

ثابت های حرکت و مختصات قابل اغماض

ثابتهای حرکت موجب کاهش تعداد مجهولات و در نتیجه ساده شدن مسایل می شوند

با استفاده از معادله لاگرانژ می توان ثابتهای حرکت را به صورت زیر تعیین کرد

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$\text{if } L \neq L(q_k)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$$

$$\frac{dp_k}{dt} = 0$$

$$p_k = cte.$$

یعنی اگر لاگرانژی تابع صریحی از q_k نباشد، آنگاه p_k یک ثابت حرکت خواهد شد. در این صورت q_k یک مختصه قابل اغماض است.

با استفاده از معادلات لاگرانژ نشان دهید که در یک دستگاه مختصات ثابت انرژی کل یک ثابت حرکت است

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{3N} B_k \dot{q}_k + T_0 = T_2 + T_1 + T_0$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial q_l} \right) = A_{kl}$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) = B_k$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right) = T_0$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

دستگاه مختصات ثابت

$$T_0 = 0$$

$$B_k = 0$$

$$T_1 = 0$$

$$T = T_2$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$



$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{l=1}^{3N} A_{kl} \dot{q}_l$$

$$\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \sum_{l=1}^{3N} A_{kl} \dot{q}_l = \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l = 2T$$

$$L = T - V = T_2 - V$$

$$\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = 2T - (T - V) = 2T - T + V = T + V = E$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L \right) = \frac{dE}{dt}$$

$$V \neq f(\dot{q}_k)$$



$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right) = \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right) = \frac{dE}{dt}$$

$$\sum_{k=1}^{3N} \left[\ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] - \frac{dL}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

$$L = f(q_k, \dot{q}_k, t)$$

$$dL = \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right] + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\sum_{k=1}^{3N} \left[\ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] - \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dE}{dt}$$

$$\sum_{k=1}^{3N} \left[\ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dE}{dt}$$

$$\sum_{k=1}^{3N} \left[\dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dE}{dt}$$

$$\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dE}{dt}$$

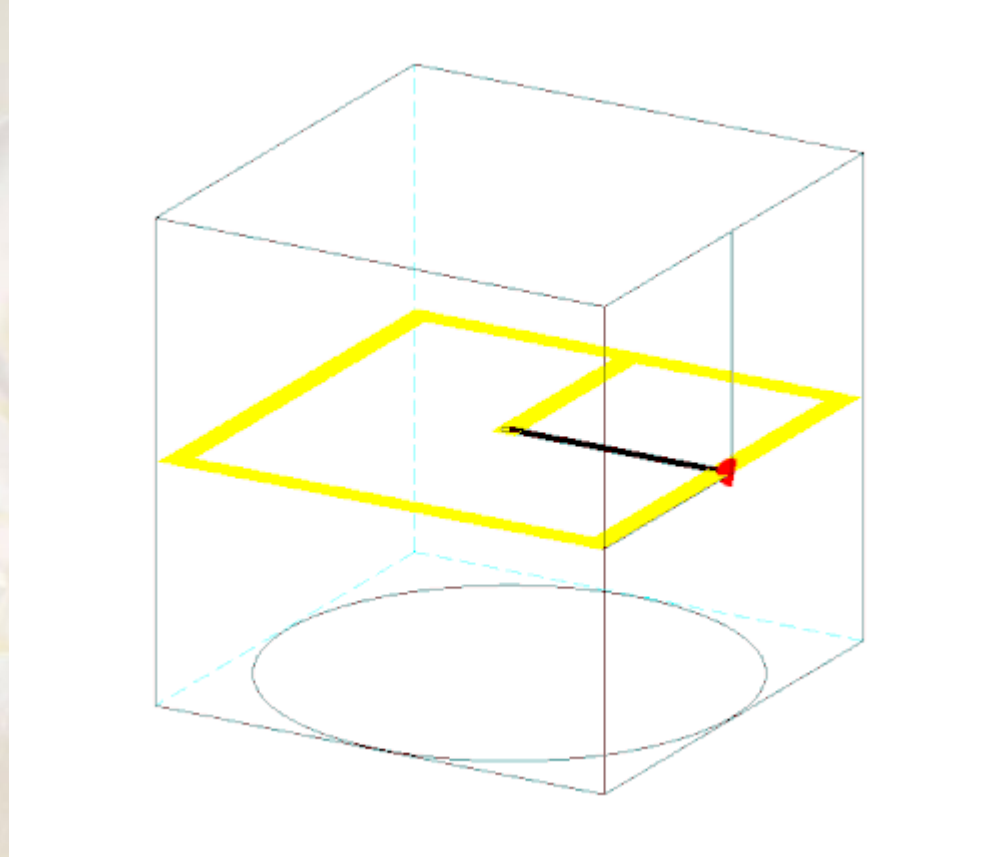
که همان
قانون
انرژی است بقا

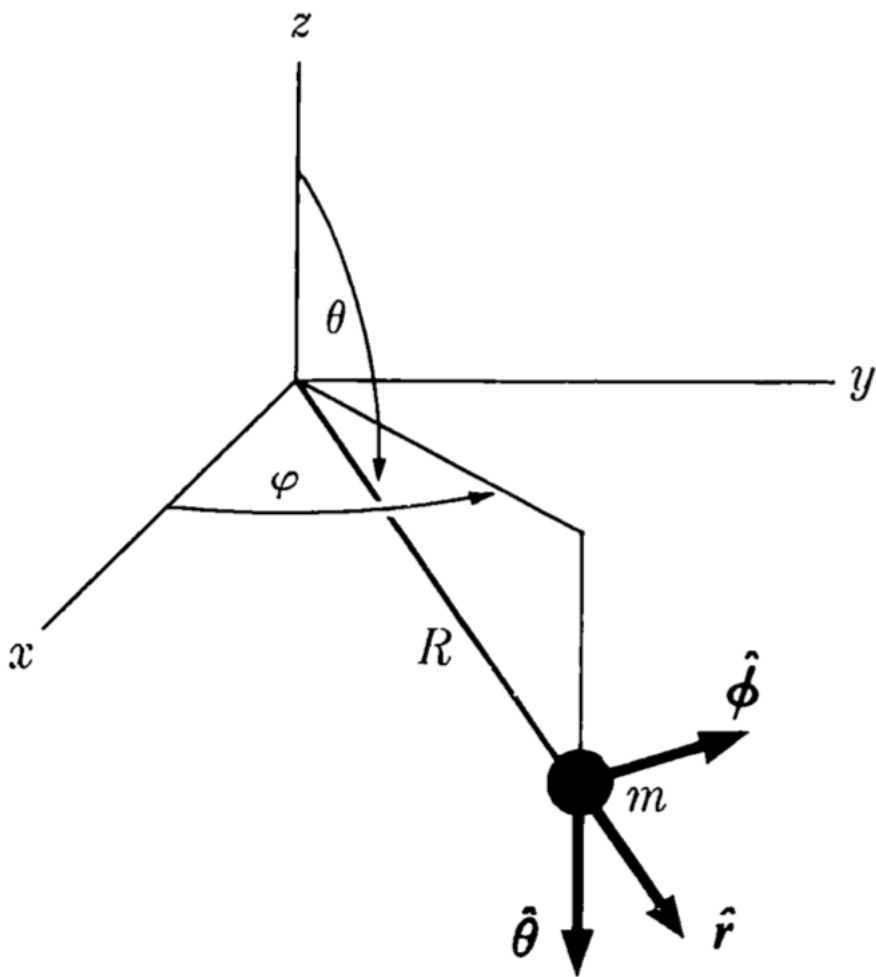
if $L \neq f(t)$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dE}{dt} = 0$$

آونگ کروی





$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

آونگ کروی

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

$$r = R = \text{cte.}$$

$$\dot{r} = 0$$

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

$$V = mgR \cos \theta$$

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - mgR \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta$$

$$mR^2\ddot{\theta} - mR^2\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta = 0$$

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - mgR\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta) = mR^2\ddot{\phi}\sin^2\theta + mR^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin 2\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - 0 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = p_{\phi}$$

$$\frac{dp_{\phi}}{dt} = 0$$

$$p_{\phi} = \text{cte.}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta) - 0 = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta) = \frac{dp_{\phi}}{dt}$$

$$mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta = p_{\phi}$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_{\phi}}{mR^2\sin^2\theta}$$

if $L \neq f(t)$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right) = \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = E = cte.$$

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = E = cte.$$

$$\dot{\theta} (mR^2 \dot{\theta}) + \dot{\varphi} (mR^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) - \left(\frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgR \cos \theta \right) = E = cte.$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + mgR \cos \theta = T + V = E = cte.$$

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + mgR\cos\theta = E$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_{\phi}}{mR^2\sin^2\theta}$$

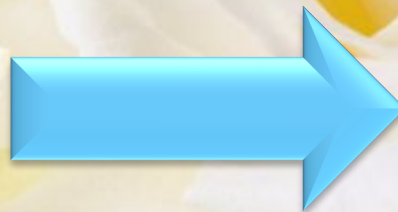
$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\left(\frac{p_{\phi}}{mR^2\sin^2\theta}\right)^2 + mgR\cos\theta = E$$

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{p_{\phi}^2}{mR^2\sin^2\theta} + mgR\cos\theta = E$$

