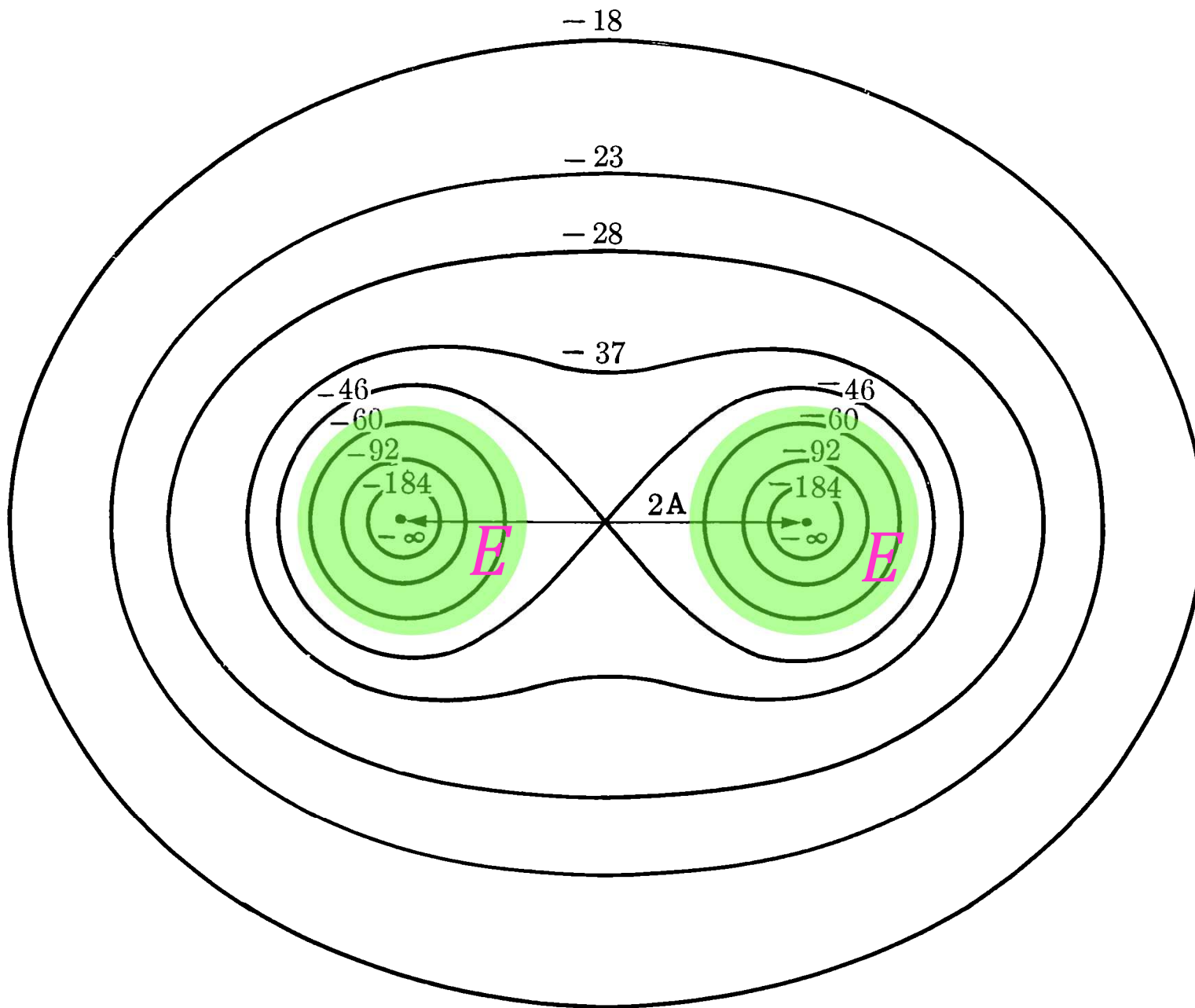
اگر:

