

بسم الله الرحمن الرحيم

تمرین های مکانیک تحلیلی ۲

**تهیه شده توسط دکتر لیلا ملاباشی
پژوهشگر پسادکتری**

معادله‌های حرکت یک پرتابه تحت تأثیر گرانش در دو بعد را در مختصات دکارتی و قطبی با استفاده از معادلات لاگرانژ به دست آورید. (مثال ۲.۶ کتاب ماریون)

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

به ازای y
 $V = 0$
 $= 0$

$$V = mgy$$

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) - 0 = 0$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$v - v_{0x} = 0$$

$$v = v_{0x}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x}$$

$$x - x_0 = v_{0x}t$$

$$x = v_{0x}t + x_0$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) - (-mg) = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

$$v - v_{0y} = -gt$$

$$v = -gt + v_{0y}$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_{0y}$$

$$dy = dt(-gt + v_{0y})$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

به ازای $\theta = 0$
داریم $V = 0$

$$V = mgr \sin \theta$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - (mr\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta) = 0$$

$$m\ddot{r} - (mr\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta) = 0$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g \sin \theta = 0$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) - (-mgr \cos \theta) = 0$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr \cos \theta = 0$$

ذره‌ای به جرم m مقید است که روی سطح داخلی مخروط صافی با نیم‌زاویه α حرکت کند. این ذره تحت تأثیر نیروی گرانش قرار دارد. مجموعه‌ای از مختصات تعمیم یافته و قیدها را تعیین کنید. معادلات حرکت لاگرانژ را بیابید. (مثال ۳.۶ کتاب ماریون)

$$r, \theta, z$$

$$z = r \cot \alpha$$

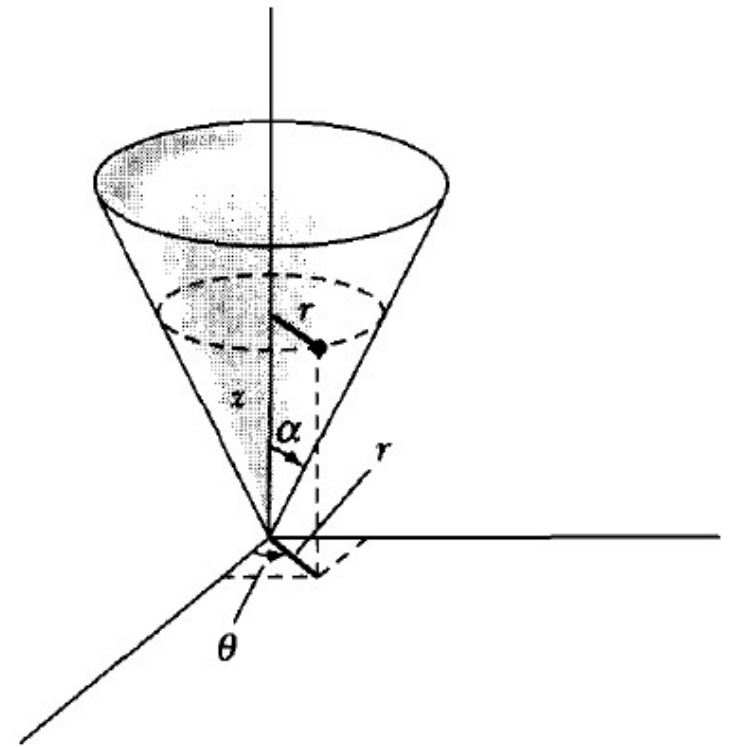
$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \cot^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$V = mgz = mgr \cot \alpha$$



$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cot \alpha$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = c \text{ ثابت}$$

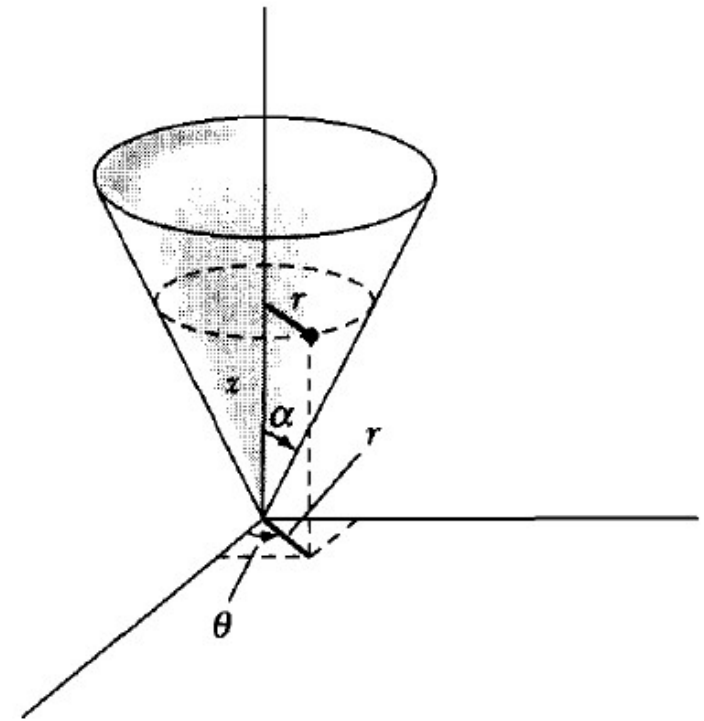
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = c$$

