

# معادلات لاگرانژ

معادلات حرکت لاگرانژ را به دو روش زیر به دست می آوریم:

روش اول: استفاده از تعاریف اندازه حرکت ها و نیروهای تعمیم یافته و بازنویسی قانون دوم نیوتن در دستگاه مختصات تعمیم یافته

روش دوم: استفاده از اصل وردش و کمینه کردن کنش

## روش اول

در روش اول برای به دست آوردن معادلات لاگرانژ از اندازه حرکت تعمیم یافته نسبت به زمان مشتق می گیریم و نشان می دهیم که برابر نیروی تعمیم یافته خواهد شد:

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$



$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = ?$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \dot{y}_i^2}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \dot{z}_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \dot{y}_i^2}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \dot{z}_i^2}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( 2\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + 2\dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + 2\dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_l} + 0$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta_{kl}$$

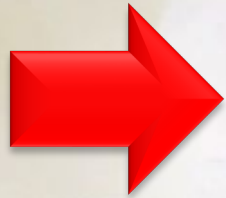
$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_i}{\partial q_l}$$



$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$



$$\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}$$



$$\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = ?$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) + \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) + \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right)$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k + \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right)$$



$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k + \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right)$$

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t)$$

$$d \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) dq_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) dq_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) dt$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_k} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2 \partial q_k} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_l \partial q_k} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_l \partial q_k} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)$$

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t)$$

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k}$$

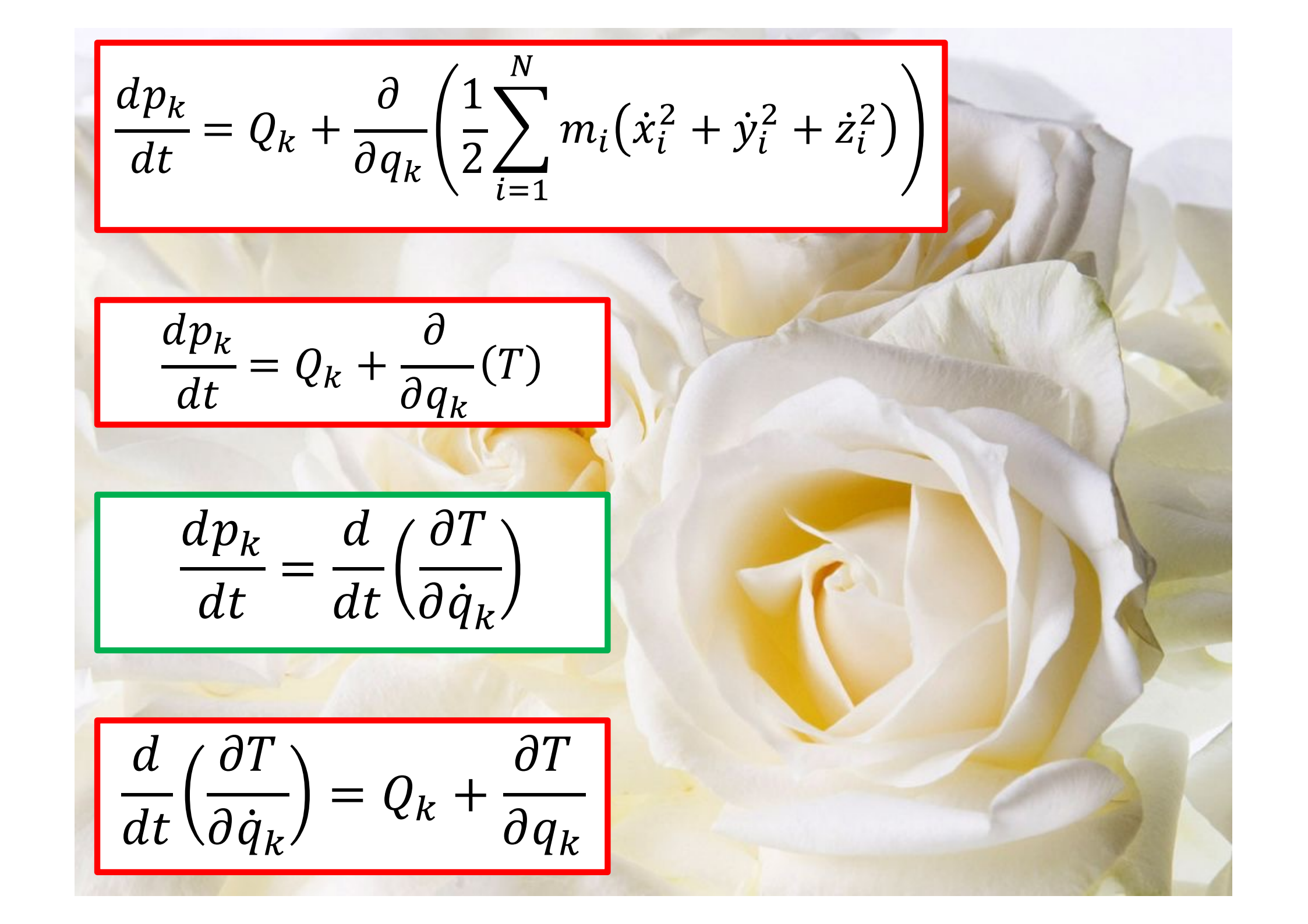
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k}$$