آنگاه محل الکترون به ناحیه یکی از پروتونها محدود می شود

یعنی یا حول پروتون 1 یا حول پروتون 2 واقع می شود

نواحی مجاز با رنگ سبز و نواحی ممنوعه با رنگ قرمز نشان داده
خواهند شد:

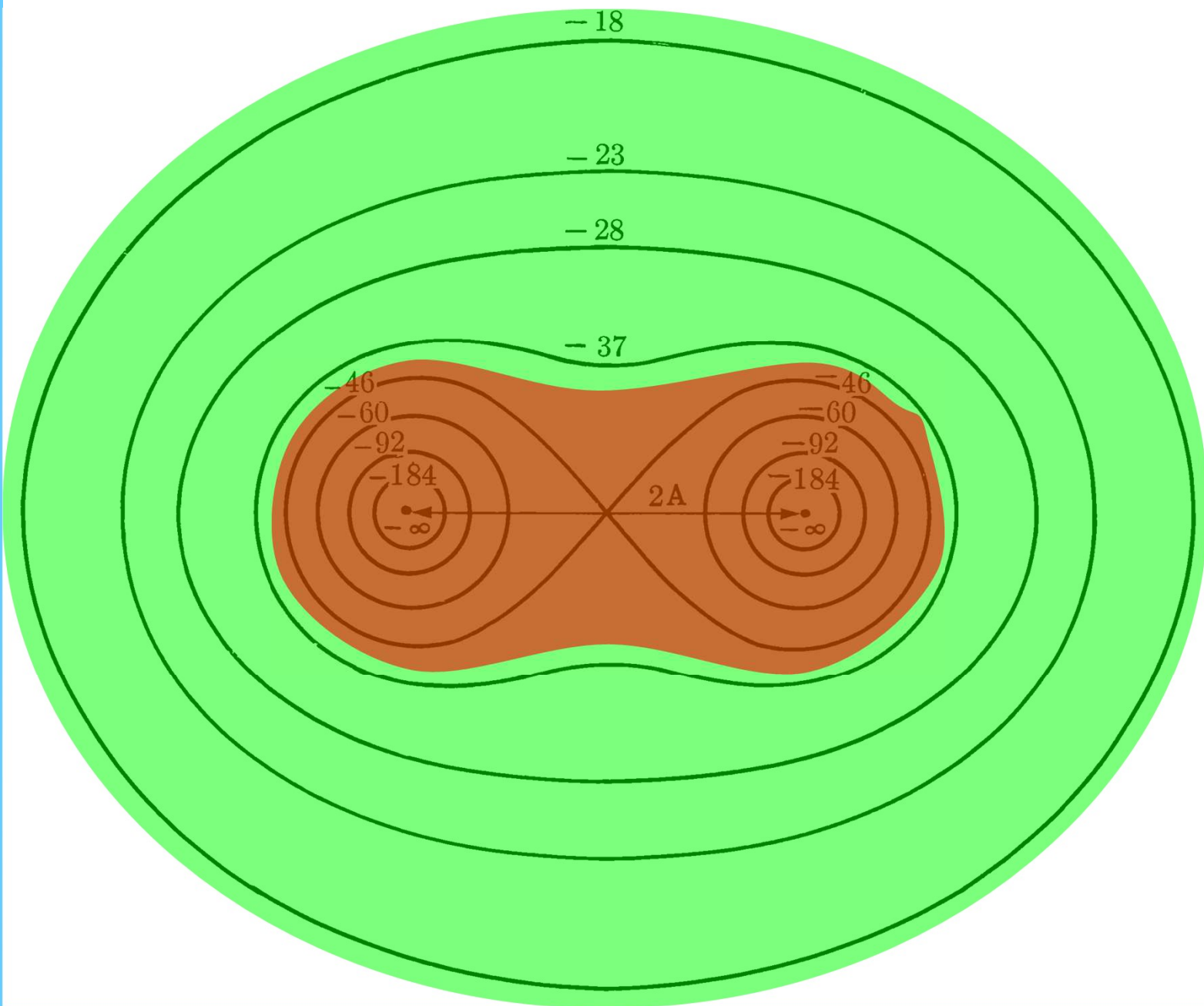
$$E < -46 \times 10^{-12} \text{erg}$$



الکترون یا
1 حول پروتون
یا حول پرتون
2 واقع می شود

و بسته به شرایط
اولیه انتظار
داریم حرکت
الکترون نوسانی
در طرفین مرکز
جاذب یا
گردش روی
مداری حول
آن باشد