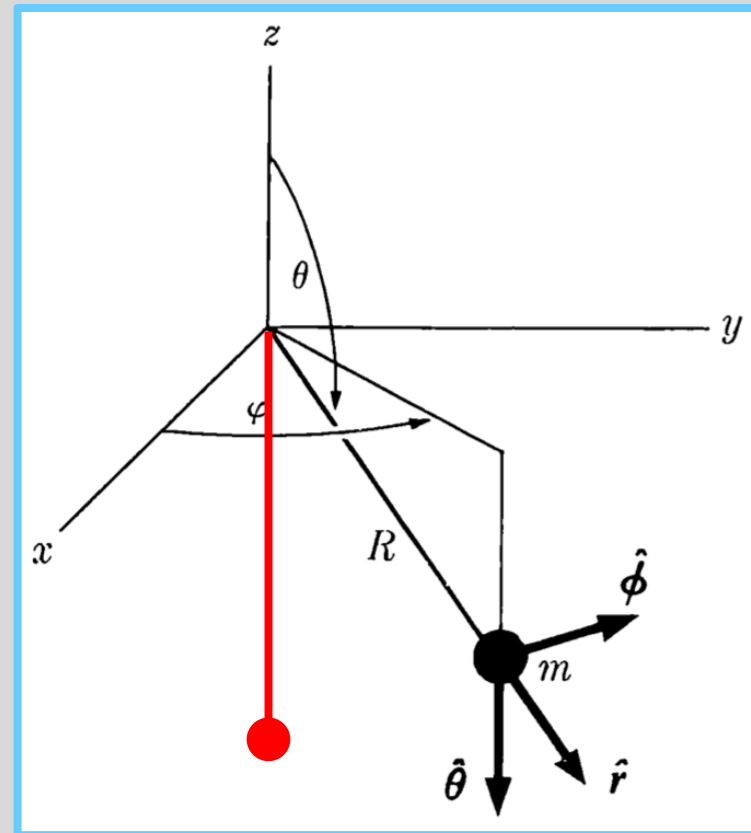
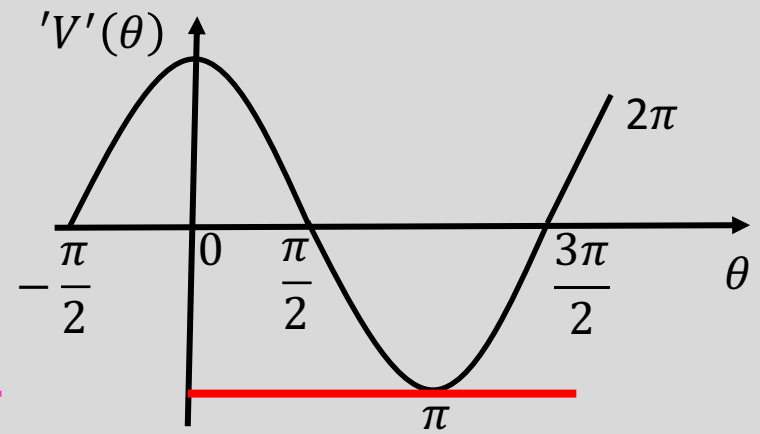
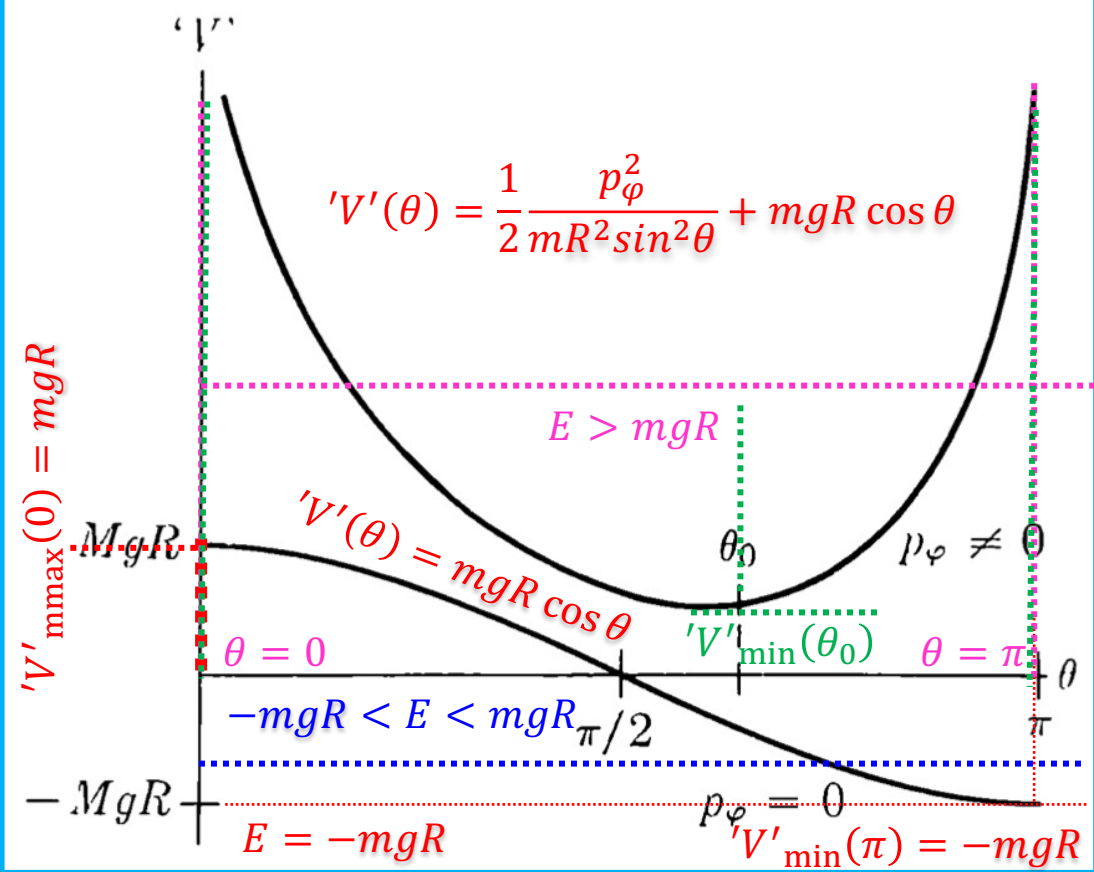
$$'V'(\theta) = \frac{1}{2}\frac{p_{\phi}^2}{mR^2\sin^2\theta} + mgR\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + 'V'(\theta) = E$$

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \geq 0$$



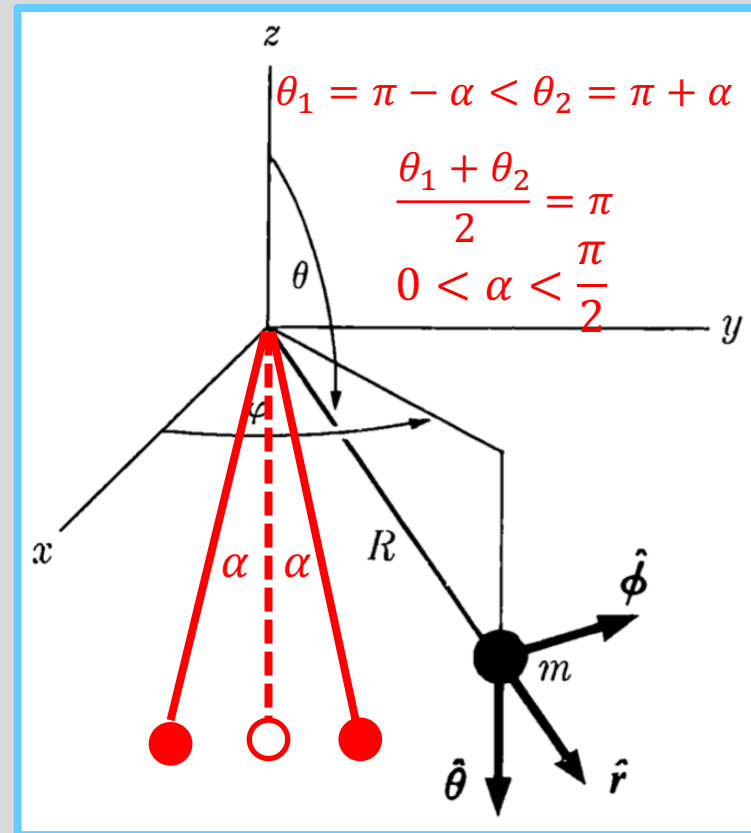
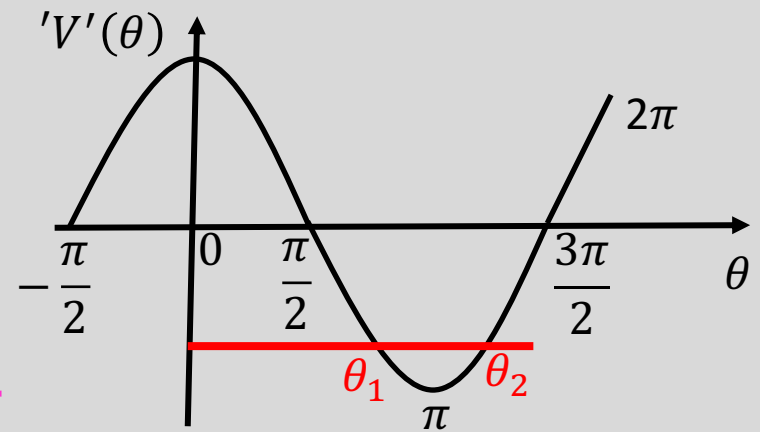
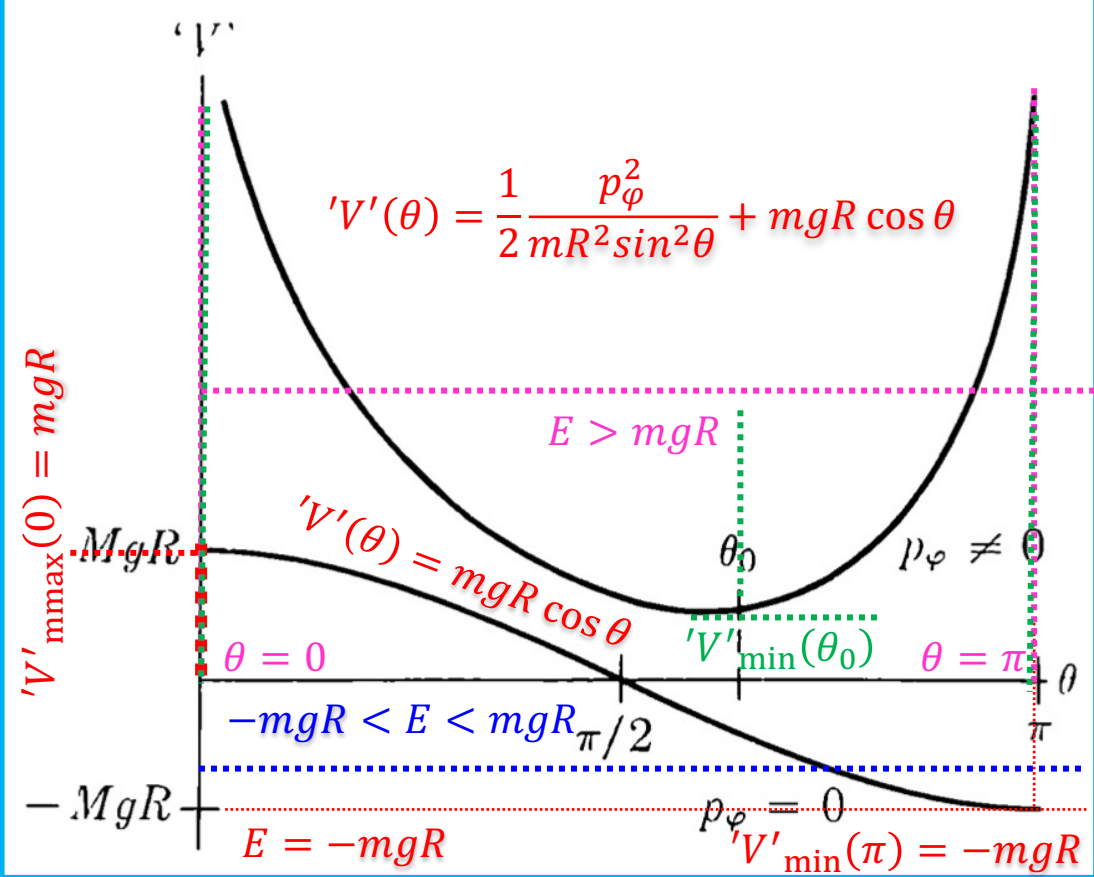
$$E \geq 'V'(\theta)$$



$$V'(\theta) = \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta$$

$$p_\phi = 0 \rightarrow V'(\theta) = mgR \cos \theta$$

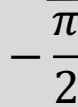
$$\text{If } p_\phi = 0 \text{ \& } E = -mgR \Rightarrow \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + 0 + mgR \cos \pi = E = -mgR \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \text{at rest at } \theta = \pi$$



$$V'(\theta) = \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta$$

$$p_\phi = 0 \rightarrow V'(\theta) = mgR \cos \theta$$

If $p_\phi = 0$ & $-mgR < E < 0$
 $\Rightarrow$ Oscillation about $\theta = \pi$ from $\pi - \alpha$ to $\pi + \alpha$

