

معادلات هاميلتون

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f; t)$$

$$dL = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (p_k) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$$

$$\dot{p}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \dot{p}_k$$

$$dL = \sum_{k=1}^f (p_k d\dot{q}_k + \dot{p}_k dq_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

حال هامیلتونی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L$$

$$dH = \sum_{k=1}^f (\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k) - dL$$

$$dL = \sum_{k=1}^f (p_k d\dot{q}_k + \dot{p}_k dq_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_{k=1}^f (\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k) - \sum_{k=1}^f (p_k d\dot{q}_k + \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_{k=1}^f (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_f; p_1, p_2, \dots, p_f; t)$$

$$dH = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_{k=1}^f (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

از مقایسه رابطه فوق با:

خواهیم داشت که:

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

معادلات حرکت هامیلتون

معادلات حرکت هامیلتون بیان ریاضی دیگری از معادلات حرکت نیوتن هستند

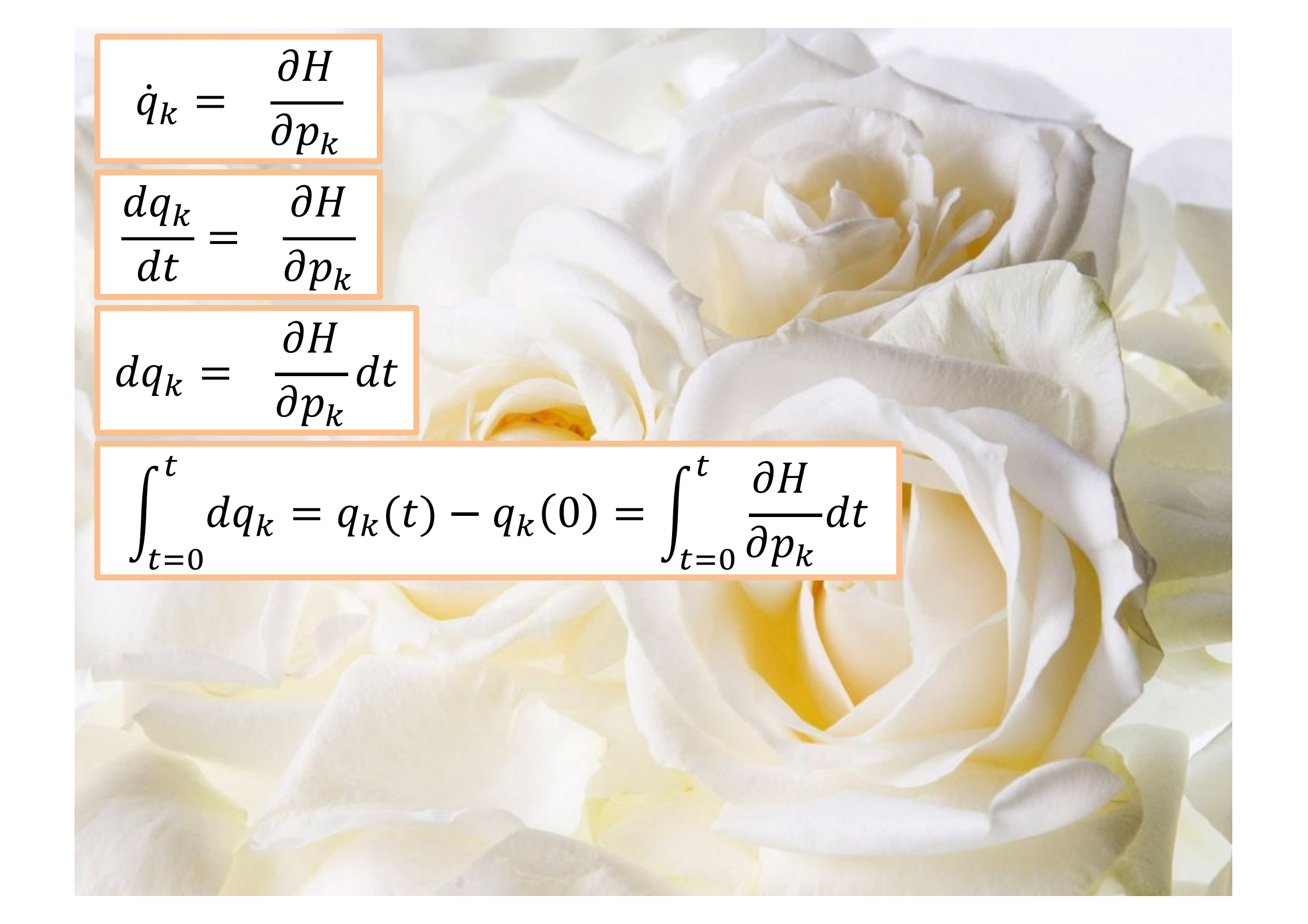
مثال: نوسانگر ساده

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{2p}{2m} = \frac{p}{m} = v \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{2}k(2x) = -kx = F \end{cases}$$

معادلات هامیلتون دارای اهمیت هستند، زیرا نطقه شروع مکانیک کوانتومی و مکانیک آماری می باشند

The background of the entire slide is a close-up photograph of several white roses. The petals are delicate and layered, with some showing a slight yellow tint. The lighting is soft, creating a gentle, romantic atmosphere.
$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$dq_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} dt$$

