# معادلات لاگرانژ

## مختصات تعمیم یافته

مختصات تعمیم یافته یک دستگاه $N$ ذره‌ای را می‌توان به صورت زیر برحسب مختصات دکارتی ذرات تعریف کرد:

$$q_1 = q_1(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_N, y_N, z_N; t)$$

$$q_2 = q_2(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_N, y_N, z_N; t)$$

$$\vdots$$

$$q_{3N} = q_{3N}(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_N, y_N, z_N; t)$$

چون آرایش ذرات علاوه بر مختصات کارتزی توسط مختصات تعمیم یافته هم قابل تعیین است پس می‌توان گفت:

به عکس مختصات کارتزی یک دستگاه $N$ ذره‌ای را می‌توان به صورت زیر بر حسب مختصات تعمیم یافته به دست آورد:

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t) \qquad y_1 = y_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t) \qquad z_1 = z_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t)$$

$$x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t) \qquad y_2 = y_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t) \qquad z_2 = z_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t)$$

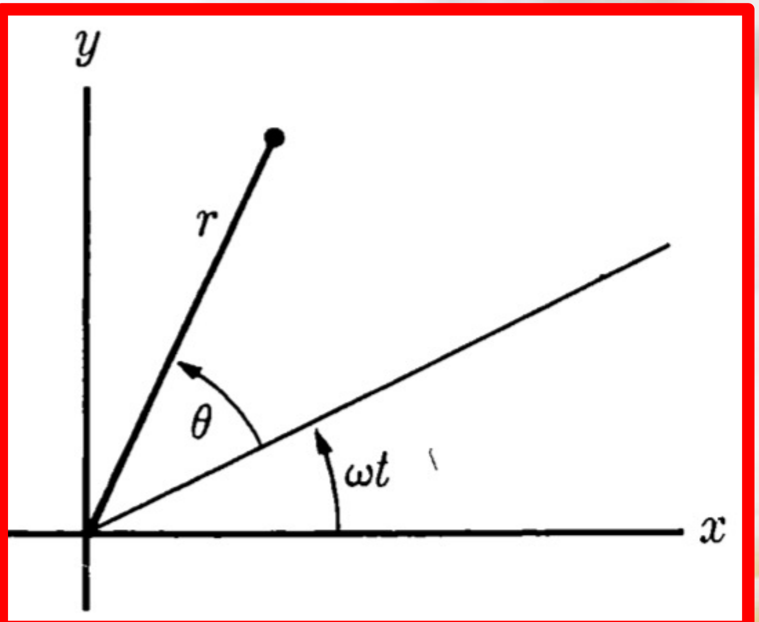
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_N = x_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t) \qquad y_N = y_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t) \qquad z_N = z_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t)$$

مشروط بر آن که دترمینان ژاکوبی زیر مخالف صفر باشد:

$$\frac{\partial(q_1, \dots, q_{3N})}{\partial(x_1, y_1, \dots, z_N)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial y_1} & \frac{\partial q_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial y_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial q_1}{\partial z_N} & \frac{\partial q_2}{\partial z_N} & \cdots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial z_N} \end{vmatrix} \neq 0$$

مثال: مختصه‌های قطبی را می‌توان مختصه‌های تعمیم یافته مختصه‌های کارتزی دانست




$$\theta + \omega t = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$x = r\cos(\theta + \omega t)$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} - \omega t$$

$$y = r\sin(\theta + \omega t)$$

$$r \to q_1$$

$$\theta \to q_2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan(\theta + \omega t) = \frac{y}{x}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$x = rcos(\theta + \omega t)$$

$$y = rsin(\theta + \omega t)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = cos(\theta + \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = sin(\theta + \omega t)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -rsin(\theta + \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = rcos(\theta + \omega t)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = rcos^2(\theta + \omega t) + rsin^2(\theta + \omega t) = r \neq 0$$