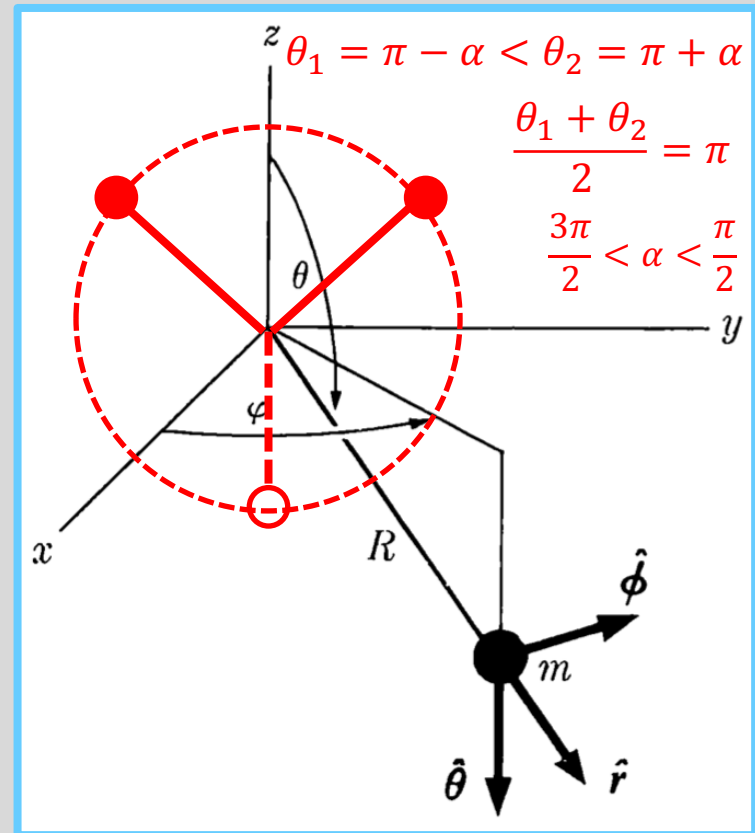
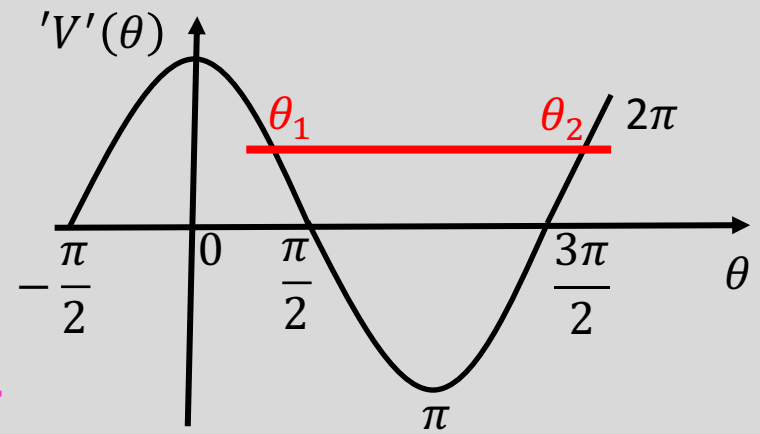
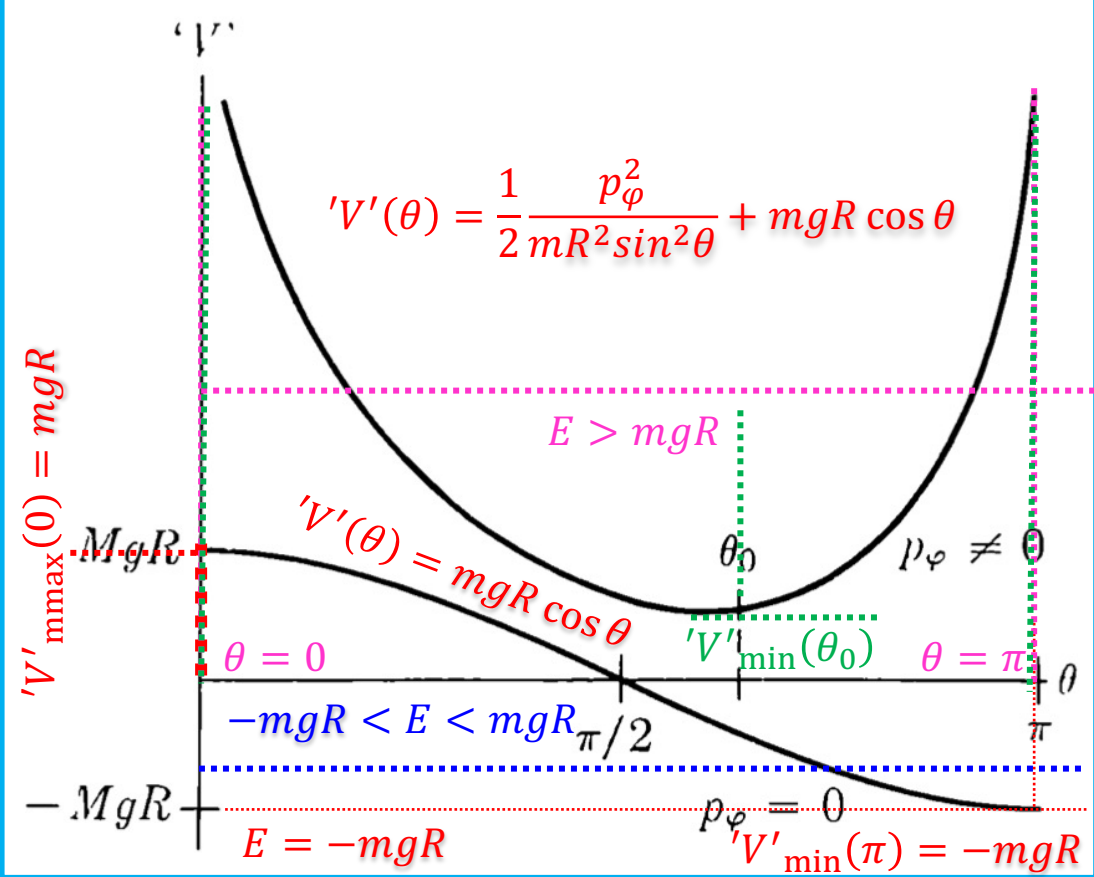