$$\int_{t=0}^t dq_k = q_k(t) - q_k(0) = \int_{t=0}^t \frac{\partial H}{\partial p_k} dt$$

نیروهای الکترومغناطیسی و پتانسیل‌های وابسته به سرعت

قبلاً گفته بودیم که پتانسیل‌ها معمولاً تابع سرعت نیستند $V = V(q_1, q_2, \dots, q_f; t)$ و در اکثر موارد تابع زمان هم نیستند

اما اگر نیروهای Q_k تابعی از سرعت باشند، ممکن است تابع پتانسیل وابسته به سرعت $U(q_1, q_2, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f; t)$ را بتوانیم طوری پیدا کنیم که در رابطه زیر صدق کند

$$Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

در این صورت باز هم می‌توان لاگرانژی را به صورت زیر تعریف کرد

$$L = T - U$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

به طوری که

اگر پتانسیل وابسته به سرعت تابع زمان نباشد، یعنی $U = U(q_1, q_2, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f)$ و اگر دستگاه مختصات یک دستگاه ثابت باشد، در این صورت لاگرانژی هم مستقل از زمان و کمیت زیر یک ثابت حرکت می شوند

$$E = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - L = cte.$$

در این صورت اگرچه نیروها وابسته به سرعت هستند، اما می توانند کنسرواتیو باشند

ولی می دانیم که در حضور اصطکاک اگر انرژی گرمایی را وارد نکنیم، انرژی کل ثابت نمی ماند

$$Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

از طرفی نمی توان انرژی گرمایی را بر حسب مکانها و سرعتها نوشت، پس نیروهای اصطکاک را نمی توان از یک U وابسته به مکانها و سرعتها به صورت زیر به دست آورد،

اگر قسمتهای وابسته به سرعت U نسبت به سرعت خطی باشند، آنگاه انرژی $E = T + V$ است، که در آن V انرژی پتانسیل معمولی است و فقط قسمتهای مستقل از سرعت U را در بر دارد.

عبارت بالا را با ذکر مثال زیر تشریح می کنیم

مثال: ذره با بار q واقع در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \frac{q}{c} [(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y)\hat{i} - (\dot{x}B_z - \dot{z}B_x)\hat{j} + (\dot{x}B_y - \dot{y}B_x)\hat{k}]$$