# روابط تبدیل برای سرعتها

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}; t)$$

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial q_{3N}} dq_{3N} + \frac{\partial x_1}{\partial t} dt$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial q_{3N}}\frac{dq_{3N}}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial t}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial q_{3N}}\dot{q}_{3N} + \frac{\partial x_1}{\partial t}$$

$$\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_1}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_1}{\partial t}$$

## پس به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_1}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_1}{\partial t}$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_N = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_N}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial z_N}{\partial t}$$

مثال: مختصه‌های کارتزی سرعتها را می‌توان به صورت زیر برحسب مختصه‌های تعمیم یافته یعنی مختصه‌های قطبی به‌دست آورد:

$$x = r\cos(\theta + \omega t)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta + \omega t)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta + \omega t)$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\theta + \omega t) - r\dot{\theta}\sin(\theta + \omega t) - r\omega\sin(\theta + \omega t)$$

$$y = r\sin(\theta + \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta + \omega t)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta + \omega t)$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin(\theta + \omega t) + r\dot{\theta}\cos(\theta + \omega t) + r\omega\cos(\theta + \omega t)$$

تبدیل انرژی جنبشی $N$ ذره از مختصه‌های کارتزی به مختصه‌های تعمیم یافته

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\right)$$

با در نظر گرفتن قاعده جمع زنی انشتین روی اندیسهای تکراری:

$$\dot{x}_i=\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}+\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{dt}{dt}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\dot{x}_i^2=\dot{x}_i\dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+2\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\dot{x}_i^2=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l+2\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}\dot{q}_k+\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\dot{x}_i^2=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l+2\,\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}\dot{q}_k+\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2$$

به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\dot{y}_i^2=\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l+2\,\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}\dot{q}_k+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\dot{z}_i^2=\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l+2\,\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t}\dot{q}_k+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2$$

## جمله اول انرژی جنبشی را می‌توان با استفاده از سه رابطه زیر

$$\dot{x}_i^2 = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\dot{y}_i^2 = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\dot{z}_i^2 = \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2$$

## به صورت زیر نوشت :

$$\frac{1}{2}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_k\dot{q}_l$$

## جمله دوم انرژی جنبشی را می توان با استفاده از سه رابطه زیر

$$\dot{x}_i^2 = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\,\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\dot{y}_i^2 = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\,\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\dot{z}_i^2 = \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\,\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2$$

## به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2}m_i\times 2\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)\dot{q}_k$$

## جمله سوم انرژی جنبشی را می توان با استفاده از سه رابطه زیر

$$\dot{x}_i^2 = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\dot{y}_i^2 = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\dot{z}_i^2 = \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t}\dot{q}_k + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2$$

## به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2}m_i\left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right)$$

جمله اول انرژی جنبشی

$$\frac{1}{2}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_k\dot{q}_l=\frac{1}{2}A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l$$

که در آن بدون قاعده جمع زنی انشتین:

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\right)=A_{kl}$$

جمله دوم انرژی جنبشی

$$m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)\dot{q}_k=B_k\dot{q}_k$$

که در آن بدون قاعده جمع زنی انشتین:

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)=B_k$$

جمله سوم انرژی جنبشی بدون قاعده جمع زنی انشتین:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right)=T_0$$

پس انرژی جنبشی کل حاصل از جمع سه جمله به دست آمده:

$$T=\frac{1}{2}A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l+B_k\dot{q}_k+T_0$$

که اگر بدون قاعده جمع زنی انشتین بنویسیم:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N}\sum_{l=1}^{3N}A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l+\sum_{k=1}^{3N}B_k\dot{q}_k+T_0$$

که در آن:

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\right)=A_{kl}$$

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)=B_k$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right)=T_0$$

خلاصه انرژی جنبشی را در مختصات تعمیم یافته به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$T = \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} \tfrac{1}{2} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{3N} B_k \dot{q}_k + T_0,$$

$$A_{kl} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial q_l} \right),$$

$$B_k = \sum_{i=1}^{N} m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right),$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i \left[ \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right].$$