$$V'(\theta)$$

p_φ

If p_φ

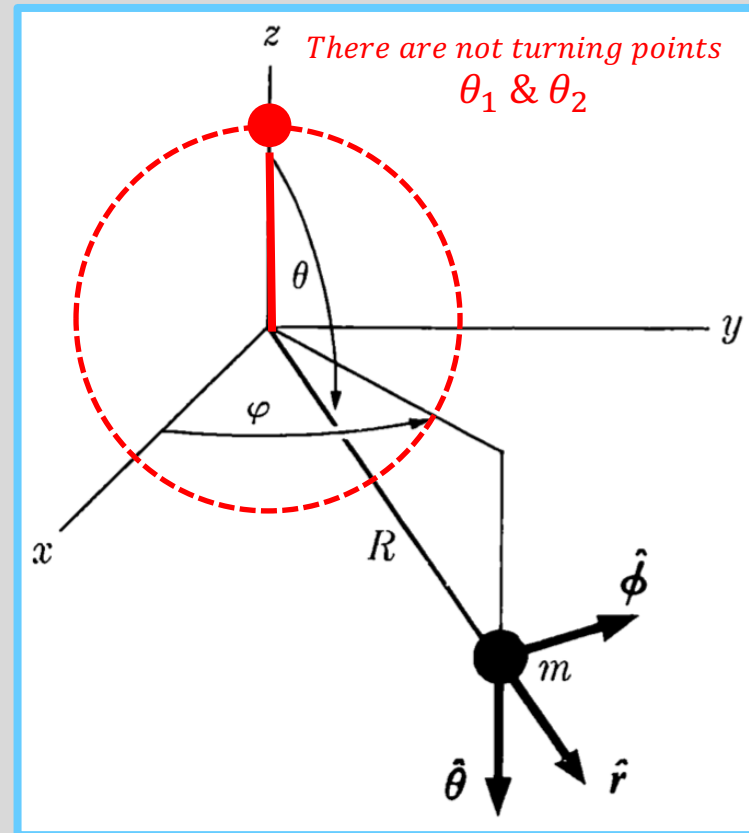
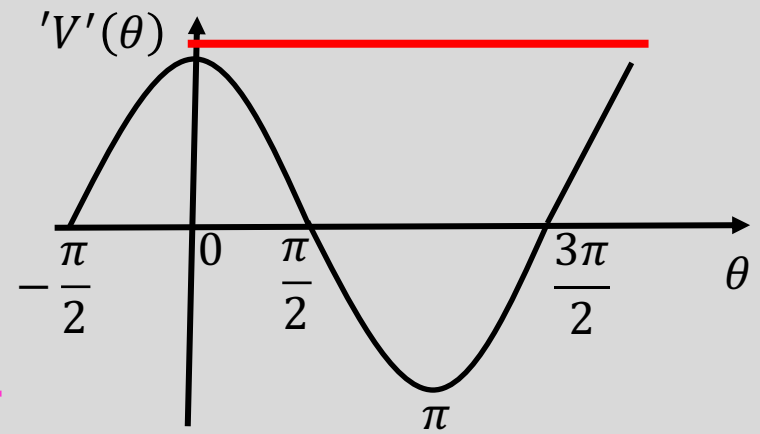
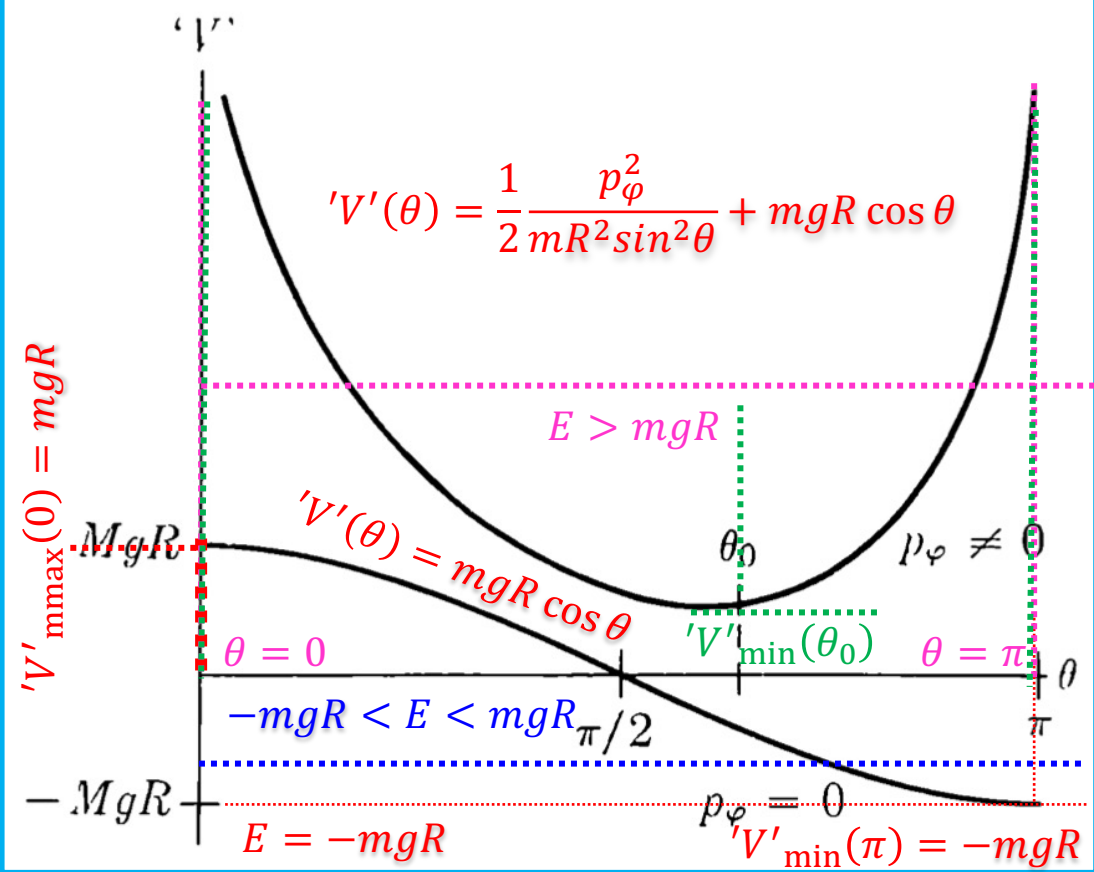
$$\theta = \pi \text{ from } \pi - \frac{\pi}{2} \text{ to } \pi + \frac{\pi}{2}$$



$$V'(\theta) = \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta$$

$$p_\phi = 0 \rightarrow V'(\theta) = mgR \cos \theta$$

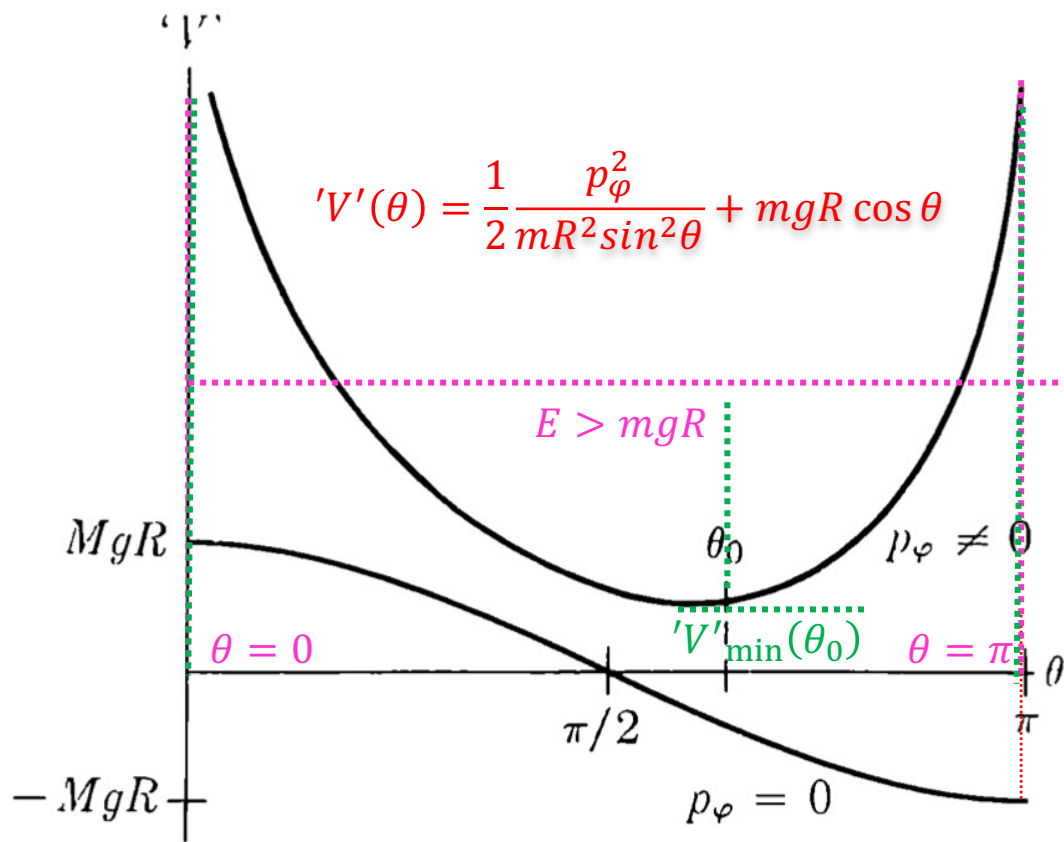
If $p_\phi = 0$ & $0 < E < mgR \Rightarrow$ Oscillation about $\theta = \pi$ from $\pi - \alpha$ to $\pi + \alpha$



$$V'(\theta) = \frac{1}{2mR^2 \sin^2 \theta} p_\phi^2 + mgR \cos \theta$$

$$p_\phi = 0 \rightarrow V'(\theta) = mgR \cos \theta$$

If $p_\phi = 0$ & $E > mgR \Rightarrow$ Rotate around a circle from $\theta = 0$ to 2π



$$\text{If } p_\phi \neq 0 \text{ \& } 'V'_{\min} \left(\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi \right) \\ = \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{mR^2 \sin^2 \theta_0} + mgR \cos \theta_0$$

$$\text{If } p_\phi \neq 0 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} 'V'(\theta) \rightarrow \infty$$

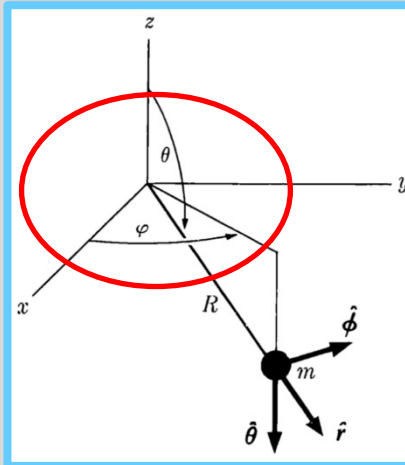
$$\text{If } p_\phi \neq 0 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow \pi} 'V'(\theta) \rightarrow \infty$$

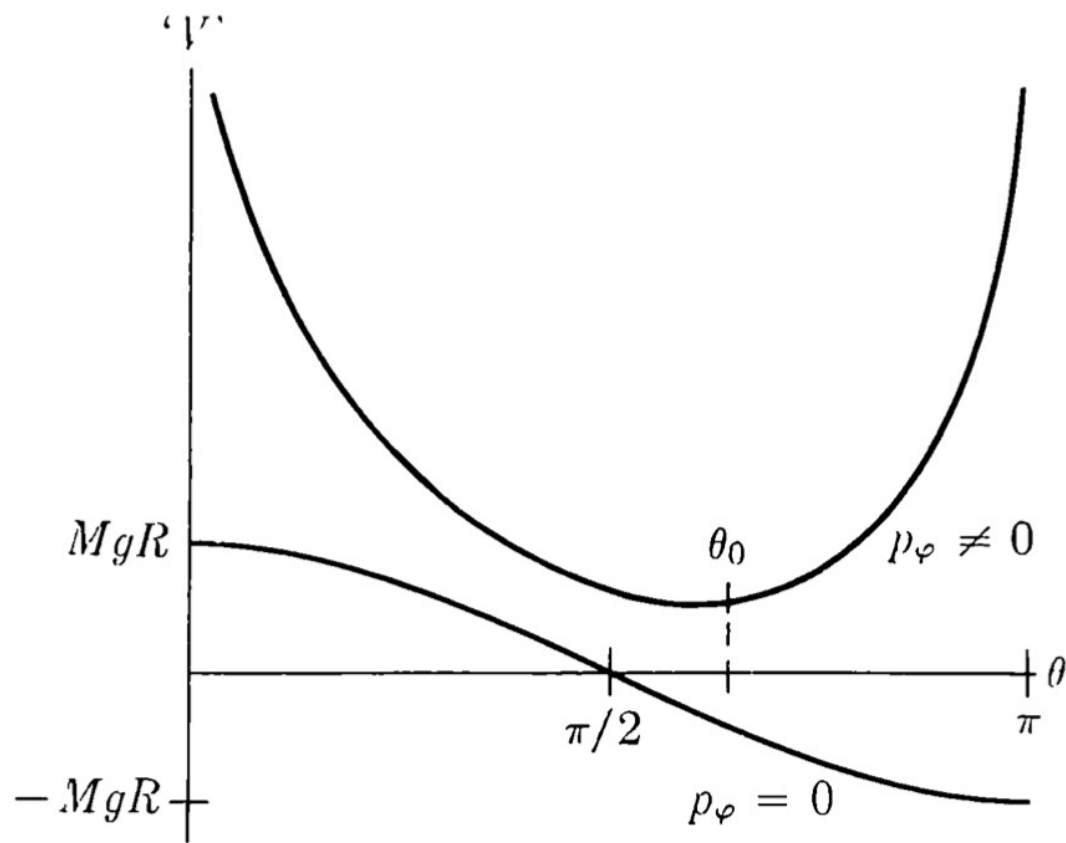
$$\text{If } p_\phi \gg 1 \Rightarrow 'V'(\theta) \approx \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{mR^2 \sin^2 \theta} \\ \Rightarrow \frac{d'V'(\theta)}{d\theta} \approx -\frac{p_\phi^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} = 0 \Rightarrow \theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

