

حرکت ذره تحت نیروی مرکزی

نیروی مرکزی نیرویی است که همواره به سوی مرکز است و اندازه آن فقط تابعی از فاصله ذره تا مبدا است

$$\vec{F} = \hat{r}F(r)$$

اگر $F(r) < 0$ باشد، آنگاه نیرو جاذب و
اگر $F(r) > 0$ باشد، آنگاه نیرو دافع است

$$F_x = \frac{x}{r} F(r)$$

$$F_y = \frac{y}{r} F(r)$$

$$F_z = \frac{z}{r} F(r)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

نیروهای مرکزی دارای ویژگیهایی هستند که در زیر
به آنها می پردازیم:

(1) کرل نیروی مرکزی صفر است و به تابع $F(r)$ بستگی ندارد، زیرا:

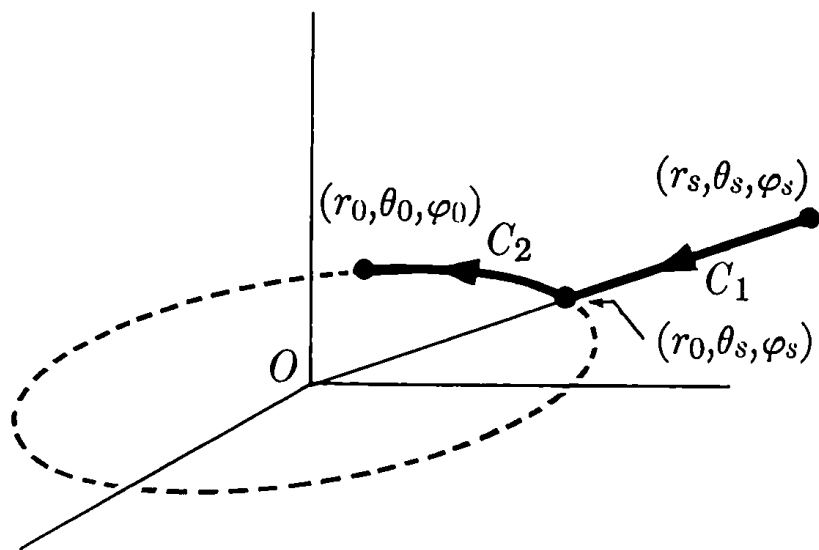
$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r}F(r) & \frac{y}{r}F(r) & \frac{z}{r}F(r) \end{vmatrix} \\
 &= \left(z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F(r)}{r} \right) - y \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \right) \hat{i} - \left(z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F(r)}{r} \right) - x \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \right) \hat{j} \\
 &+ \left(y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F(r)}{r} \right) - x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \right) \hat{k} \\
 &= \left(z \frac{y}{r} - y \frac{z}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \hat{i} - \left(z \frac{x}{r} - x \frac{z}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \hat{j} \\
 &+ \left(y \frac{x}{r} - x \frac{y}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \hat{k} = 0
 \end{aligned}$$

(2) برای نیروهای مرکزی انرژی پتانسیل فقط به اندازه بردار مکان $|\vec{r}|$ بستگی دارد، زیرا:

مبدأ انرژی پتانسیل اختیاری است که آن را در $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$ قرا می دهیم، که در این صورت خواهیم داشت:

$$V(\vec{r}_s) = V(r_s, \theta_s, \varphi_s) = 0$$

ابتدا از نقطه $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$ روی مسیر شعاعی به نقطه $(r_0, \theta_s, \varphi_s)$ در امتداد C_1 و سپس در امتداد محیط دایره نشان داده شده در شکل به شعاع r_0 حول مبدأ روی مسیر C_2 به نقطه $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ می رویم