که در آن جمله اول مرتبه 2 (مربعی نسبت به سرعتها) جمله دوم مرتبه 1 (خطی نسبت به سرعتها) و جمله سوم مرتبه صفر (مستقل از سرعتها) هستند:

انرژی جنبشی تعمیم یافته

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{3N} B_k \dot{q}_k + T_0 = T_2 + T_1 + T_0$$

## مثال: انرژی جنبشی تعمیم یافته یک ذره در دستگاه مختصات قطبی (به عنوان دستگاه مختصات تعمیم یافته نسبت به دستگاه کارتزی)

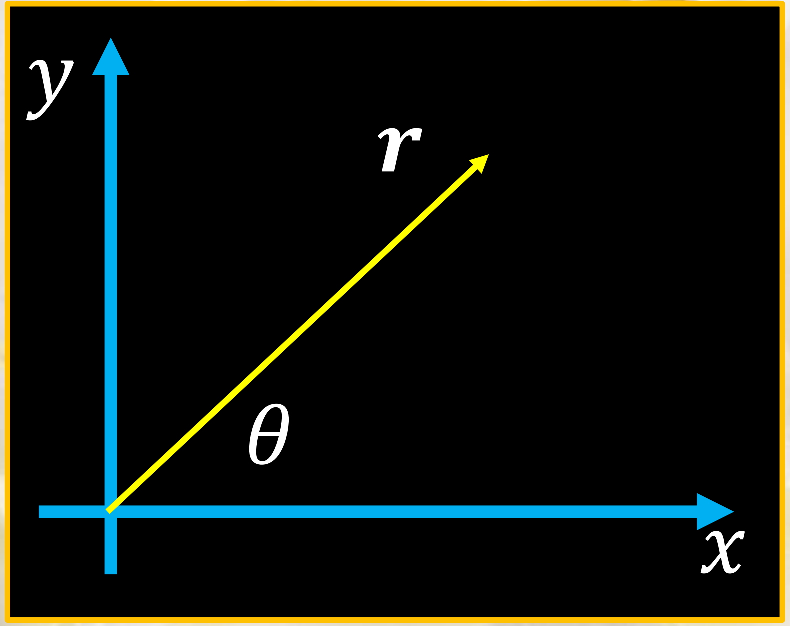
در این مساله بعد فضا 2 و تعداد ذرات 1 است، پس:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N}\sum_{l=1}^{3N} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{3N} B_k\dot{q}_k + T_0$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2\times1}\sum_{l=1}^{2\times1} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{2\times1} B_k\dot{q}_k + T_0$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$



$$x = rcos\theta$$

$$y = rsin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = cos\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -rsin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = rcos\theta$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\right) = A_{kl}$$

$$m\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial x}{\partial q_l} + \frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\partial y}{\partial q_l}\right) = A_{kl}$$

$$q_1 = r \ \& \ q_2 = \theta$$

$$m(cos\theta cos\theta + sin\theta sin\theta) = m = A_{11}$$

$$m(-rcos\theta sin\theta + rsin\theta cos\theta) = A_{12} = 0$$

$$m(-rsin\theta cos\theta + rcos\theta sin\theta) = A_{21}=0$$

$$m(r^2 \sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta) = mr^2 = A_{22}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)=B_k$$

در این مساله دستگاه متحرك نیست، پس:

$$m\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\partial y}{\partial t}\right)=B_k=0$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right)=T_0$$

$$\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right)=T_0=0$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l+\sum_{k=1}^{2} B_k\dot{q}_k+T_0$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l=\frac{1}{2}(A_{11}\dot{q}_1^2+A_{22}\dot{q}_2^2)+0+0$$

$$T = \frac{1}{2}(A_{11}\dot{q}_1^2 + A_{22}\dot{q}_2^2)$$

$$m(cos\theta cos\theta + sin\theta sin\theta) = m = A_{11}$$

$$m(-rcos\theta sin\theta + rsin\theta cos\theta) = A_{12} = 0$$

$$m(-rsin\theta cos\theta + rcossin\theta) = A_{21}=0$$

$$m(r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta) = mr^2 = A_{22}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2\right)$$