یعنی با افزایش p_ϕ به سمت $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ میل می کند و جسم تحت زاویه θ_0 روی یک دایره به شعاع R حرکت می کند

$$'V'(\theta) = \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta$$

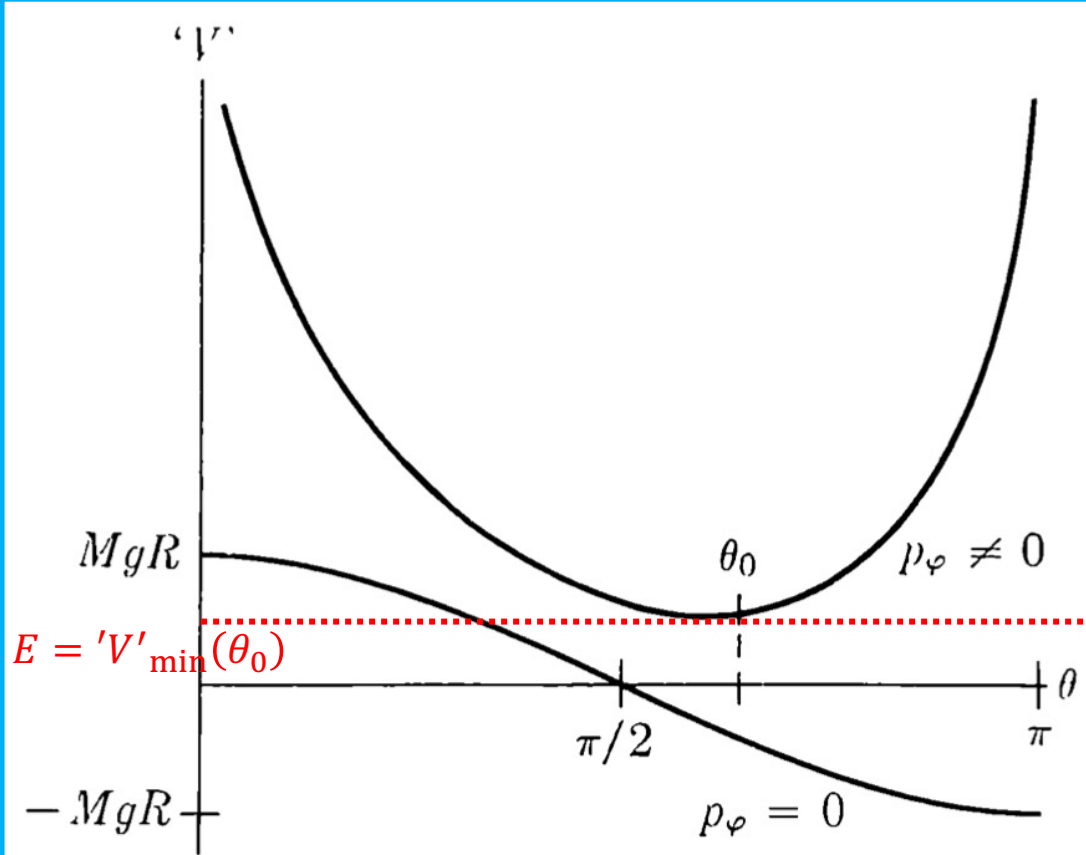
If $p_\phi \neq 0$ & $E > mgR$
 $\rightarrow$ no longer a simple pendulum





$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi \Rightarrow \cos \theta_0 < 0 \Rightarrow 'V'_{\min}(\theta_0) = \frac{1}{2} \frac{p_{\varphi}^2}{mR^2 \sin^2 \theta_0} + mgR \cos \theta_0$$

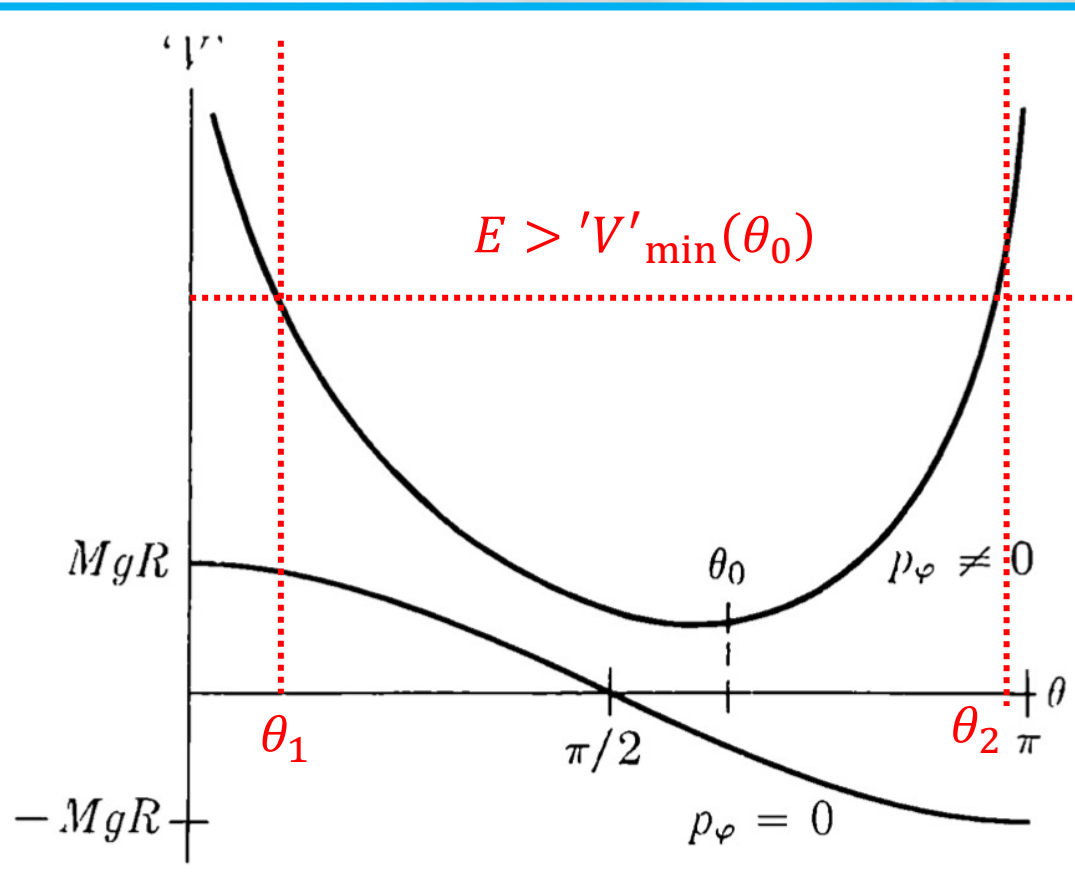
بنابراین با افزایش p_{φ} و میل کردن θ_0 به سمت $\frac{\pi}{2}$ کمینه پتانسیل موثر $'V'_{\min}(\theta_0)$ افزایش می یابد



این یعنی این که آونگ در دایره ای به شعاع ثابت $R \sin \theta_0$ حول محور قایم دوران می کند در حالی که با محور قایم زاویه ثابت θ_0 را ساخته است

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + mgR\cos\theta = E$$

$$\begin{aligned} \text{If } E = 'V'_{\min}(\theta_0) &\Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\Big|_{\theta=\theta_0} + \frac{1}{2}\frac{p_{\phi}^2}{mR^2\sin^2\theta_0} + mgR\cos\theta_0 = E \\ &= \frac{1}{2}\frac{p_{\phi}^2}{mR^2\sin^2\theta_0} + mgR\cos\theta_0 \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow \dot{\theta}\Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 = cte. \\ &\Rightarrow \text{but since } p_{\phi} \neq 0, \text{ then the object is not at rest and has a circular motion} \end{aligned}$$



If $E > V'_{\min}(\theta_0)$

آنگاه θ_0 بین زوایای برگشت θ_1 و θ_2 نوسان می کند در حالی که آونگ حول محور قائم دوران می کند

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{p_{\phi}^2}{m R^2 \sin^2 \theta} + m g R \cos \theta = E$$

معادله فوق را نمی توان به صورت تحلیلی بر حسب توابع مقدماتی حل کرد و زاویه $\theta(t)$ را به صورت تابعی از زمان به دست آورد

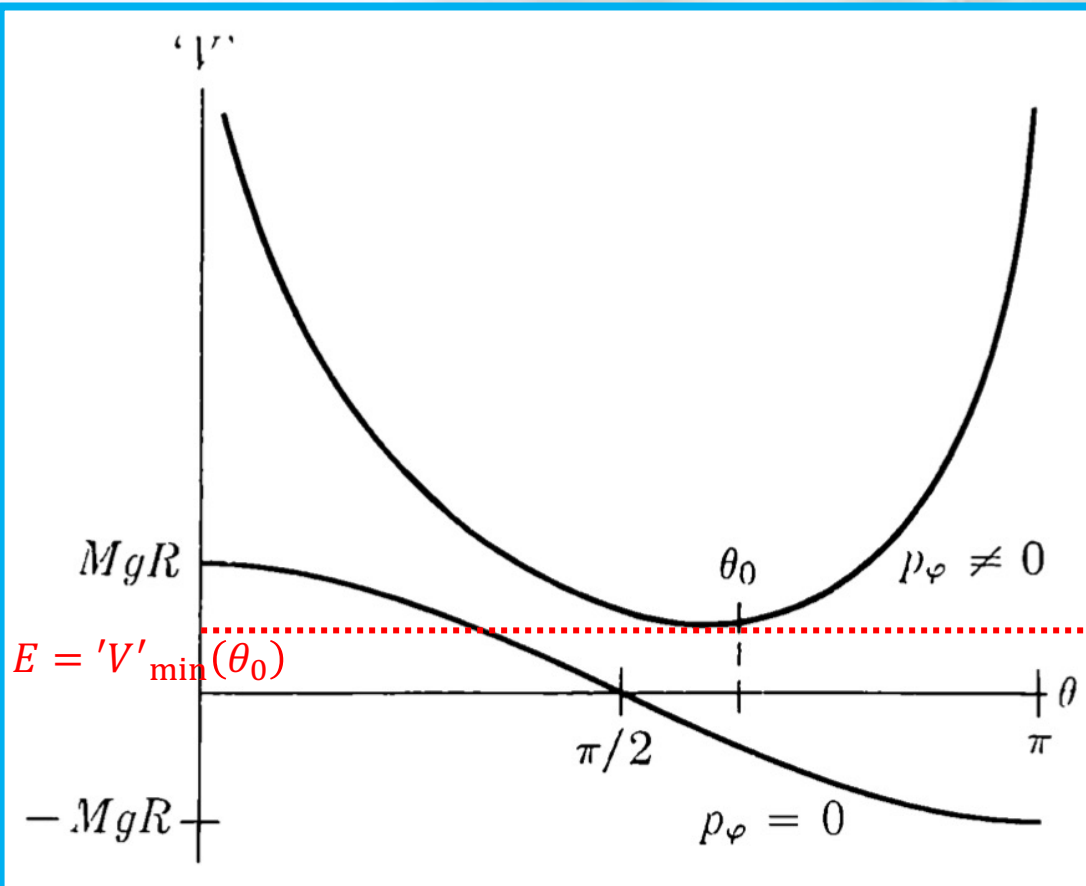
اما می توان آن را با کامپیوتر شبیه سازی کرد. برای این منظور می توان از پایتون استفاده کرد.