$$mr^2 \dot{\theta} = m r^2 \omega$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r} \operatorname{cosec}^2 \alpha) - (mr\dot{\theta}^2 - mg \cot \alpha) = 0$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0$$



مهره‌ای در امتداد سیم صافی که به شکل سهمی $z = cr^2$ خم شده است، می‌لغزد. هرگاه سیم حول محور تقارنش با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد، مهره در دایره‌ای به شعاع R می‌چرخد، مقدار C را بیابید. (مثال ۵.۶ کتاب ماریون)

$$r, \theta, z$$

$$V = mgz$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

$$z = cr^2$$

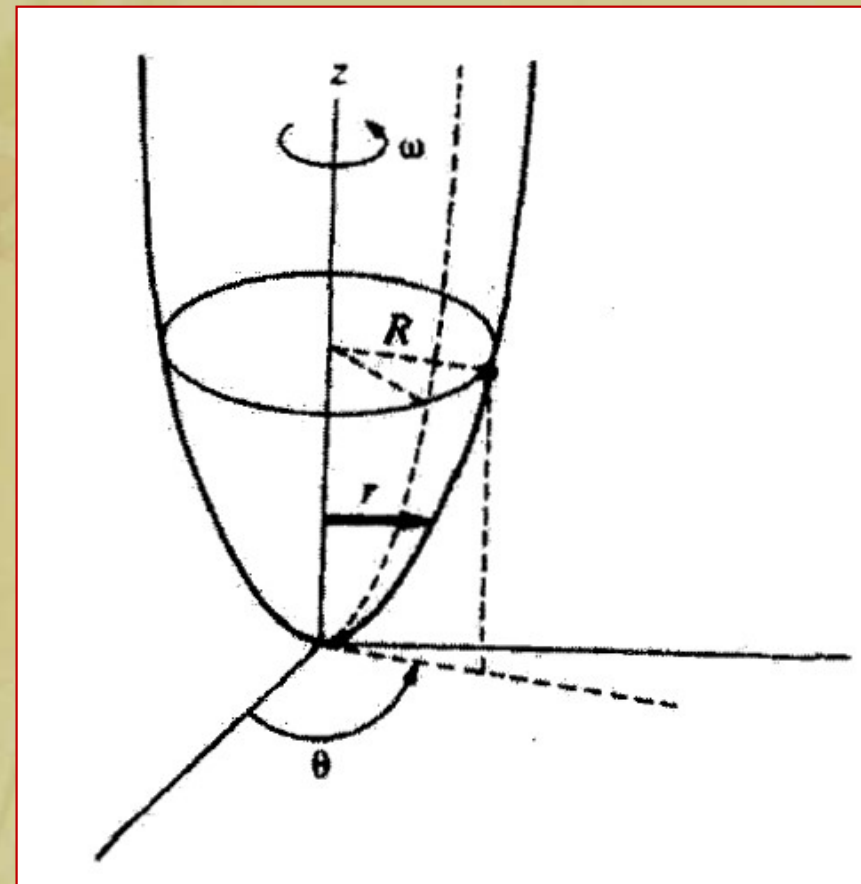
$$\theta = \omega t$$

$$\dot{z} = 2cr\dot{r}$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + 4c^2r^2\dot{r}^2)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + 4c^2r^2\dot{r}^2) - mgcr^2$$



$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + 4c^2r^2\dot{r}^2) - mgcr^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