$$F_x = \frac{q}{c} (\dot{y}B_z - \dot{z}B_y)$$

$$F_y = \frac{q}{c} (\dot{z}B_x - \dot{x}B_z)$$

$$F_z = \frac{q}{c} (\dot{x}B_y - \dot{y}B_x)$$

حال اگر U را به صورت زیر تعریف کنیم

$$U = \frac{q}{c} (z\dot{y}B_x + x\dot{z}B_y + y\dot{x}B_z)$$

آنگاه مولفه‌های نیروهای وارد بر ذره را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{c} y B_z \right) - \frac{q}{c} \dot{z} B_y = \frac{q}{c} (\dot{y} B_z - \dot{z} B_y)$$

$$F_y = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{c} z B_x \right) - \frac{q}{c} \dot{x} B_z = \frac{q}{c} (\dot{z} B_x - \dot{x} B_z)$$

$$F_z = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{c} x B_y \right) - \frac{q}{c} \dot{y} B_x = \frac{q}{c} (\dot{x} B_y - \dot{y} B_x)$$

مثال: ذره با بار q واقع در یک میدان الکترومغناطیسی

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

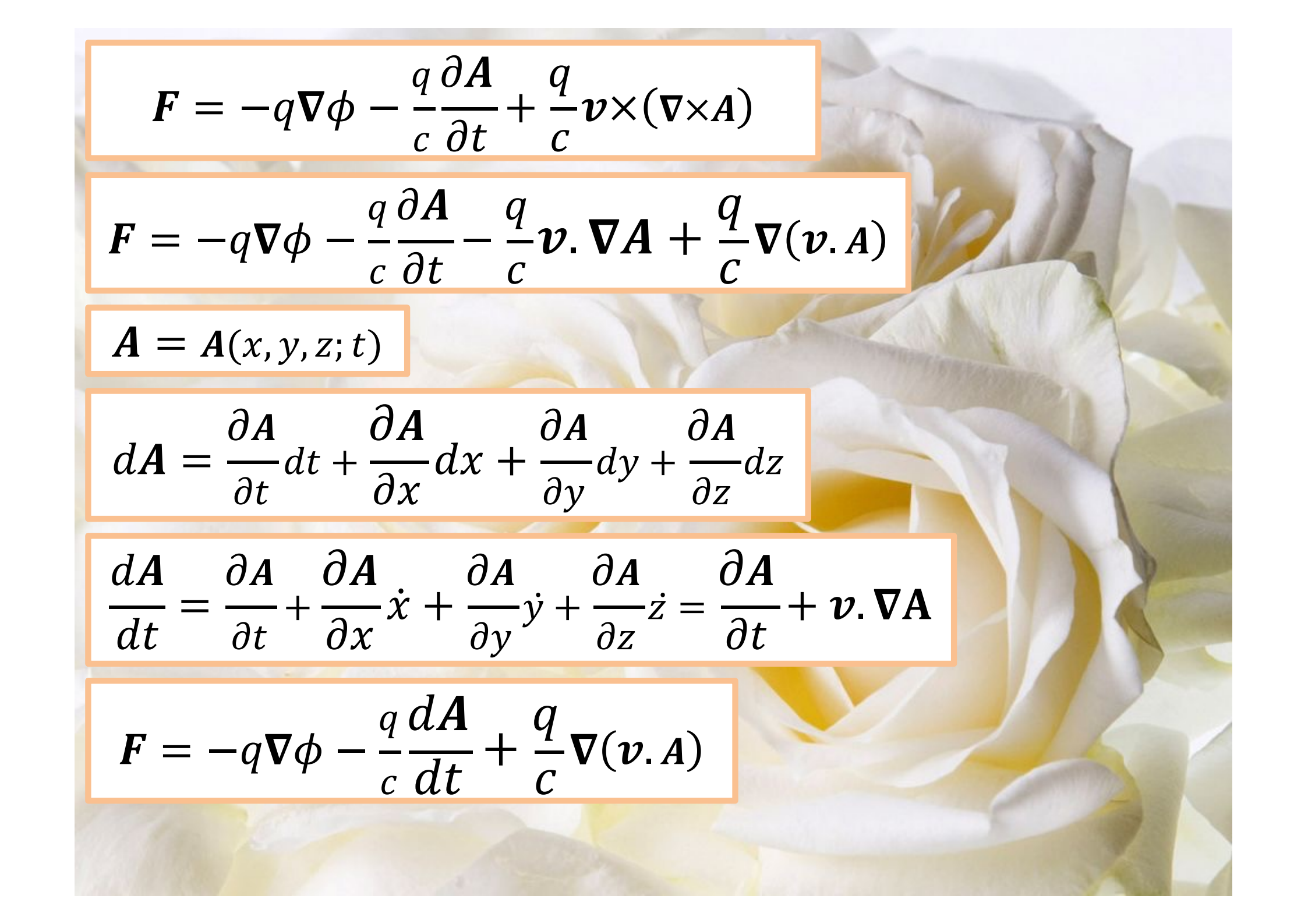
$$\mathbf{F} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