البته می توان حرکات ساده دایره ای و تقریبا دایره ای را به طور تحلیلی حل کرد

$$'V'(\theta) = \frac{1}{2} \frac{p_{\phi}^2}{m R^2 \sin^2 \theta} + m g R \cos \theta$$

$$\left. \frac{d'V'(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} = - \frac{p_{\phi}^2 \cos \theta_0}{m R^2 \sin^3 \theta_0} - m g R \sin \theta_0 = 0$$





$$\dot{\phi}^2 = \frac{g}{R} \frac{1}{(-\cos \theta_0)}$$



$$(\dot{\phi})^2 R \cos \theta_0 = -g$$



$$\left. \frac{dV'(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} = -\frac{p_\phi^2 \cos \theta_0}{mR^2 \sin^3 \theta_0} - mgR \sin \theta_0 = 0$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2 \sin^2 \theta}$$

$$\frac{(\dot{\phi} m R^2 \sin^2 \theta)^2 \cos \theta_0}{m R^2 \sin^3 \theta_0} = -mgR \sin \theta_0$$

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + mgR\cos\theta = E$$

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{g}{R}\frac{1}{\cos\theta_0}$$

$$\text{if } \theta = \theta_0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \text{ \& } E = E_0$$

$$-\frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta_0\frac{g}{R}\frac{1}{\cos\theta_0} + mgR\cos\theta_0 = E_0$$

$$-\frac{1}{2}mgR\frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0} + mgR\cos\theta_0 = E_0$$

$$\frac{1}{2}mgR\left[-\frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0} + 2\cos\theta_0\right] = E_0$$

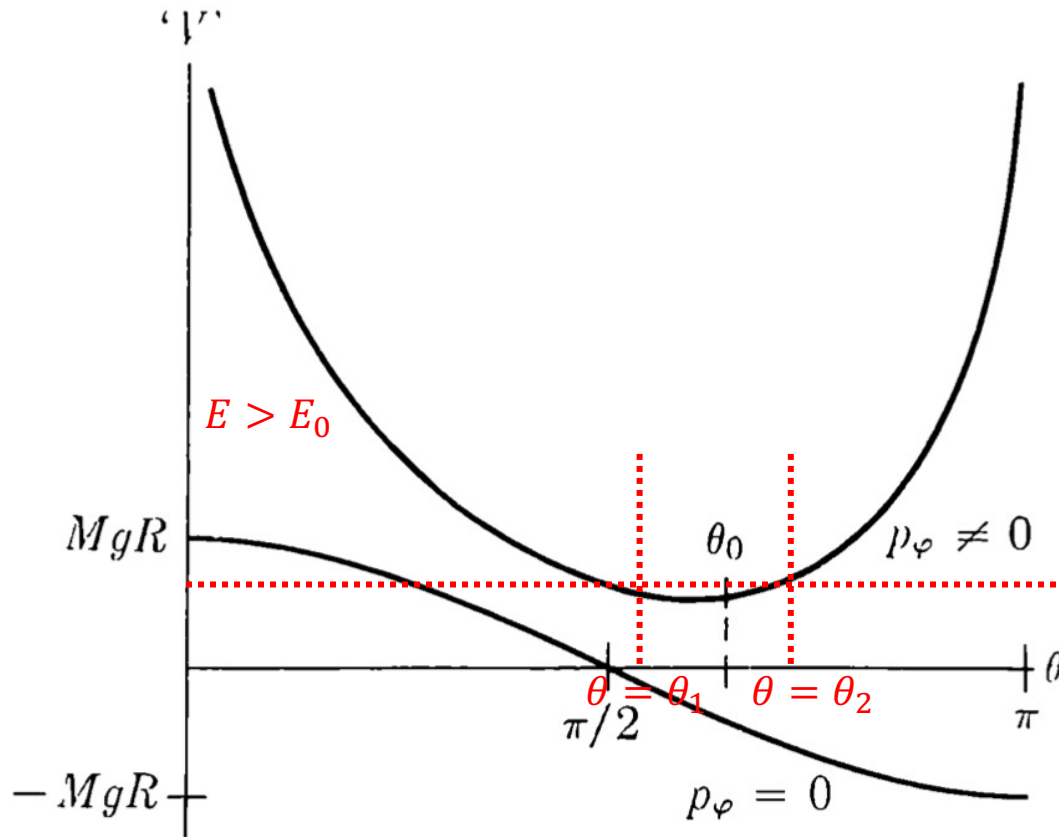
$$\frac{1}{2}mgR\left[\frac{-\sin^2\theta_0 + 2\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0}\right] = E_0$$

$$\frac{1}{2}mgR\left[\frac{-\sin^2\theta_0 + 2(1 - \sin^2\theta_0)}{\cos\theta_0}\right] = E_0$$

$$\frac{1}{2}mgR \left[\frac{-\sin^2 \theta_0 + 2 - 2\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right] = E_0$$

$$E_0 = \frac{1}{2}mgR \left(\frac{2 - 3\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right)$$

معادله انرژی برای حرکت دایره ای یکنواخت در زاویه θ_0



برای هر انرژی E و یک p_ϕ حرکت نوسانی ساده $\neq 0$ نیست، اما برای یک انرژی E اندکی بزرگتر از E_0 و یک $p_\phi \neq 0$ معین دو نقطه برگشت θ_1 و θ_2 وجود دارند، که بین آنها و حول θ_0 یک حرکت نوسانی ساده انجام می شود

$$V'(\theta) = \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta$$

$$\frac{dV'(\theta)}{d\theta} = -\frac{p_\phi^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} - mgR \sin \theta$$

$$\frac{d^2V'}{d\theta^2} = \frac{p_\phi^2 \sin \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} + 3 \cos \theta \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^4 \theta} - mgR \cos \theta$$

$$\left. \frac{dV'(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} = -\frac{p_\phi^2 \cos \theta_0}{mR^2 \sin^3 \theta_0} - mgR \sin \theta_0 = 0$$

$$\frac{p_\phi^2 \cos \theta_0}{mR^2 \sin^3 \theta_0} = -mgR \sin \theta_0$$

$$\begin{aligned} k &= \left[\frac{d^2V'}{d\theta^2} \right]_{\theta=\theta_0} = \frac{p_\phi^2 \sin \theta_0}{mR^2 \sin^3 \theta_0} + 3 \frac{p_\phi^2 \cos^2 \theta_0}{mR^2 \sin^4 \theta_0} - mgR \cos \theta_0 \\ &= -\frac{mgR \sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} - 3mgR \cos \theta_0 - mgR \cos \theta_0 \\ &= -\frac{mgR (1 - \cos^2 \theta_0)}{\cos \theta_0} - 4mgR \cos \theta_0 = -\frac{mgR}{\cos \theta_0} + mgR \cos \theta_0 \\ &\quad - 4mgR \cos \theta_0 = -\frac{mgR}{\cos \theta_0} - 3mgR \cos \theta_0 = -\frac{mgR}{\cos \theta_0} (1 + 3 \cos^2 \theta_0) \end{aligned}$$

ذره ۲ حرکت نوسانی دارد:
یکی نسبت به زاویه θ و یکی
نسبت به زاویه ϕ . سرعت زاویه
ای این حرکت نوسانی ساده
نسبت به زاویه θ را می توان به
صورت زیر محاسبه کرد:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{d^2V'}{d\theta^2} \right]_{\theta=\theta_0}}{I}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

$$I = mR^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{mR^2}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{mR^2} = \frac{g}{R} \frac{1 + 3 \cos^2 \theta_0}{-\cos \theta_0}$$

این حرکت نوسانی بر حسب θ با سرعت زاویه ای $\omega = \dot{\theta}$ با حرکت دایره ای یکنواخت حول محور z با سرعت زاویه ای $\dot{\phi}$ ترکیب می شود

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{g}{R} \frac{1}{\cos \theta_0}$$

$$\frac{\dot{\phi}^2}{\omega^2} = \frac{-\frac{g}{R} \frac{1}{\cos \theta_0}}{\frac{g}{R} \frac{1 + 3 \cos^2 \theta_0}{-\cos \theta_0}} = \frac{1}{1 + 3 \cos^2 \theta_0}$$

هنگام نوسان بر حسب θ ، سرعت زاویه ای $\dot{\phi}$ اندکی تغییر می کند، اما می توان آن را تقریباً ثابت در نظر گرفت. از مقایسه این دو سرعت زاویه ای خواهیم داشت:

$$\theta_0 > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{1 + 3 \cos^2 \theta_0} < 1 \Rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{\omega^2} < 1 \Rightarrow \omega > \dot{\phi}$$

و این بدان معنی است که آونگ حین حرکت دایره ای به بالا و پایین می لنگد

$$'V'(\theta) = \frac{1}{2} \frac{p_{\phi}^2}{mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta$$

$$\text{If } p_{\phi} \gg 1 \Rightarrow 'V'(\theta) \approx \frac{1}{2} \frac{p_{\phi}^2}{mR^2 \sin^2 \theta} \Rightarrow \frac{d'V'(\theta)}{d\theta} \approx -\frac{p_{\phi}^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} = 0 \Rightarrow \theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{\omega^2} = \frac{1}{1 + 3 \cos^2 \theta_0} = \frac{1}{1 + 3 \times 0} = 1 \Rightarrow \frac{\dot{\phi}}{\omega} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \omega = \dot{\phi}$$

و این بدان معنی است که آونگ در صفحه ای که نسبت به افق کمی کج شده است حرکت دایره ای می کند

$$\text{if } \theta_0 \approx 0 \Rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{\omega^2} = \frac{1}{1 + 3 \cos^2 \theta_0} = \frac{1}{1 + 3 \times 1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\dot{\phi}}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega = 2\dot{\phi}$$

در این صورت θ در هر دور ۲ بار نوسان می کند

تمرین: در این صورت نشان دهید که گلوله روی یک مدار بیضی حرکت می کند که مرکز آن بر محور z واقع است

مثال: دانه تسبیحی به جرم m بر روی حلقه ای مدور به شعاع a بی اصطکاک می لغزد. حلقه در صفحه قائمی قرار گرفته است که مقید است با سرعت زاویه ای ω حول قطر بچرخد.