## حال اگر این دستگاه متحرک هم باشد

$$x = r\cos(\theta + \omega t)$$

$$y = r\sin(\theta + \omega t)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta + \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta + \omega t)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta + \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta + \omega t)$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}\right) = A_{kl}$$

$$m\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial x}{\partial q_l} + \frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\partial y}{\partial q_l}\right) = A_{kl}$$

$$q_1 = r \ \& \ q_2 = \theta$$

$$m(\cos(\theta + \omega t)\cos(\theta + \omega t) + \sin(\theta + \omega t)\sin(\theta + \omega t)) = m = A_{11}$$

$$m(-r\cos(\theta + \omega t)\sin(\theta + \omega t) + r\sin(\theta + \omega t)\cos(\theta + \omega t)) = A_{12} = 0$$

$$m(-r\sin(\theta + \omega t)\cos(\theta + \omega t) + r\cos(\theta + \omega t)\sin(\theta + \omega t)) = A_{21} = 0$$

$$m(r^2 \sin^2(\theta + \omega t) + r^2 \cos^2(\theta + \omega t)) = mr^2 = A_{22}$$

## که با نتایج دستگاه ساکن یکسان است

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial t} \right) = B_k$$

$$m \left( \frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\partial y}{\partial t} \right) = B_k$$

$$x = r\cos(\theta + \omega t\,)$$

$$y = r\sin(\theta + \omega t\,)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta + \omega t\,)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta + \omega t\,)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -r\omega\sin(\theta + \omega t\,)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = r\omega\cos(\theta + \omega t\,)$$

$$m \left( \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial t} \right) = B_1$$

$$m\big(-r\omega\cos(\theta + \omega t\,)\sin(\theta + \omega t\,) + r\omega\sin(\theta + \omega t\,)\cos(\theta + \omega t\,)\big) = B_1 = 0$$

**که مانند دستگاه ساکن صفر است**

$$m \left( \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial t} \right) = B_2$$

$$m\big(+r^2\omega\sin(\theta + \omega t\,)\sin(\theta + \omega t\,) + r^2\omega\cos(\theta + \omega t\,)\cos(\theta + \omega t\,)\big) = mr^2\omega = B_2 \neq 0$$

**که برخلاف دستگاه ساکن دیگر صفر نیست**

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right)=T_0$$

$$\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right)=T_0$$

$$x = rcos(\theta + \omega t\,)$$

$$y = rsin(\theta + \omega t\,)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega rsin(\theta + \omega t\,)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega rcos(\theta + \omega t\,)$$

$$\frac{1}{2}m\big((-\omega rsin(\theta+\omega t\,))^2+(\omega rcos(\theta+\omega t\,))^2\big)=\frac{1}{2}mr^2\omega^2=T_0$$

حال اگر همه را با هم ترکیب کنیم خواهیم داشت:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{2} B_k\dot{q}_k + T_0$$

$m = A_{11}$ | $0 = A_{12}$ | $0 = A_{21}$ | $mr^2 = A_{22}$ | $0 = B_1$ | $mr^2\omega = B_2$ | $\frac{1}{2}mr^2\omega^2 = T_0$

$$T = \frac{1}{2}\left(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2\right) + mr^2\omega\dot{\theta} + \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

دو جمله آخر ناشی از حرکت دستگاه است.