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k + \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k + \sum_{i=1}^N m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k} \right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k + \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right)$$




$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k + \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k + \frac{\partial}{\partial q_k} (T)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

حال تابع لاگرانژ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3N}; t) = T - V$$

که در آن انرژی جنبشی می تواند هم به مختصه های مکانی و هم به مختصه های سرعت تعمیم یافته بستگی دارد:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3N})$$

در حالی که انرژی پتانسیل اکثرا به مختصه های مکانی و در برخی مواقع به زمان دارد، که در اینجا انرژی پتانسیل مستقل از زمان را بررسی می کنیم

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_{3N})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - 0 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

ابتدا سمت چپ معادله فوق  
را بر حسب تابع لاگرانژ به  
دست می آوریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

حال سمت راست معادله را  
بر حسب تابع لاگرانژ به دست  
می آوریم:



$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

معادلات لاگرانژ

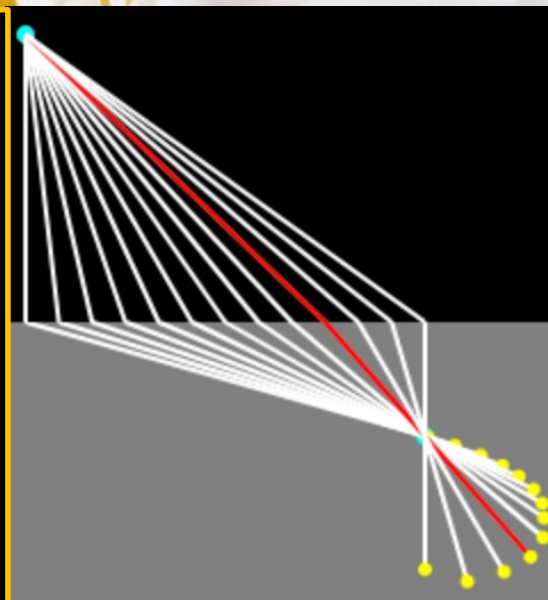
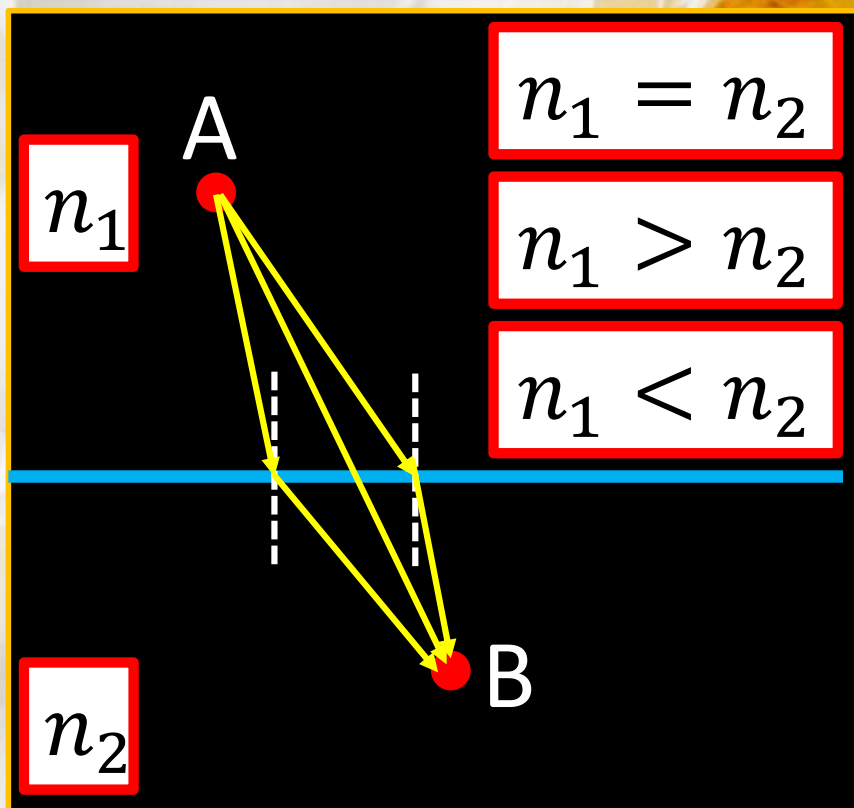