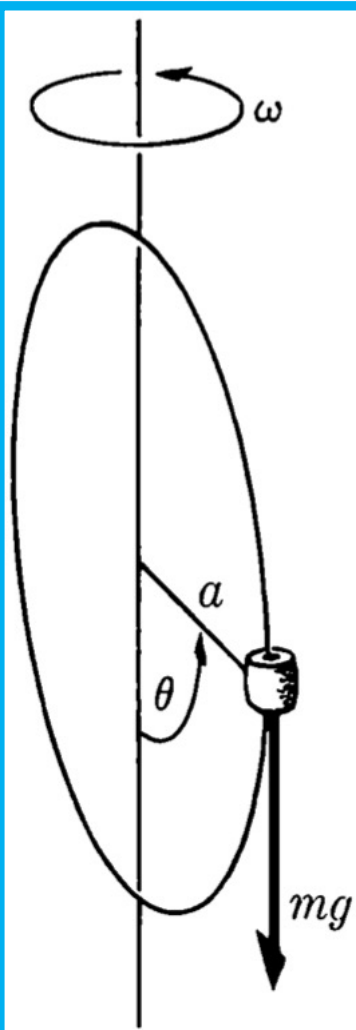
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - (-mga \cos \theta)$$

$$r = a \Rightarrow \dot{r} = 0$$

$$\dot{\phi} = \omega$$

$$L = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + a^2\omega^2 \sin^2 \theta) + mga \cos \theta$$



$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta + mga \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = 'E' = \text{cte.}$$

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \dot{\theta}ma^2\dot{\theta} - \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta = 'E' = \text{cte.}$$

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta = 'E' = \text{cte.}$$

نکته: رابطه فوق برابر با انرژی کل نیست، زیرا:

$$E = T + V = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta$$

$$'E' \neq E = T + V$$

یعنی انرژی کل در این حالت ثابت نیست

زیرا دستگاه مختصاتی که در آن لاگرانژی را نوشته ایم یک دستگاه مختصات متحرک است

برای آن که انرژی کل ثابت باقی بماند کافی است که تعبیر فیزیکی خود را عوض کنیم

برای این منظور جمله دوم انرژی جنبشی، ناشی از حرکت دستگاه مختصات در لاگرانژی نوشته شده زیر که در دستگاه مختصات متحرک نوشته شده است، را به انرژی پتانسیل می بخشیم

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta + mga \cos \theta$$

$$'V' = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta$$

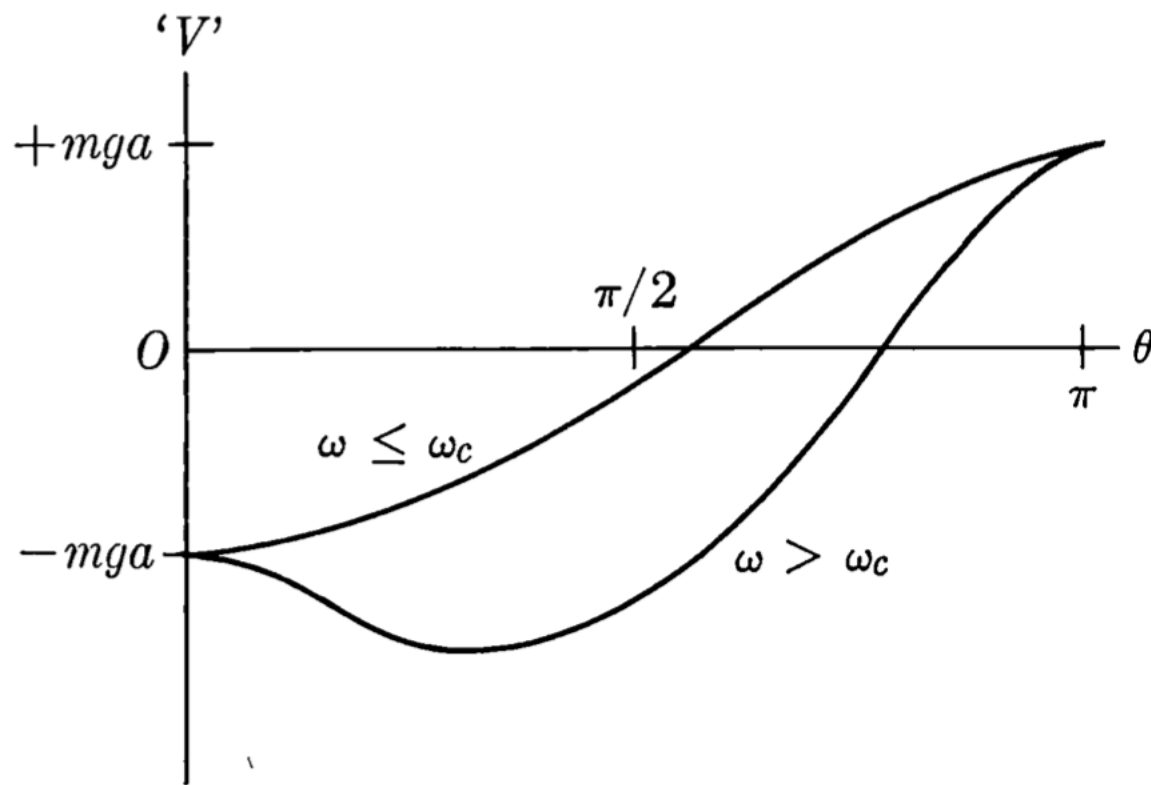
و انرژی پتانسیل موثر
زیر را تعریف می
کنیم:

در این صورت انرژی جنبشی دستگاه فقط از جمله اول تشکیل می شود

$$T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

که این معادل ثابت تعبیر کردن دستگاه مختصات است

این کار شبیه تعبیرهای متفاوت نیروی گریز از مرکز در دستگاه متحرک و نیروی جانب مرکز در دستگاه ساکن است



$$'V' = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta$$

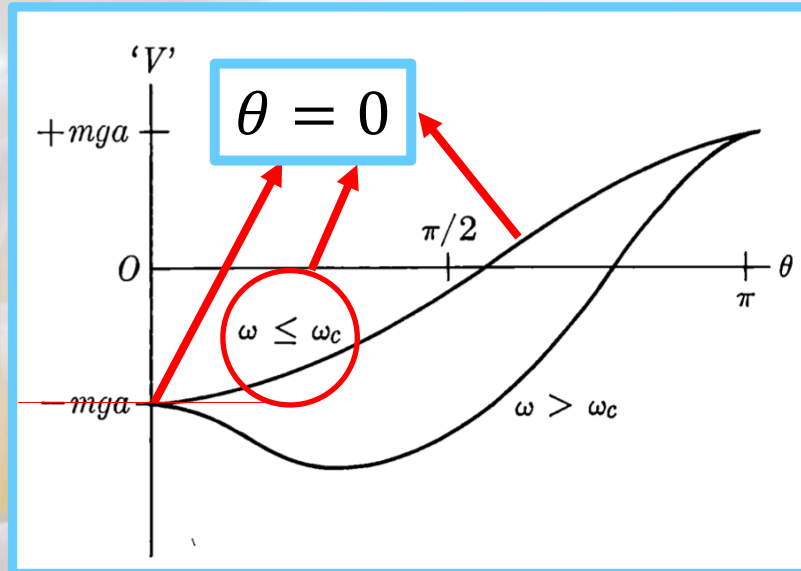
$$\frac{d'V'}{d\theta} = -ma^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta + mga \sin \theta = 0$$

$$\frac{d'V'}{d\theta} = -ma \sin \theta (a\omega^2 \cos \theta - g) = 0$$

$$\frac{d'V'}{dt} = -ma \sin \theta (a\omega^2 \cos \theta - g) = 0$$

$$\sin \theta = 0 \rightarrow \theta_{\min,1} = 0$$

این جواب مستقل
از ω است



$$a\omega^2 \cos \theta - g = 0 \rightarrow \cos \theta = \frac{g}{a\omega^2}$$

$$\text{if } \omega^2 = \frac{g}{a} = \omega_c^2 \rightarrow \cos \theta = 1 \rightarrow \theta_{\min,2} = 0$$

$$\text{if } \omega^2 < \frac{g}{a} = \omega_c^2 \rightarrow \cos \theta > 1 \rightarrow a\omega^2 \cos \theta - g \neq 0$$