می توان میدان مغناطیسی را به صورت زیر نوشت

زیرا یکی از معادلات ماکسول را به صورت زیر برآورده می کند

می توان میدان الکتریکی را هم به صورت زیر نوشت

زیرا یکی دیگر از معادلات ماکسول را به صورت زیر برآورده می کند

A close-up photograph of a white rose with yellow-tinted petals, serving as the background for the slide.
$$\mathbf{F} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

$$\mathbf{F} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{A} + \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z; t)$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}dt + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}dz$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{A}$$

$$\mathbf{F} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c}\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$$

$$U = -\frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = -\frac{q}{c} (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$A_x = A_x(x, y, z; t); A_y = A_y(x, y, z; t), A_z = A_z(x, y, z; t)$$

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{q}{c} A_x \right) - \left(-\frac{q}{c} \right) \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = -\frac{q}{c} \frac{dA_x}{dt} + \frac{q}{c} \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$$

$$F_y = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{q}{c} A_y \right) - \left(-\frac{q}{c} \right) \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -\frac{q}{c} \frac{dA_y}{dt} + \frac{q}{c} \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right)$$

$$F_z = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{q}{c} A_z \right) - \left(-\frac{q}{c} \right) \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = -\frac{q}{c} \frac{dA_z}{dt} + \frac{q}{c} \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$F_x = -\frac{q}{c} \frac{dA_x}{dt} + \frac{q}{c} \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$$

$$F_y = -\frac{q}{c} \frac{dA_y}{dt} + \frac{q}{c} \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right)$$

$$F_z = -\frac{q}{c} \frac{dA_z}{dt} + \frac{q}{c} \left(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{q}{c} \frac{d}{dt} (A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}) + \frac{q}{c} \left[\dot{x} \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) A_x + \dot{y} \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) A_y + \dot{z} \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) A_z \right]$$

$$\mathbf{F} = -\frac{q}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{q}{c} [\dot{x} \nabla A_x + \dot{y} \nabla A_y + \dot{z} \nabla A_z]$$

$$\mathbf{F} = -\frac{q}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{q}{c} [\nabla(\dot{x} A_x) + \nabla(\dot{y} A_y) + \nabla(\dot{z} A_z)]$$

$$\mathbf{F} = -\frac{q}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{q}{c} \nabla(\dot{x} A_x + \dot{y} A_y + \dot{z} A_z)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{q}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{q}{c} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

$$U = q\phi$$

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt}(q \times 0) - \left(q \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -q \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$F_y = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{d}{dt}(q \times 0) - \left(q \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = -q \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$F_z = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d}{dt}(q \times 0) - \left(q \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = -q \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\mathbf{F} = -q \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = -q \nabla \phi$$

$$U = q\phi - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = q\phi - \frac{q}{c} (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)$$

$$\mathbf{F} = -q \nabla \cdot \phi + \frac{q}{c} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

$$L = T - U$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

$$U = -\frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = -\frac{q}{c} (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q}{c} (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{q}{c}A_x$$