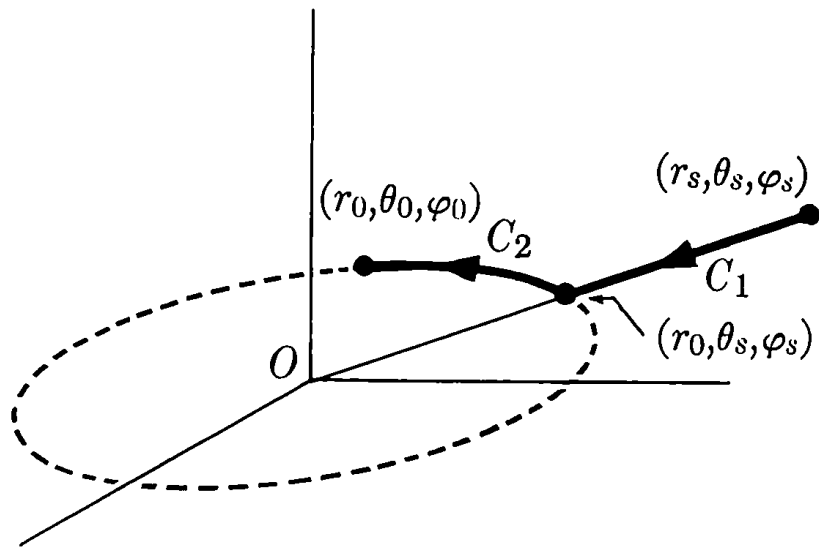


$$C_1: r = r, \theta = \theta_s, \varphi = \varphi_s$$

$$\vec{F} = \hat{r}F(r)$$

$$d\vec{r} = \hat{r}dr$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_s}^{r_0} F(r)dr$$



$$C_2: r = r_0, \theta = \theta, \varphi = \varphi$$

$$\vec{F} = \hat{r}F(r)$$

$$d\vec{r} = \hat{\theta}r d\theta + \hat{\phi}r \sin\theta d\varphi$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$V(\vec{r}_0) = V(r_0, \theta_0, \varphi_0) = - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= - \int_{r_s}^{r_0} F(r) dr - 0 = - \int_{r_s}^{r_0} F(r) dr = V(r_0)$$

$$V(\vec{r}) = V(r) = - \int_{r_s}^r F(r) dr$$

که فقط تابعی از اندازه
بردار مکان است

(3) اندازه حرکت زاویه ای یک ذره تحت تاثیر نیروی مرکزی حول هر محوری که از مرکز نیرو می گذرد ثابت است، زیرا:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\hat{r}F(r)) = (\vec{r} \times \hat{r})F(r) = 0$$

$$\vec{L} = \text{Constant}$$

(4) مسیر حرکت یک ذره تحت نیروی مرکزی در صفحه ای قرار دارد که شامل مرکز نیرو است، زیرا:

$$F_x = m\ddot{x} = \frac{x}{r}F(r)$$

$$F_y = m\ddot{y} = \frac{y}{r}F(r)$$

$$F_z = m\ddot{z} = \frac{z}{r}F(r)$$

$$\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} + 0\hat{k}$$

شرایط
اولیه:

$$z(t) = 0$$

$$m\ddot{z} = \frac{z}{r}F(r) = 0$$

$$\ddot{z} = 0$$

$$\dot{z} = v_{0z} = 0$$

$$z = z_0 = 0$$

یک جواب $z(t)$ معادله عبارت است از:
زیرا در آن صدق می کند:

که $z = 0$ معادله
صفحه xy است

بنابراین حرکت در صفحه xy انجام می شود

یعنی یک ذره تحت نیروی مرکزی نمی تواند از صفحه ای که در ابتدا
در آن در حال حرکت بوده است خارج شود

این نتیجه را می توان از قانون بقا اندازه حرکت زاویه ای نیز به دست
آورد، زیرا:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{constant}$$

بنابراین بردارهای مکان و سرعت
همواره (در هر لحظه از زمان) باید
در صفحه عمود بر $\vec{L}$ قرار گیرند.

اکنون مساله به یک مساله 2 بعدی شامل 2 معادله دیفرانسیل و 4 شرط اولیه ساده شده است

با توجه به تقارن مرکز گرای مساله بهتر است آن را در دستگاه مختصات قطبی حل کنیم:

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} = \hat{r} F(r) = m \vec{a} = m a_r \hat{r} + m a_\theta \hat{\theta} \\ = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\theta}$$

$$F_r = F(r) = m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$F_\theta = 0 = m a_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$F(r) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

$$r \times 0 = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$

$$0 = mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta}$$

$$0 = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt}$$

که همان قانون بقا اندازه حرکت زاویه ای تحت نیروی مرکزی است

توضیح:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\vec{L} = m(r\hat{r} \times (v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}))$$

$$\vec{L} = mrv_\theta\hat{k} = mrr\dot{\theta}\hat{k}$$

$$L = L_z = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = rm(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = rF_\theta$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = rF_\theta = 0$$