این جواب اگر وجود داشته باشد وابسته به ω است

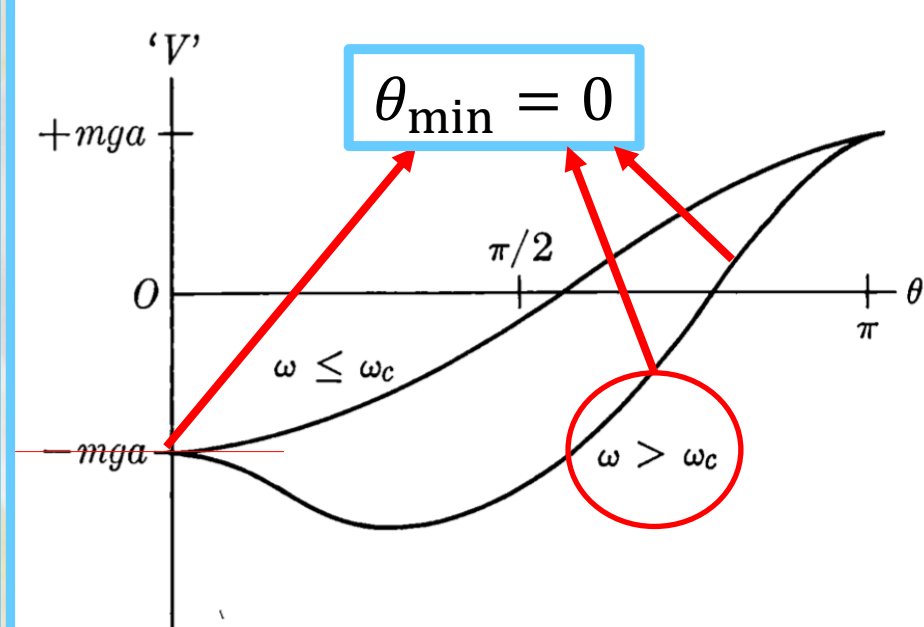
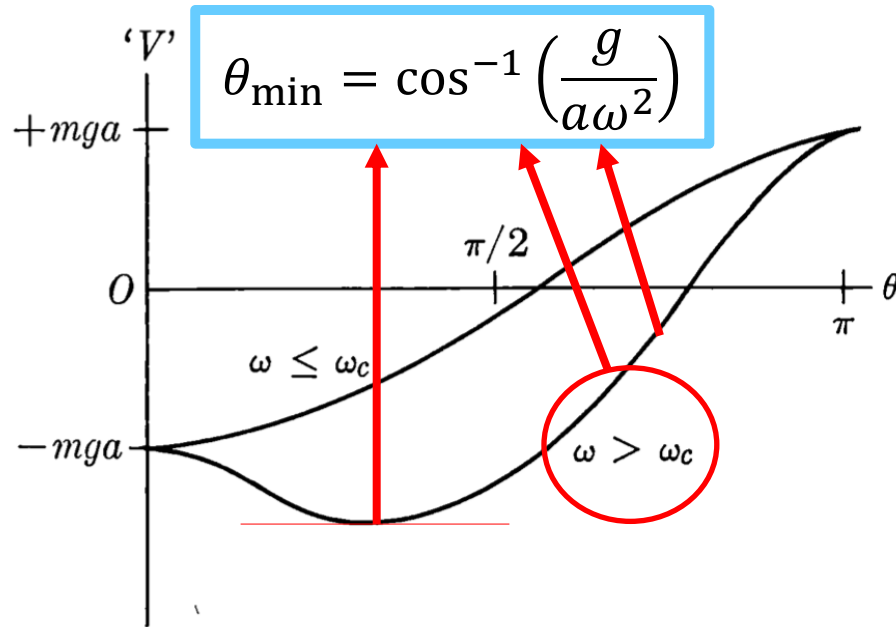
پس به ازای $\omega = \omega_c = \sqrt{\frac{g}{a}}$ جواب دوم مقدار
جدیدی به دست نداد: $\theta_{\min,1} = \theta_{\min,2} = 0$

این بدان معنی است که اگر $\omega < \omega_c$ باشد، آنگاه معادله $a\omega^2 \cos \theta - g = 0$ دارای جواب در بازه $[0, \pi]$ نیست

پس اگر $\omega \leq \omega_c = \sqrt{\frac{g}{a}}$ باشد، آنگاه V' فقط یک مینم در $\theta_{\min} = 0$ دارد

But if $\omega^2 > \frac{g}{a} = \omega_c^2 \rightarrow \cos \theta < 1 \rightarrow a\omega^2 \cos \theta - g = 0 \rightarrow \cos \theta = \frac{g}{a\omega^2} \rightarrow \theta_{\min} = \cos^{-1} \left(\frac{g}{a\omega^2} \right)$

پس اگر $\omega > \omega_c = \sqrt{\frac{g}{a}}$ باشد، آنگاه 'V' دو مینمم یکی در $\theta_{\min} = 0$ و دیگری در $\theta_{\min} = \cos^{-1} \left(\frac{g}{a\omega^2} \right)$ دارد



$$'V' = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \cos^2 \theta - mga \cos \theta = 0$$

$$a\omega^2 \cos^2 \theta - 2g \cos \theta - a\omega^2 = 0$$

$$\cos \theta = \frac{g \pm \sqrt{g^2 + a^2\omega^4}}{a\omega^2}$$

$$\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2} - \sqrt{1 + \frac{g^2}{a^2\omega^4}}$$

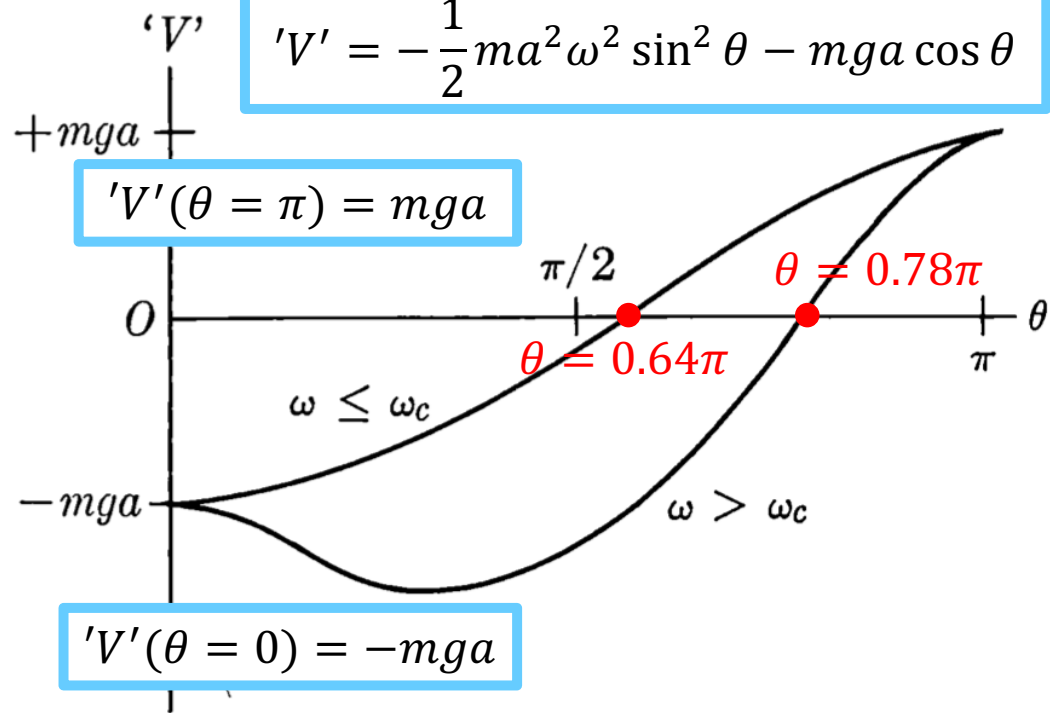
$$\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2} - \frac{g}{a\omega^2} \sqrt{1 + \left(\frac{a\omega^2}{g}\right)^2}$$

$$\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{a\omega^2}{g}\right)^2} \right)$$

$$(\cos \theta)_{\omega=\omega_c=\sqrt{\frac{g}{a}}} = 1 \times \left(1 - \sqrt{1 + (1)^2} \right) = 1 - \sqrt{2} \rightarrow \theta = 0.64\pi$$

$$(\cos \theta)_{\omega=\sqrt{2}\omega_c=\sqrt{\frac{2g}{a}}} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \sqrt{1 + (2)^2} \right) = 1/2(1 - \sqrt{5}) \rightarrow \theta = 0.71\pi$$

$$(\cos \theta)_{\omega=2\omega_c=2\sqrt{\frac{g}{a}}} = \frac{1}{4} \times \left(1 - \sqrt{1 + (4)^2} \right) = 1/4(1 - \sqrt{17}) \rightarrow \theta = 0.78\pi$$



$$'V' \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

$$'V' \left(\theta = \frac{\pi}{2}, \omega = \omega_c \right) = -\frac{1}{2}ma^2 \frac{g}{a} = -\frac{1}{2}mga$$

$$\omega = 0 \rightarrow 'V' = -mga \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$$

$$\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2} \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{a\omega^2}{g} \right)^2} \right)$$

$$\omega = n\omega_c = n\sqrt{\frac{g}{a}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{n^2} \left(1 - \sqrt{1 + (n^2)^2} \right)$$

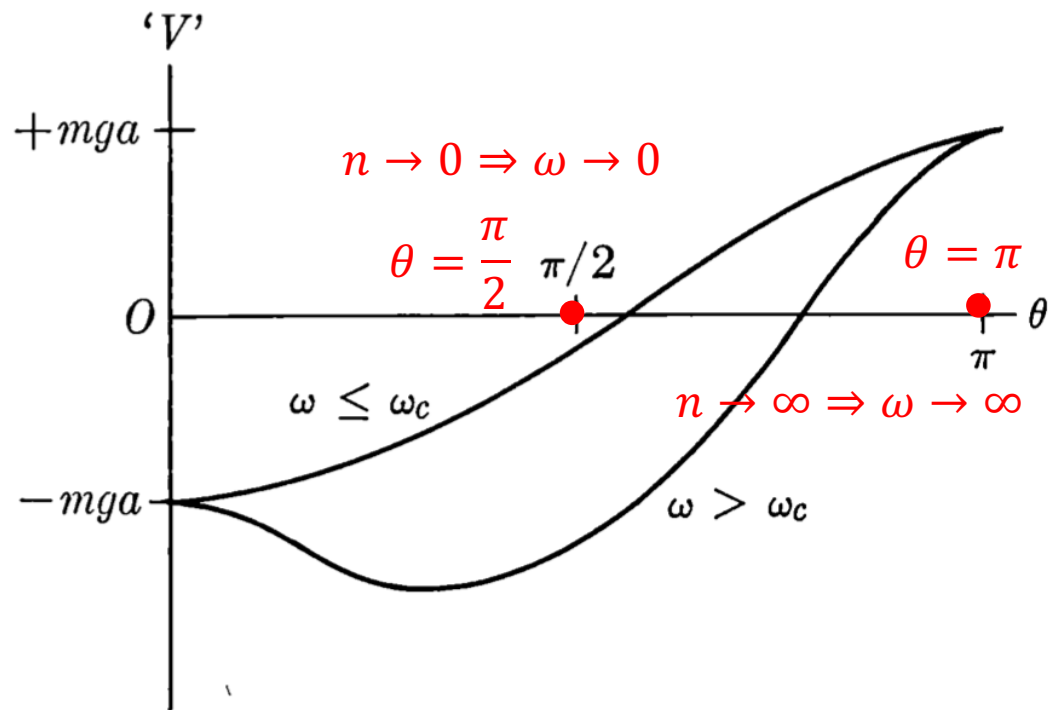
$$\cos \theta = \frac{1}{n^2} \left(1 - \sqrt{1 + n^4} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{1}{n^2} \left(1 - \sqrt{1 + n^4} \right) \right]$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{1}{n^2} \left(1 - \sqrt{1 + n^4} \right) \right]$$

$$\theta_{\text{تلاقی } \max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \cos^{-1} \left[\frac{1}{n^2} \left(1 - \sqrt{1 + n^4} \right) \right] \right\} = \pi$$

$$\theta_{\text{تلاقی } \min} = \lim_{n \rightarrow 0} \left\{ \cos^{-1} \left[\frac{1}{n^2} \left(1 - \sqrt{1 + n^4} \right) \right] \right\} = 0$$



تلاقی $\theta_{\max}$ زاویه
ماکزیممی است که
در آن 'V' محور
افقی را قطع می کند
یعنی صفر می شود