جمله $\frac{q}{c}A_x$ نقش یک اندازه حرکت
پتانسیلی در راستای x را بازی می کند

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{q}{c}A_y$$

جمله $\frac{q}{c}A_y$ نقش یک اندازه حرکت
پتانسیلی در راستای y را بازی می کند

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \frac{q}{c}A_z$$

جمله $\frac{q}{c}A_z$ نقش یک اندازه حرکت
پتانسیلی در راستای z را بازی می کند



Joseph Liouville

Born, 24 March 1809 in Saint-Omer, France, Died, 8 Sept 1882 in Paris, France

قضيه ليوويل

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0$$

$$\{\rho, H\} = \sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

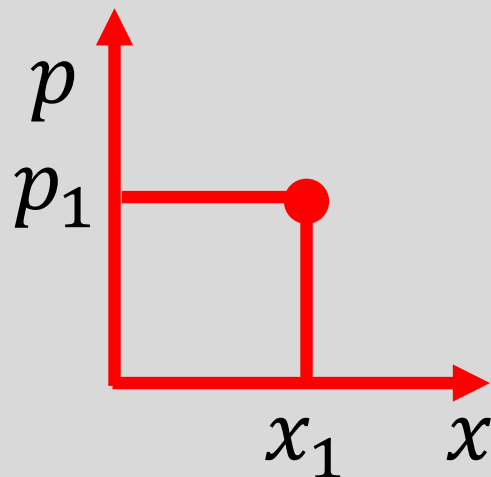
$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$$

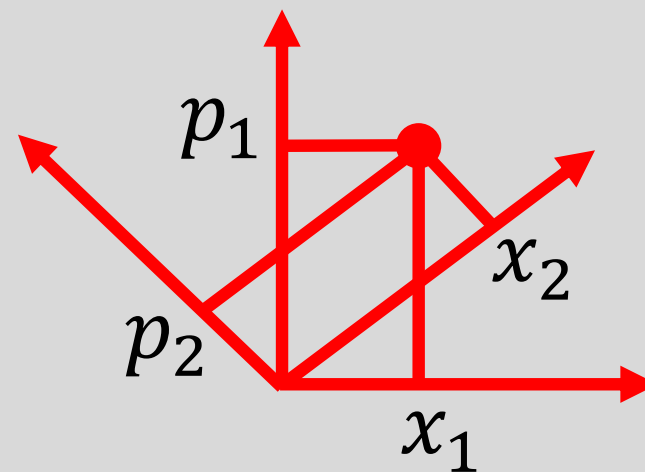
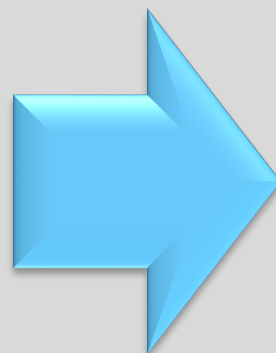
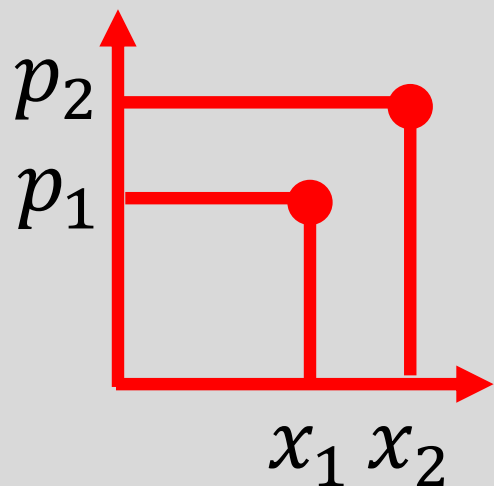
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = 0$$