## یک راه ساده تر برای به دست آوردن انرژی جنبشی دستگاه ساکن:

به جای نوشتن انرژی جنبشی در دستگاه محتصات کارتزی و سپس تبدیل آن به دستگاه مختصات تعمیم یافته می توان مستقیم انرژی جنبشی را در دستگاه تعمیم یافته نوشت:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v} = v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

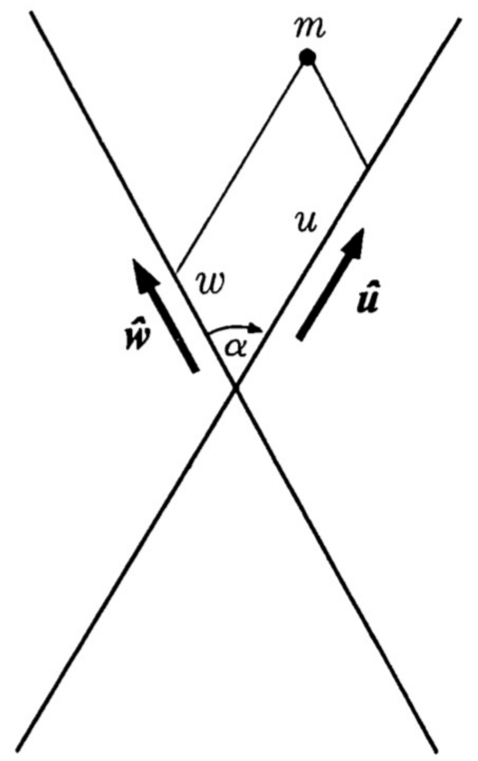
$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

البته در این روش باید مراقب تعامد بود

## در یک دستگاه غیر متعامد داریم:



A nonorthogonal coordinate system.

$$\boldsymbol{v} = \dot{u}\hat{\boldsymbol{u}} + \dot{w}\hat{\boldsymbol{w}}$$

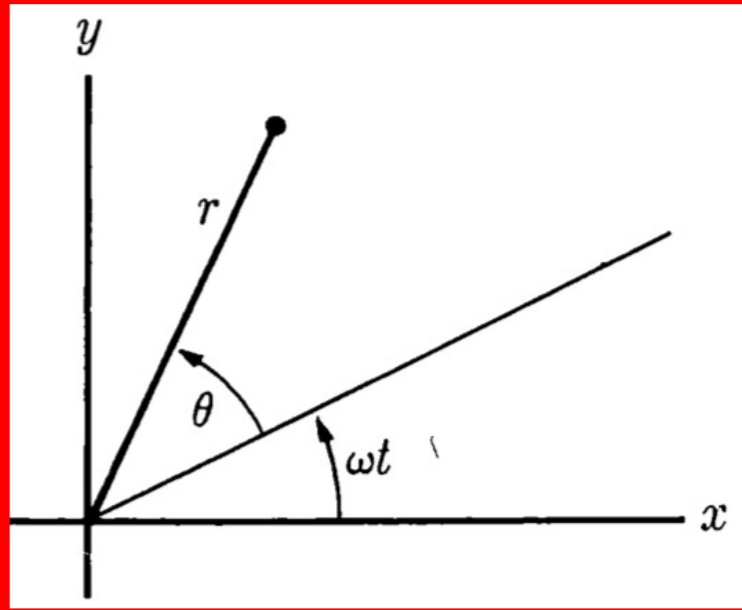
$$\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} = \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{u}\,\dot{w}cos\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{u}\,\dot{w}cos\alpha)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\dot{w}^2 + m\dot{u}\,\dot{w}cos\alpha$$

## برای دستگاه متحرک:

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}$$




$$\boldsymbol{v}=v_r\hat{\boldsymbol{r}}+v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$v_r=\dot{r}$$

$$v_\theta=r(\dot{\theta}+\omega)$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+r\,(\dot{\theta}+\omega)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+2r^2\dot{\theta}\omega+r^2\omega^2$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+mr^2\dot{\theta}\omega+\frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