$$0 > E > -46 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

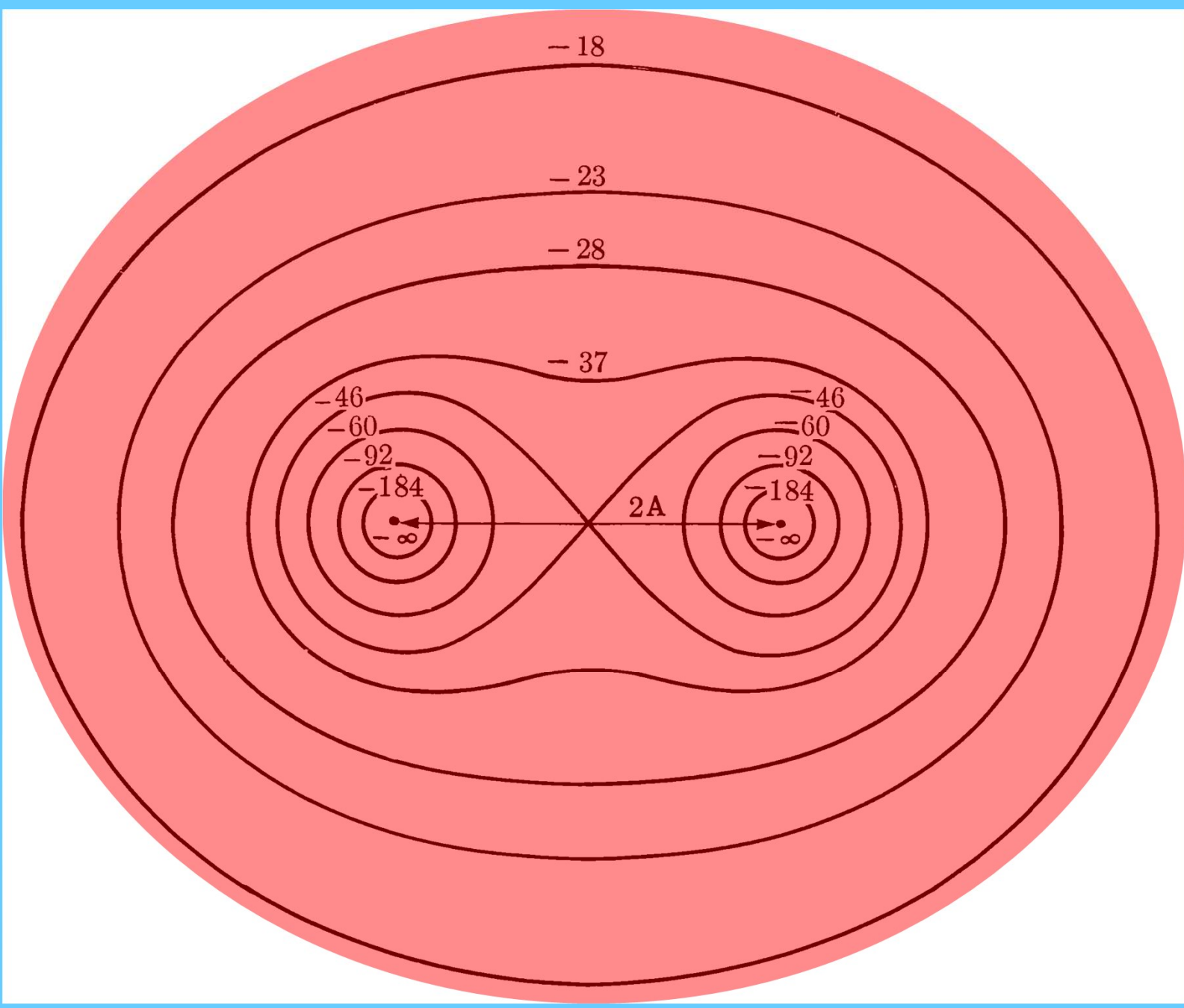


حرکت
الکترون