فضای فاز فضای مکانها و سرعتهاست

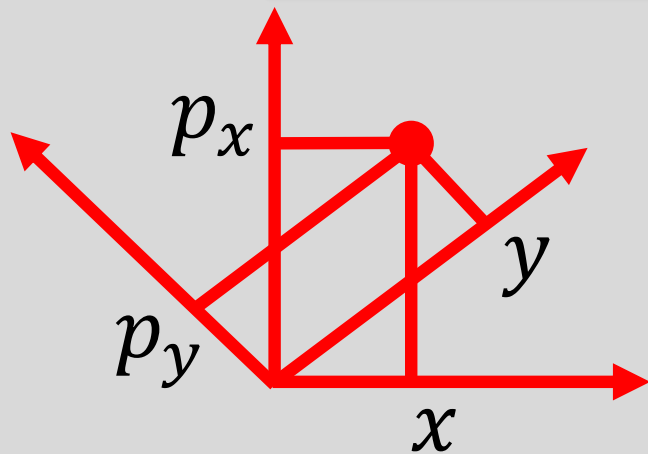
فضای فاز یک ذره در یک بعد مکانی یک فضای دو بعدی است



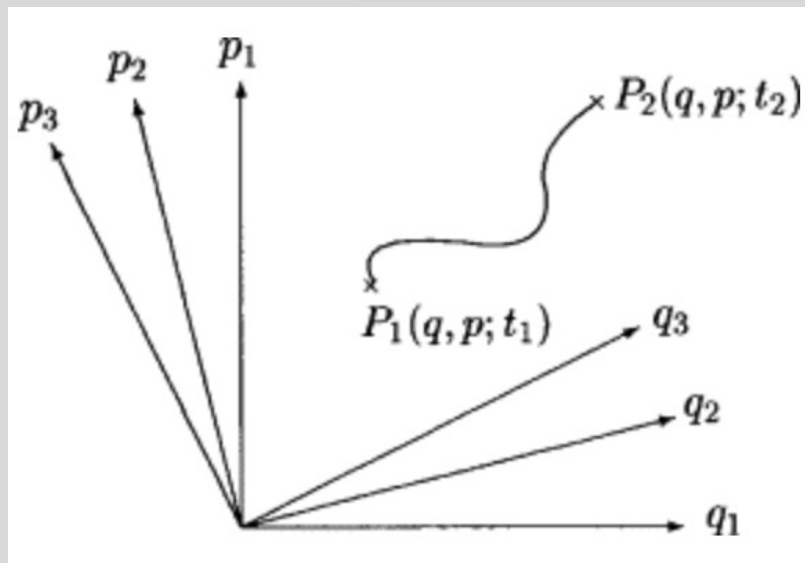
فضای فاز دو ذره در یک بعد مکانی یک فضای چهار بعدی است



فضای فاز یک ذره در دو بعد مکانی یک فضای چهار بعدی است



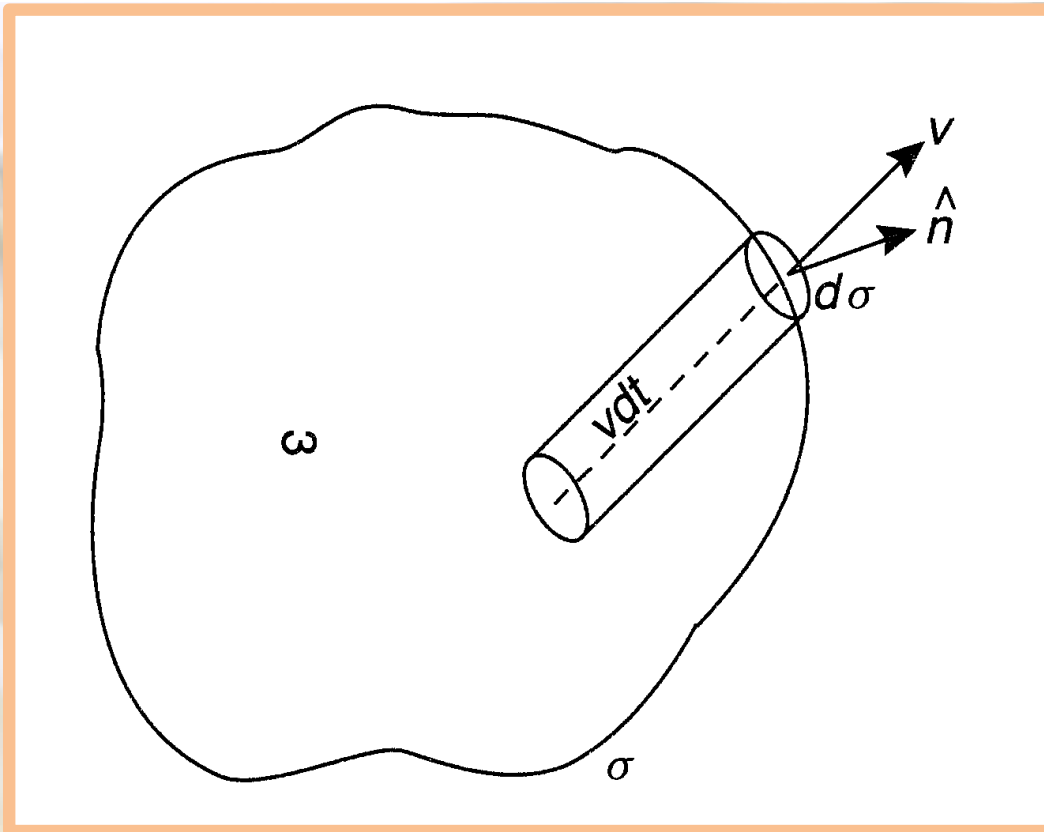
فضای فاز N ذره در سه بعد مکانی یک فضای $6N$ بعدی است