که با نتیجه قبلی حاصل از تبدیل دستگاه کارتزی به دستگاه تعمیم یافته سازگار است

اندازه حرکت یک ذره را می‌توان از مشتق انرژی جنبشی آن نسبت به سرعت ذره به دست آورد

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

$$p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

به طور مشابه در دستگاه مختصات قطبی در حال سکون هم می‌توان نوشت:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

که بعد اندازه حرکت زاویه‌ای دارد

به طور مشابه در دستگاه مختصات قطبی در حال حرکت هم می‌توان نوشت:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mr^2\dot{\theta}\omega + \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} + mr^2\omega = mr^2\left(\dot{\theta} + \omega\right)$$

پس به طور کلی اندازه حرکت تعمیم یافته را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N}\sum_{l=1}^{3N} A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{3N} B_k\dot{q}_k + T_0$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N}\sum_{l=1}^{3N} A_{kl}\left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_l + \dot{q}_k\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_{k=1}^{3N} B_k\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i} + 0$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N}\sum_{l=1}^{3N} A_{kl}(\delta_{ki}\dot{q}_l + \dot{q}_k\delta_{li}) + \sum_{k=1}^{3N} B_k\delta_{ki}$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{3N}\sum_{l=1}^{3N} A_{kl}(\delta_{ki}\dot{q}_l) + \sum_{k=1}^{3N}\sum_{l=1}^{3N} A_{kl}(\dot{q}_k\delta_{li})\right) + B_i$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{3N} A_{il}\,\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{3N} A_{ki}\dot{q}_k\right) + B_i$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{3N} A_{il}\,\dot{q}_l + \sum_{k=1}^{3N} A_{ki}\dot{q}_k\right) + B_i$$

$$k \to l$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{3N} A_{il}\,\dot{q}_l + \sum_{l=1}^{3N} A_{li}\dot{q}_l\right) + B_i$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\left(2\sum_{l=1}^{3N} A_{il}\,\dot{q}_l\right) + B_i = \sum_{l=1}^{3N} A_{il}\,\dot{q}_l + B_i$$

$$i \to k$$

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{l=1}^{3N} A_{kl}\dot{q}_l + B_k$$

**اندازه حرکت تعمیم یافته**

## مثال: اندازه حرکت تعمیم یافته یک ذره در دستگاه مختصات قطبی در حال سکون

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{l=1}^{3N} A_{kl}\dot{q}_l + B_k$$

$$B_k = 0\ for\ k = 1\ \&\ 2$$

$$m(cos\theta cos\theta + sin\theta sin\theta) = m = A_{11}$$

$$m(-rcos\theta sin\theta + rsin\theta cos\theta) = A_{12} = 0$$

$$m(-rsin\theta cos\theta + rcossin\theta) = A_{21}=0$$

$$m(r^2 \sin^2\theta + r^2\cos^2\theta) = mr^2 = A_{22}$$

$$p_1 = p_r = A_{11}\dot{r} + B_1 = m\dot{r}$$

$$p_2 = p_\theta = A_{22}\dot{\theta} + B_2 = mr^2\dot{\theta}$$

که بعد اندازه حرکت زاویه‌ای دارد

که با نتایج به دست آمده از انرژی جنبشی قبلی دستگاه ساکن سازگار است

## مثال: اندازه حرکت تعمیم یافته یک ذره در دستگاه مختصات قطبی در حال حرکت

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{l=1}^{3N} A_{kl}\dot{q}_l + B_k$$

$m = A_{11}$ | $0 = A_{12}$ | $0 = A_{21}$ | $mr^2 = A_{22}$ | $0 = B_1$ | $mr^2\omega = B_2$

$$p_1 = p_r = A_{11}\dot{r} + B_1 = m\dot{r}$$

$$p_2 = p_\theta = A_{22}\dot{\theta} + B_2 = mr^2\dot{\theta} + mr^2\omega = mr^2(\dot{\theta} + \omega)$$