پس:

$$F_\theta = 0$$

برای نیروی مرکزی داریم:

$$0 = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt}$$

$$mr^2\dot{\theta} = L = \text{constant}$$

مقدار ثابت L را باید از شرایط اولیه به دست آورد

$$L = 0$$

مثلا، اگر

$$\dot{\theta} = 0$$

$$\theta = \text{constant}$$

چون نیرو کنسرواتیو است،
قانون بقا انرژی صادق است:

$$T + V = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) + V(r) = E$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) = E$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

ثابت بودن L ما را قادر می سازد تا $\dot{\theta}$ را حذف کنیم:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + V(r) = E$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

که شبیه یک معادله یک بعدی شد، که در آن جمله اول شبیه انرژی جنبشی (چون انرژی جنبشی در دستگاه قطبی فقط این یک جمله نیست) و جمله دوم شبیه انرژی پتانسیل (چون ناشی از نیروی مجازی گریز از مرکز است)

توضیح این که چرا جمله دوم را می توان به عنوان جمله ای شبیه انرژی پتانسیل ناشی از نیروی مجازی گریز از مرکز در نظر گرفت

$$F(r) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$F(r) = m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}$$

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}$$

که در آن $F(r)$ نیروی واقعی و $\frac{L^2}{mr^2}$ نیروی مجازی اند

در این صورت می توان انرژی پتانسیل موثر را به صورت زیر تعریف کرد:

$$'V'(r) = -\int_{r_s}^r F(r)dr - \int_{r_s}^r \frac{L^2}{mr^3} dr$$

$$'V'(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + 'V'(r) = E$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - 'V'(r)}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}$$

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$V(\vec{r}) = V(r) = - \int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{r_s}^r F(r) dr$$

محاسبه
سمت چپ با داشتن
انرژی پتانسیل
الاصول امکان پذیر
است

پس با محاسبه این انتگرال می توان r را به صورت تابعی از زمان به دست آورد

حال با داشتن $r(t)$ می توان θ را نیز به صورت تابعی از زمان به دست آورد:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{mr^2} dt$$

پس می توان هم $r(t)$ و هم $\theta(t)$ را با دسته معادلات و 4 شرط اولیه زیر تعیین کرد

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t \\ \theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{mr^2} dt \\ V(r) = - \int_{r_s}^r F(r) dr, V(r_s) = 0 \end{array} \right.$$

$$L, E, r_0, \theta_0$$

شرایط اولیه را می توان با معلوم بودن مکان و سرعت اولیه تعیین کرد

بدین ترتیب مسیر حرکت ذره در صفحه در هر لحظه از زمان قابل تعیین است

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

بعضی اوقات محاسبه
انتگرال زیر برای به
دست آوردن $r(t)$
دشوار است

در چنین شرایطی بعضی اوقات پیدا کردن مسیر ذره در فضا ساده تر از
پیدا کردن معادله حرکت به صورت تابعی از زمان است

در این صورت می توانیم مسیر ذره را با $r(\theta)$ به جای $r(t)$ توصیف
کنیم

برای این منظور تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم

$$u = \frac{1}{r}$$

$$r = \frac{1}{u}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -r^2 \dot{\theta} \frac{du}{d\theta}$$

$$\dot{r} = -r^2 \dot{\theta} \frac{du}{d\theta}$$

$$mr^2 \dot{\theta} = L$$

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{L}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \dot{\theta} \\ &= -\frac{L}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \frac{L}{mr^2} = -\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \end{aligned}$$

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

$$-\frac{L^2 u^2}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = F\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{L^2 u^3}{m}$$

طرف راست معادله
بینهایت می شود

$$L = 0$$

اگر

لذا

$$\dot{\theta} = 0$$

اما قبلا گفتیم که در
این حالت

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) - u$$

$$\theta = cte$$

که معادله یک خط
راست است که از مبدا
می گذرد

در صورتی که حل معادلات حرکت دشوار باشد:

و همچنین حتی معادله زیر نیز به راحتی قابل حل نباشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t \\ \theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{mr^2} dt \\ V(r) = - \int_{r_s}^r F(r) dr, V(r_s) = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) - u$$

هنوز هم می توان به طور کیفی با استفاده از پتانسیل موثر $V'(r)$ در خصوص حرکت به طور کیفی بحث کرد