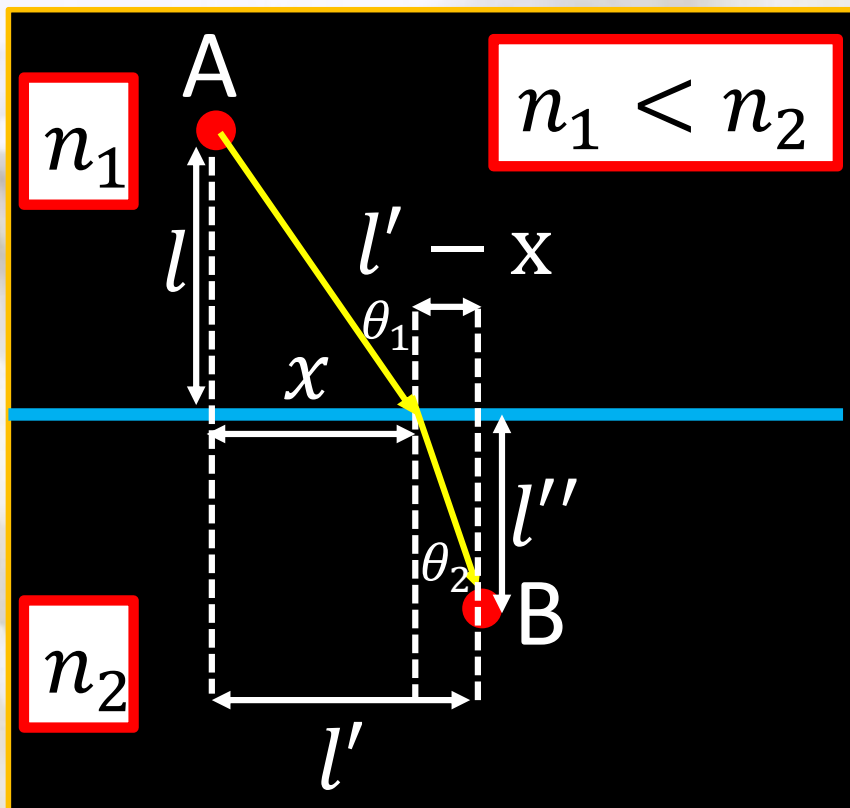
## روش دوم

در روش دوم برای به دست آوردن معادلات لاگرانژ از اصل کمترین کنش (Principle of Least Action) استفاده می کنیم

پیش از بیان روش فوق مقدماتی برای آشنایی با این روش ابتدا یادآوری می کنیم که طبق اصل فرما در اپتیک هندسی داریم:

اصل فرما: نور برای رفتن از نقطه A به نقطه B در مسیری حرکت می کند که زمان پیمایش مسیر کمینه شود.





$$t = \frac{\sqrt{l^2 + x^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{l''^2 + (l' - x)^2}}{c/n_2}$$

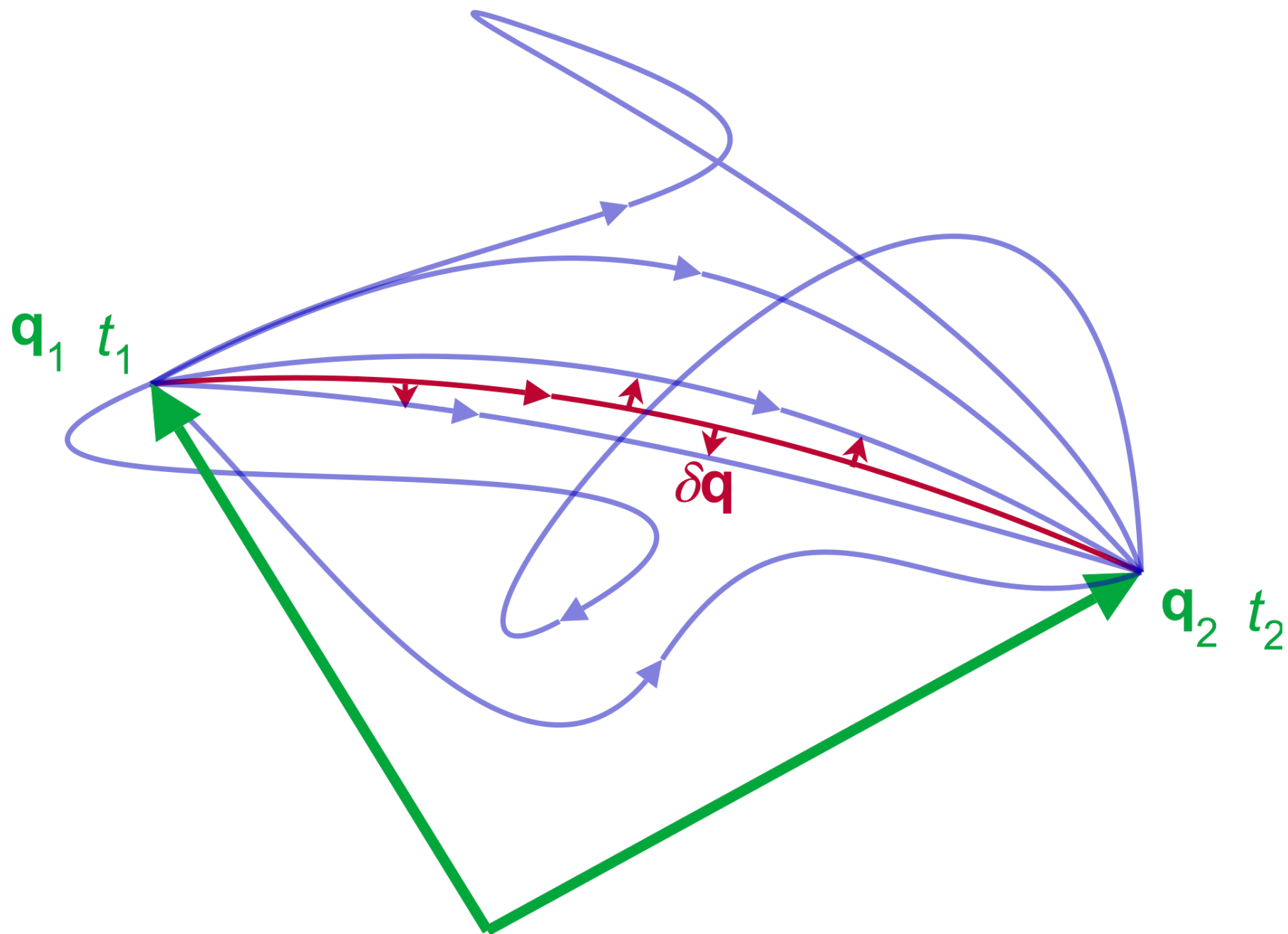
$$\frac{dt}{dx} = \frac{n_1 \frac{1}{2}(2x)}{c\sqrt{l^2 + x^2}} + \frac{n_2 \frac{1}{2}(2(-1)(l' - x))}{c\sqrt{l''^2 + (l' - x)^2}} = 0$$