که با نتایج به دست آمده از انرژی جنبشی قبلی دستگاه دوار سازگار است

حال می خواهیم نیروی تعمیم یافته را معرفی کنیم

برای این منظور از مفهوم کار استفاده می کنیم

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \left(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i\right)$$

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

$$\delta y_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad \delta z_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

$$\delta W = \sum_{k=1}^{3N} Q_k \delta q_k$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{3N} \left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k$$

$$\delta W = \sum_{k=1}^{3N} \left\{\left[\sum_{i=1}^{N} \left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\right]\delta q_k\right\}$$

## نیروی تعمیم یافته

$$\delta W=\sum_{k=1}^{3N}\left\{\left[\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\right]\delta q_k\right\}$$

$$\delta W=\sum_{k=1}^{3N}Q_k\delta q_k$$

$$Q_k=\sum_{i=1}^{N}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)$$

$$\delta W=\sum_{k=1}^{3N}\delta W_k$$

$$\delta W_k=Q_k\delta q_k$$

اگر نیروهای وارد بر ذرات را بتوان از یک انرژی پتانسیل خارجی به دست آورد، آنگاه در دستگاه مختصات کارتری خواهیم داشت:

$$\delta W = -\delta V(x_1, \dots, z_N) = -\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right)$$

در دستگاه مختصات تعمیم یافته خواهیم داشت:

$$\delta W = -\delta V(x_1, \dots, z_N) = -\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k$$

که از مقایسه با

$$\delta W = \sum_{k=1}^{3N} Q_k \delta q_k$$

خواهیم داشت

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

## این رابطه را همچنین می توان به صورت زیر به دست آورد

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{N} \left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = -Q_k$$

## به عنوان مثال می توان نیروی تعمیم یافته در دستگاه مختصات قطبی وارد بر یک ذره به صورت زیر به دست آورد

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{x}}F_x + \hat{\boldsymbol{y}}F_y = \hat{\boldsymbol{r}}F_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}F_\theta$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \left( F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

$$Q_r = F_x\frac{\partial x}{\partial r} + F_y\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$$

$$Q_r = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta = F_r$$

$$Q_\theta = F_x\frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

$$Q_\theta = -rF_x\sin\theta + rF_y\cos\theta = rF_\theta$$

$$Q_r = F_x cos\theta + F_y sin\theta = F_r$$

ملاحظه می کنیم که نیروی تعمیم یافته فوق چیزی جز مولفه نیرو در راستای شعاعی نیست

$$Q_\theta = -rF_x sin\theta + rF_y cos\theta = rF_\theta$$

در حالی که نیروی تعمیم یافته فوق گشتاور نیروی وارد بر ذره است

یعنی لزومی ندارد که واحد نیروی تعمیم یافته حتما نیوتون باشد

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{x}}F_x + \hat{\boldsymbol{y}}F_y = \hat{\boldsymbol{r}}F_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}F_\theta$$

$$-F_x sin\theta + F_y cos\theta = F_\theta$$

$$\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{r}}(F_x cos\theta + F_y sin\theta) + \hat{\boldsymbol{\theta}}(-F_x sin\theta + F_y cos\theta)$$

$$F = \sqrt{(F_x cos\theta + F_y sin\theta)^2 + (-F_x sin\theta + F_y cos\theta)^2}$$

$$F = \sqrt{\left(F_x cos\theta + F_y sin\theta\right)^2 + \left(-F_x sin\theta + F_y cos\theta\right)^2}$$

$$F = \sqrt{(F_x cos\theta)^2 + \left(F_y sin\theta\right)^2 + 2F_xF_y cos\theta sin\theta + (F_x sin\theta)^2 + \left(F_y cos\theta\right)^2 - 2F_xF_y cos\theta sin\theta}$$

$$F = \sqrt{F_x^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + F_y^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$