مثلا در صورتی که $V'(r)$ دارای مینیمم در r_0 باشد، می توان برای انرژیهای اندکی بزرگتر از انرژی پتانسیل موثر، $E > V'(r_0)$ ، سرعت زاویه ای حرکت نوسانی را به صورت زیر به دست آورد

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2 V'(r)}{dr^2} \right)_{r_0} = \frac{k}{m}$$

البته باید توجه کرد که ذره علاوه بر حرکت نوسانی فوق حول مرکز نیرو نیز با سرعت زاویه ای زیر می چرخد

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

با افزایش r سرعت زاویه ای فوق کاهش می یابد

حتی وقتی که حرکت r متناوب است، زمان تناوب r حاصل از رابطه زیر

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2 V'(r)}{dr^2} \right)_{r_0} = \frac{k}{m}$$

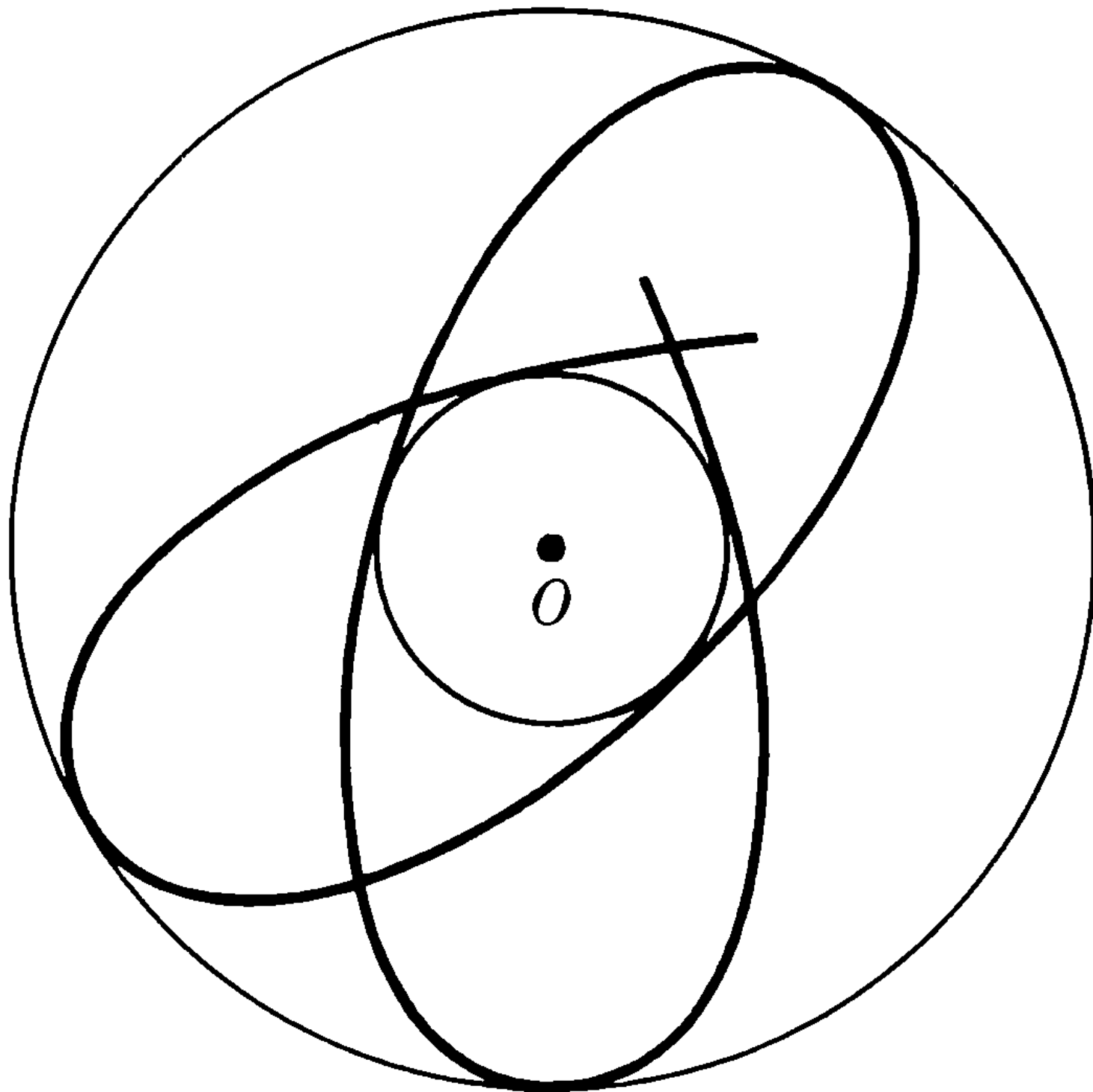
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ممکن است با زمان تناوب چرخش ذره حول مرکز نیرو (θ) یکسان نباشد

$$\omega' = \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi \frac{mr^2}{L}$$