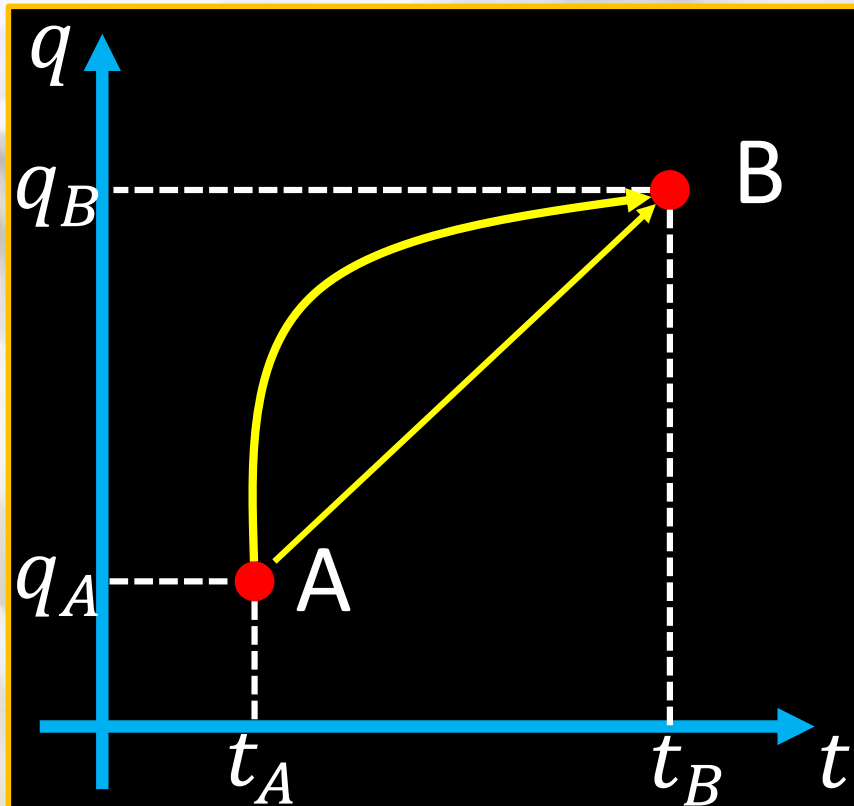
$$n_1 \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = n_2 \frac{l' - x}{\sqrt{l''^2 + (l' - x)^2}}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

که همان قانون اسنل-دکارت در خصوص نور است

به طور مشابه می توان معادله حرکت لاگرانژ یک ذره با جرم سکون غیر صفر را از اصل هامیلتون به دست آورد





اصل هامیلتون: یک ذره به جرم  $m$  برای رفتن از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  در مسیری حرکت می کند که کنش  $S$  کمینه شود

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t) dt$$

$$L = L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - V(q, t)$$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

توجه شود که حالات سیستم در نقاط  $A$  و  $B$  ثابت هستند و فقط بین این نقاط می توانند تغییر کنند



$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t) dt$$

$$L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_A}^{t_B} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt - \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t) dt$$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = ?$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = ?$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \left( \frac{d}{dt} (q) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt - \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt - \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right)_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

جمله اول  
صفر می شود

زیرا همان طور که قبلا بیان شد حالات سیستم در نقاط A و B ثابت هستند، چون نقاط A و B فیکس شده اند و لذا حالات سیستم فقط بین این نقاط می توانند تغییر کنند، پس:

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = 0 - \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = 0$$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt - \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt - \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