در این فضای $6N$ بعدی یک نقطه معرف تمام ذرات تشکیل دهنده یک جسم خواهد بود

در این فضای فاز در هر لحظه از زمان نقطه نماینده جسم حرکت می کند

در فضای فاز نقاط نماینده تشکیل یک سیال با چگالی ρ می دهند



$$d\omega = d^{3N}q d^{3N}p$$

المان حجم فضای فاز

$$\omega = \int d\omega = \int d^{3N}q d^{3N}p$$

حجم کل فضای فاز

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} \rho d\omega$$

آهنگ ورود به یا افزایش
نقاط نماینده حجم فضای فاز

$$\int_{\sigma} \rho v \cdot \hat{n} d\sigma$$

آهنگ خروج از یا کاهش
نقاط نماینده حجم فضای فاز

چون در فضای فاز نه چشمه داریم و نه چاه، پس تعداد نقاط نماینده دارای بقا است و همواره ثابت باقی می ماند

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} \rho d\omega = - \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$$

با استفاده از قضیه دیورجانس انتگرال سطحی را به انتگرال حجمی تبدیل می کنیم

$$\int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \int_{\omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d\omega$$

$$\int_{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega = - \int_{\omega} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d\omega$$

معادله پیوستگی

$$\int_{\omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] d\omega = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right]$$

$$\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

توضیح: در فضای مکان داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z}) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

$$\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z)$$

اما در فضای فاز داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} + \hat{p}_x \frac{\partial}{\partial p_x} + \hat{p}_y \frac{\partial}{\partial p_y} + \hat{p}_z \frac{\partial}{\partial p_z} \right) \cdot (\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} + \dot{p}_x \hat{p}_x + \dot{p}_y \hat{p}_y + \dot{p}_z \hat{p}_z) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial p_x} + \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial p_y} + \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial p_z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right]$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{3N} \left[\dot{q}_k \frac{\partial \rho}{\partial q_k} + \rho \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \dot{p}_k \frac{\partial \rho}{\partial p_k} + \rho \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right]$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right] + \rho \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right]$$

اما جمله آخر صفر است، پس:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right]$$

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = 0 \quad ?$$

اثبات این که جمله آخر صفر است:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$$

از معادلات حرکت هامیلتون داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial}{\partial p_k} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right]$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right] = 0$$

$$\rho = \rho(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; p_1, p_2, \dots, p_{3N}; t)$$

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} dp_k \right]$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\{\rho, H\} = \sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3N} \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0$$

کروشہ پواسون