به
ناحیه
محدود
شود که شامل
هر دو پروتون
است

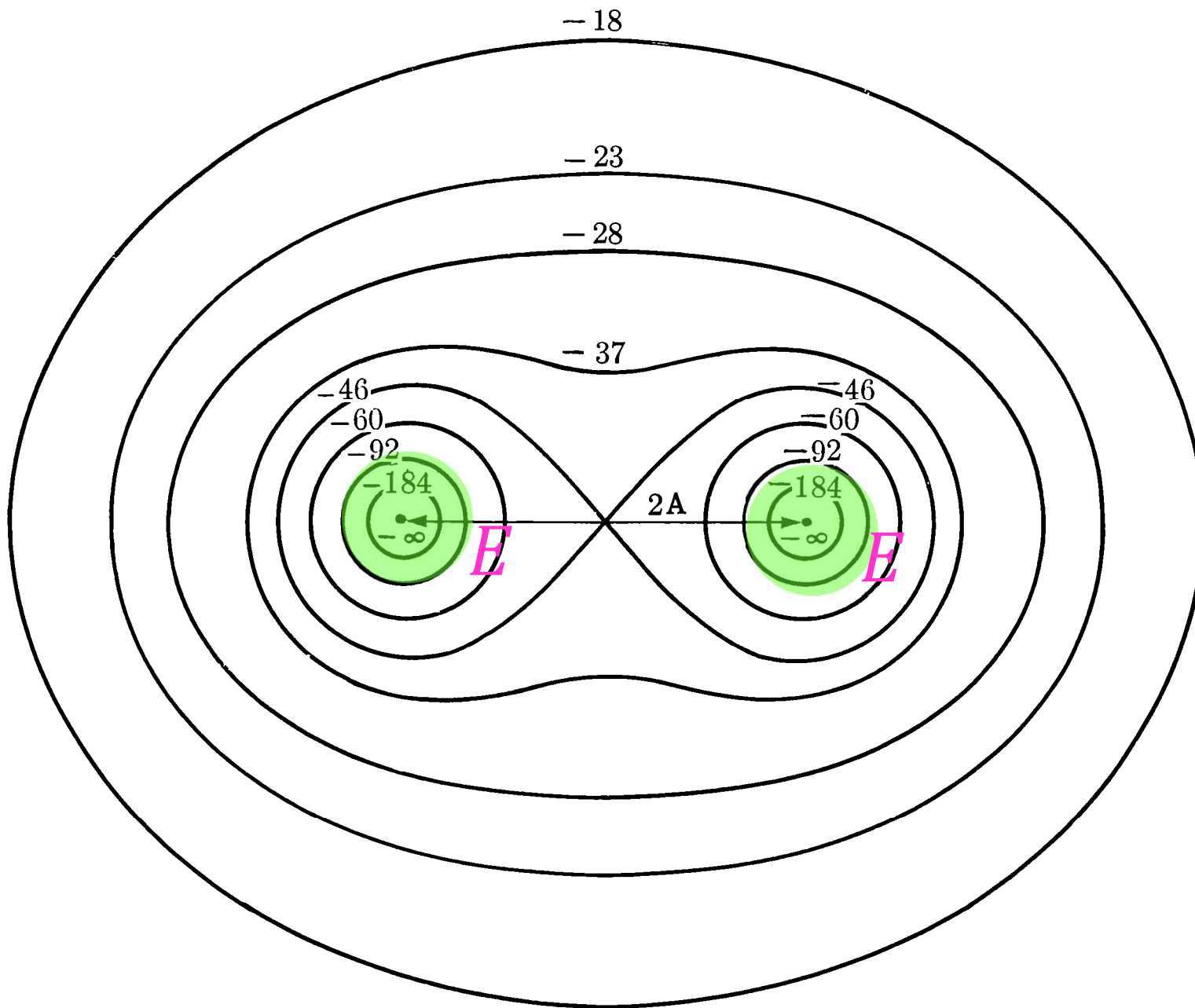
در این صورت
حرکات
متفاوتی امکان
پذیر است