که همان معادله  
لاگرانژ است



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

به عکس می توان به  
صورت زیر معادلات  
نیوتن را از معادلات  
لاگرانژ به دست آورد

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

$$Q_{k=1} = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial x_1} \right) = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} \right) = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta_{i1}) = F_{1x}$$

$$Q_{k=2} = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial y_1} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial y_1} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial y_1} \right) = \sum_{i=1}^N \left( F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial y_1} \right) = \sum_{i=1}^N (F_{iy} \delta_{i1}) = F_{1y}$$

$$Q_{k=3} = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial z_1} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial z_1} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial z_1} \right) = \sum_{i=1}^N \left( F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial z_1} \right) = \sum_{i=1}^N (F_{iz} \delta_{i1}) = F_{1z}$$



$$Q_{k=4} = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial x_2} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial x_2} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial x_2} \right) = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial x_2} \right) = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta_{i2}) = F_{2x}$$

$$Q_{k=5} = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial y_2} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial y_2} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial y_2} \right) = \sum_{i=1}^N \left( F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial y_2} \right) = \sum_{i=1}^N (F_{iy} \delta_{i2}) = F_{2y}$$

$$Q_{k=6} = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial z_2} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial z_2} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial z_2} \right) = \sum_{i=1}^N \left( F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial z_2} \right) = \sum_{i=1}^N (F_{iz} \delta_{i2}) = F_{2z}$$

$$Q_{k=7} = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial x_3} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial x_3} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial x_3} \right) = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial x_3} \right) = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta_{i3}) = F_{3x}$$

$$Q_{k=8} = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial y_3} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial y_3} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial y_3} \right) = \sum_{i=1}^N \left( F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial y_3} \right) = \sum_{i=1}^N (F_{iy} \delta_{i3}) = F_{3y}$$

$$Q_{k=9} = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial z_3} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial z_3} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial z_3} \right) = \sum_{i=1}^N \left( F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial z_3} \right) = \sum_{i=1}^N (F_{iz} \delta_{i3}) = F_{3z}$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

$$\text{if } q_k = x_j \rightarrow Q_k = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta_{ij} + 0 + 0) = F_{jx}$$

$$\text{if } q_k = y_j \rightarrow Q_k = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial y_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \right) = \sum_{i=1}^N (0 + F_{iy} \delta_{ij} + 0) = F_{jy}$$

$$\text{if } q_k = z_j \rightarrow Q_k = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial z_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial z_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial z_j} \right) = \sum_{i=1}^N (0 + 0 + F_{iz} \delta_{ij}) = F_{jz}$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = m_i \ddot{x}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) = m_i \ddot{y}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) = m_i \ddot{z}_i$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = F_{ix}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = m_i \ddot{x}_i - 0 = F_{ix}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} = F_{iy}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} = m_i \ddot{y}_i - 0 = F_{iy}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_i} = F_{iz}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_i} = m_i \ddot{z}_i - 0 = F_{iz}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial y_i} = \frac{\partial T}{\partial z_i} = 0$$

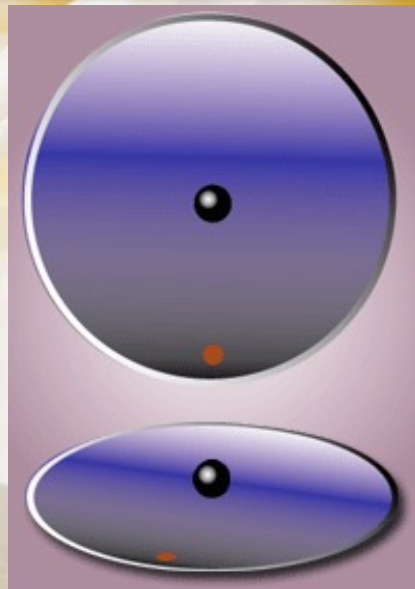
که همان قوانین دوم نیوتن هستند

سوال: آیا نیروی کوریولی فقط داری مولفه مماسی است یا مولفه شعاعی هم می تواند داشته باشد؟