این زمان تناوب به شعاع حرکت بستگی دارد



در مواردی که حرکت r متناوب نیست و می تواند به بینهایت میل کند داریم که:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \dot{\theta} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L}{mr^2} = 0$$

و بسته به این که r با چه سرعتی افزایش می یابد، ذره هنگام حرکت به طرف بینهایت ممکن است یک یا چند چرخش کامل انجام بدهد یا ندهد

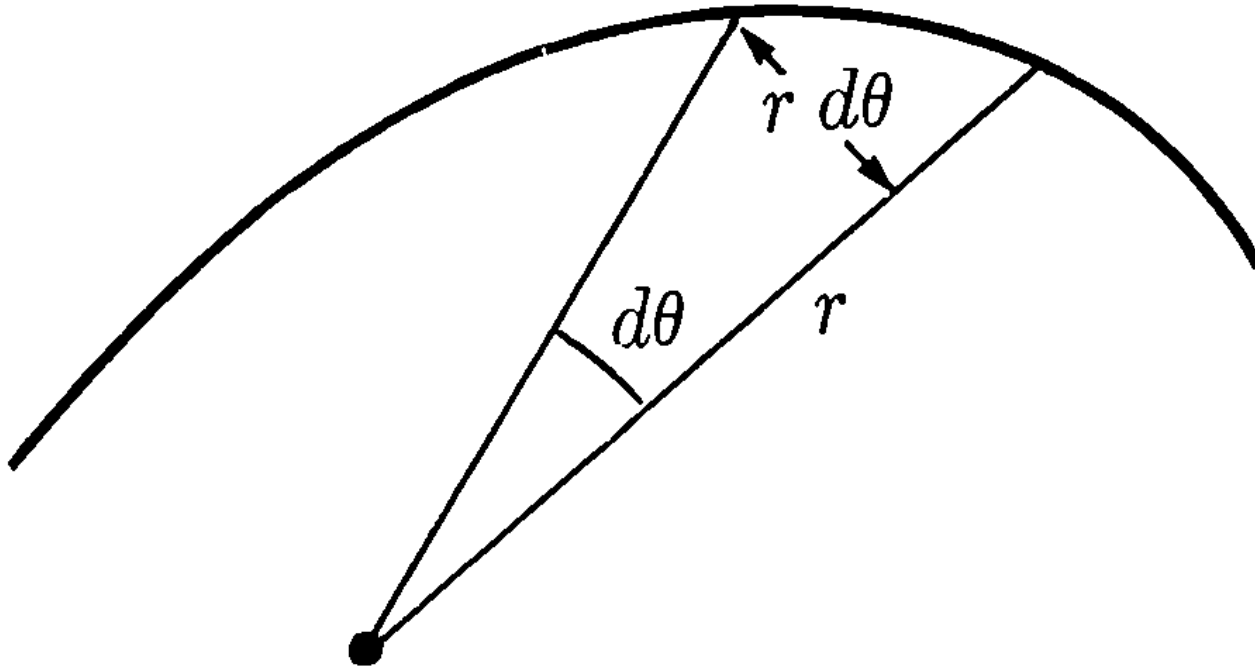
در صورتی که حرکت تناوبی باشد یعنی مدار حرکت بسته باشد، زمان تناوب حرکت مداری به سطح مدار مربوط می شود:

$$S = \int dS = \int_0^r \int_0^\theta r dr d\theta = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$r \approx \text{const}$$

$$dS \approx \frac{1}{2} r^2 d\theta$$



$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$$

$$dS = \frac{L}{2m} dt$$

$$S = \frac{L}{2m} \tau$$

$$\tau = \frac{2m}{L} S$$

همان طور که ملاحظه می شود زمان تناوب τ به سطح روفته شده S بستگی دارد