$$E > 0$$

حرکت
الکترون به هیچ
ناحیه
گرانداری در
صفحه محدود
نمی شود



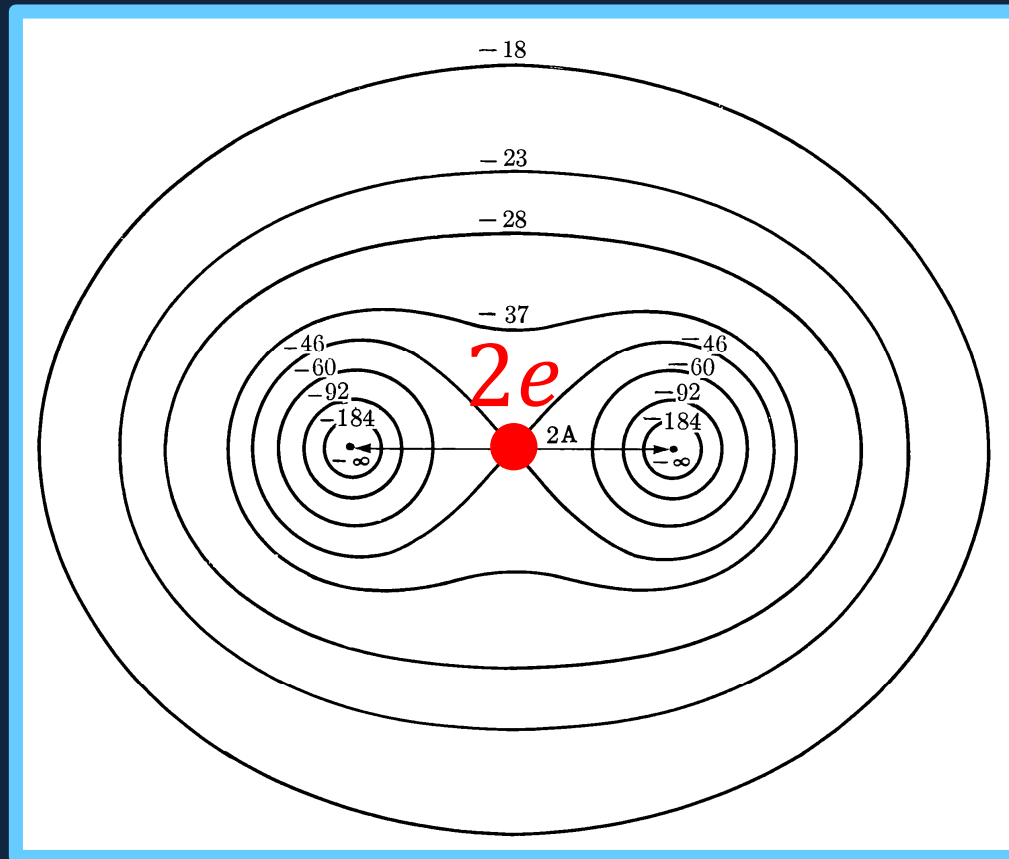
$$E \ll -46 \times 10^{-12} \text{ erg}$$



محل الکترون
محدود به
ناحیه ای است
که خطوط هم
پتانسیل تقریباً
به صورت
دایروی دور
یک پروتونند