سوال: آیا نیروی کوریولی فقط ناشی از حرکت دورانی خود ذره است؟

سوال: آیا اگر در یک دستگاه ساکن غیر دوار حین دوران خود ذره، این ذره در راستای شعاعی حرکت نکند نیروی کوریولی به وجود نخواهد آمد؟

سوال: آیا اگر در یک دستگاه دوار حین دوران، ذره در راستای شعاعی حرکت نکند نیروی کوریولی به وجود خواهد آمد؟



معادلات لاگرانژ یک ذره به جرم  $m$  در دستگاه قطبی ساکن

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = F_r$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = rF_{\theta}$$

که جمله دوم همان نیروی جانب مرکز است

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - 0 = rF_{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2$$

$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = F_{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

که جمله دوم نیروی کوریولی با علامت مثبت در جهت  $\theta$  ناشی از سرعت زاویه‌ای  $\dot{\theta}$  خود ذره است



$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mr^2\dot{\theta}\omega + \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = F_r$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = rF_\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + 2mr\omega\dot{\theta} + m\omega^2r$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} + mr^2\omega$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

معادلات لاگرانژ یک ذره به جرم  $m$  در دستگاه قطبی دوار با سرعت زاویه ای  $\omega$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} + 2m\omega r\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - 2mr\omega\dot{\theta} - m\omega^2r = F_r$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - 2mr\omega\dot{\theta} - m\omega^2r = F_r$$

که جمله سوم نیروی کوریولی با علامت منفی در جهت شعاعی ناشی از دوران دستگاه است و جمله چهارم نیروی گریز از مرکز با علامت منفی در جهت شعاعی ناشی از دوران دستگاه است

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} + 2m\omega r\dot{r} = rF_\theta$$

$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} + 2m\omega\dot{r} = F_\theta$$

که جملات دوم و سوم نیروهای کوریولی با علامت مثبت در جهت  $\theta$  به ترتیب ناشی از دوران خود ذره با سرعت زاویه ای  $\dot{\theta}$  و دوران دستگاه با سرعت زاویه ای  $\omega$  است

به طور خلاصه و به عنوان نتیجه گیری می توان گفت که: دو نوع نیروی کوریولی داریم:

نیروی کوریولی ناشی از دوران خود ذره

$$2m\dot{r}\dot{\theta}$$

$$2mr\omega\dot{\theta}$$

$$2mr\omega\dot{r}$$

نیروی کوریولی ناشی از دوران دستگاه ذره

نیروی کوریولی ناشی از دوران خود ذره فقط دارای مولفه مماسی است

$$2m\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}$$

اما نیروی کوریولی ناشی از دوران دستگاه دارای هر دو مولفه شعاعی و مماسی می تواند باشد

$$2mr\omega\dot{\theta}\hat{r}$$

$$2mr\omega\dot{r}\hat{\theta}$$

سوال: آیا نیروی کوریولی فقط داری مولفه مماسی است یا مولفه شعاعی هم می تواند داشته باشد؟

پاسخ: بله، در دستگاه ساکن فقط می تواند دارای مولفه مماسی باشد، اما در دستگاه دوار می تواند دارای هر دو مولفه مماسی و شعاعی باشد.

سوال: آیا نیروی کوریولی فقط ناشی از حرکت دورانی خود ذره است؟

پاسخ: خیر، ناشی از حرکت دستگاه هم می تواند باشد.

سوال: آیا اگر در یک دستگاه ساکن غیر دوار حین دوران خود ذره، این ذره در راستای شعاعی حرکت نکند نیروی کوریولی به وجود نخواهد آمد؟

پاسخ: خیر، در این حالت حتما ذره باید حرکت شعاعی هم انجام دهد.

سوال: آیا اگر در یک دستگاه دوار حین دوران، ذره در راستای شعاعی حرکت نکند نیروی کوریولی به وجود خواهد آمد؟

پاسخ: بله، اما فقط در راستای شعاعی و اگر حرکت شعاعی انجام دهد هر دو مولفه مماسی و شعاعی وجود خواهند داشت.