و حرکت
الکترون عملاً
چنان است که
گویی الکترون
دیگر وجود
ندارد

$$E < 0 \ \& \ |E| \ll 1$$



الکترون ممکن
است دور از
مراکز جاذب
بر مداری
دایره ای شکل
بچرخد

و در آن
صورت
حرکتش تقریباً
حرکت
الکترونی است
که حول یک
بار منفرد $2e$
در حال
گردش است

اگر تابع انرژی پتانسیل معلوم باشد، آنگاه نیرو نیز معلوم خواهد بود:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

به عکس اگر نیرو معلوم و کرل آن صفر باشد، آنگاه انرژی پتانسیل نیز معلوم خواهد شد:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

چون کرل نیرو صفر است، این انتگرال را می توان بر روی هر مسیر دلخواهی انجام داد

مثال 1: انرژی پتانسیل را برای نیروی داده شده زیر به دست آورید:

$$F_x = axy$$

$$F_y = -az^2$$

$$F_z = -ax^2$$

ابتدا تحقیق می کنیم که کرل نیروی داده شده صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ axy & -az^2 & -ax^2 \end{vmatrix} = (2az)\hat{i} + (2ax)\hat{j} - (ax)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$$

بنابراین:

لذا برای نیروی داده شده در این مثال انرژی پتانسیلی وجود ندارد

مثال 2: انرژی پتانسیل را برای نیروی داده شده زیر به دست آورید:

$$F_x = ay(y^2 - 3z^2)$$

$$F_y = 3ax(y^2 - z^2)$$

$$F_z = -6axyz$$

ابتدا تحقیق می کنیم که کرل نیروی داده شده صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay(y^2 - 3z^2) & 3ax(y^2 - z^2) & -6axyz \end{vmatrix} = 0\hat{i} - 0\hat{j} + 0\hat{k} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

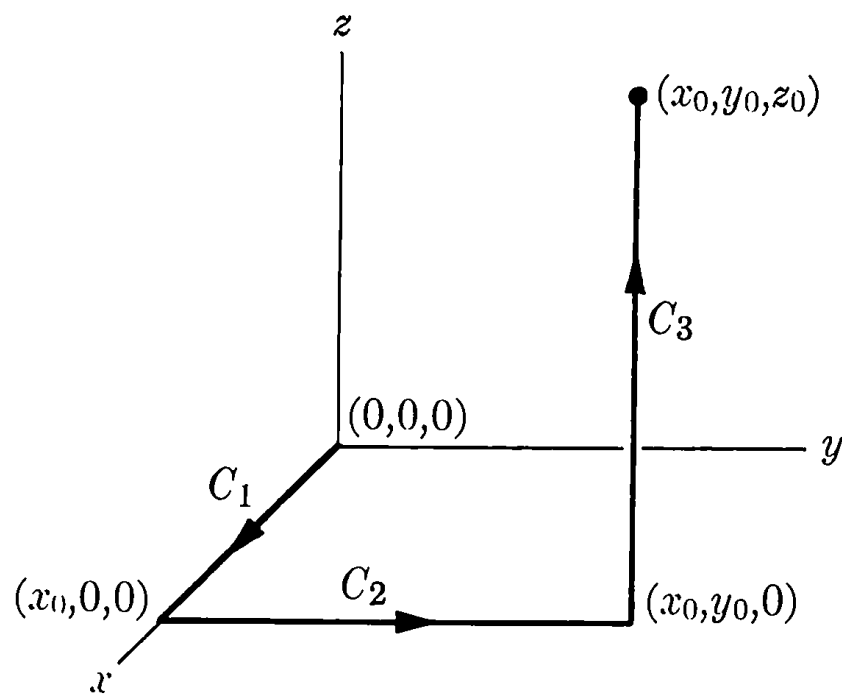
بنابراین:

لذا برای نیروی داده شده در این مثال انرژی پتانسیلی وجود دارد که آن را به دست می آوریم:

مبدأ انرژی پتانسیل اختیاری است که آن را در $\vec{r}_s = 0$ قرار می دهیم،
که در این صورت خواهیم داشت:

$$V(\vec{r}_s) = V(0,0,0) \\ = 0$$

حال کافی است که از مبدأ شروع کنیم و
خود را به نقطه دلخواه (x_0, y_0, z_0) برسانیم



$$V(x_0, y_0, z_0) = - \int_{(0,0,0)}^{(x_0, y_0, z_0)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$C_1: x = x, y = z = 0,$$

$$F_x = F_y = F_z = 0$$

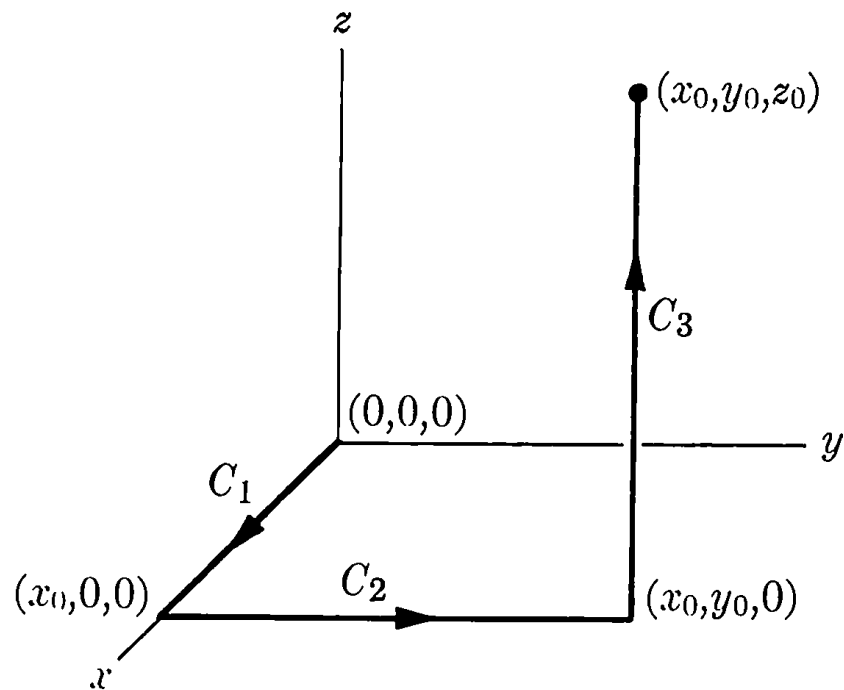
$$d\vec{r} = \hat{i}dx$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{x_0} F_x dx = 0$$

$$F_x = ay(y^2 - 3z^2)$$

$$F_y = 3ax(y^2 - z^2)$$

$$F_z = -6axyz$$



$$C_2: x = x_0, y = y, z = 0,$$

$$F_x = ay^3, F_y = 3ax_0y^2, F_z = 0$$

$$d\vec{r} = \hat{j}dy$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{y_0} F_y dy = ax_0y_0^3$$

$$F_x = ay(y^2 - 3z^2)$$

$$F_y = 3ax(y^2 - z^2)$$

$$F_z = -6axyz$$

$$C_3: x = x_0, y = y_0, z = z,$$

$$F_x = ay_0(y_0^2 - 3z^2)y^3, F_y = 3ax_0(y_0^2 - z^2), F_z = -6ax_0y_0z$$

$$d\vec{r} = \hat{k}dz$$

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{z_0} F_z dz = -3ax_0y_0z_0^2$$

بنابراین انرژی پتانسیل با برداشتن اندیسه‌های صفر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= 0 - axy^3 + 3axyz^2 \end{aligned}$$

$$V(x, y, z) = -axy^3 + 3axyz^2$$

منهای گرادیان تابع فوق نیرو را به دست می‌دهد

مستق‌گیری از انتگرال‌گیری ساده است

پس یک روش پیدا کردن انرژی پتانسیل آن است که سعی کنیم تابعی را حدس بزنیم که منهای گرادیان آن نیرو را بدهد