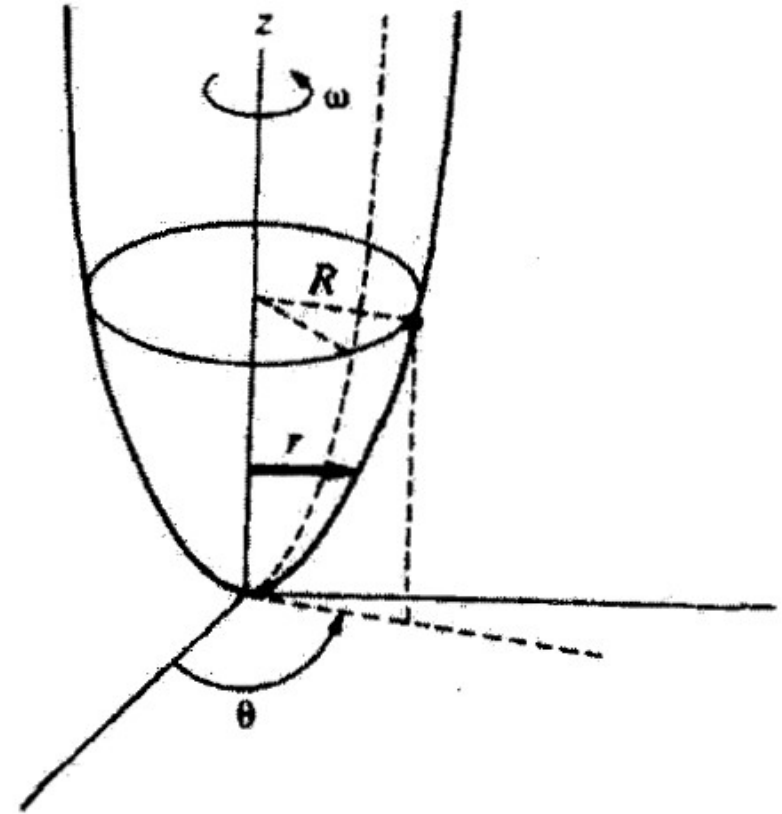
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m(\dot{r} + 4c^2r^2\dot{r})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m(\ddot{r} + 8c^2r\dot{r}^2 + 4c^2r^2\ddot{r})$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m(r\omega^2 + 8c^2r\dot{r}^2 - 2gcr)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m(\ddot{r} + 8c^2r\dot{r}^2 + 4c^2r^2\ddot{r}) - m(r\omega^2 + 8c^2r\dot{r}^2 - 2gcr) = 0$$

$$\ddot{r}(1 + 4c^2r^2) + \dot{r}^2(4c^2r - 8c^2r) + r(-\omega^2 + 2gc) = 0$$

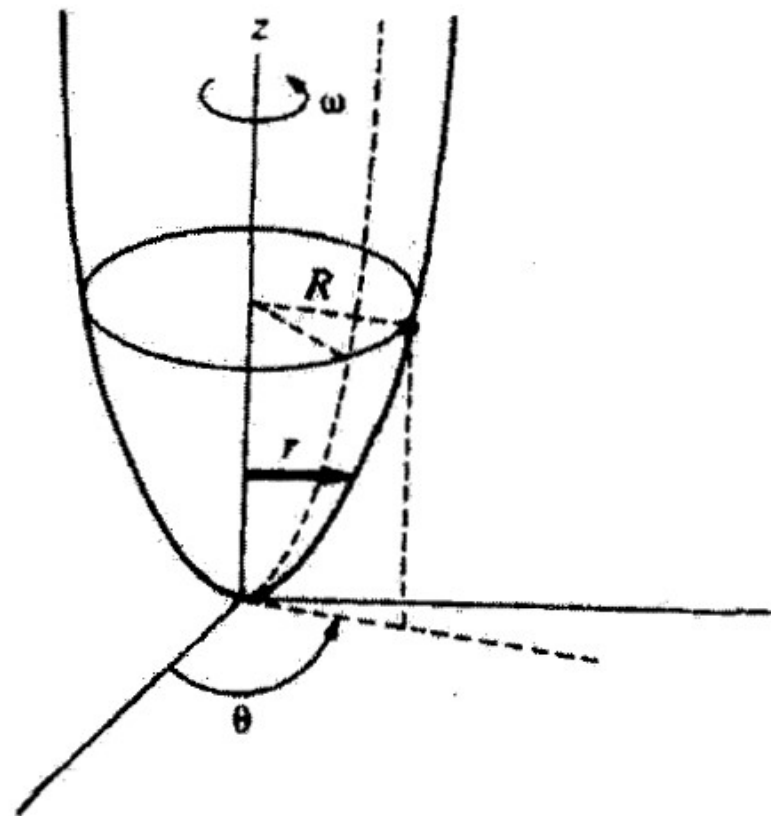


اگر $r = R$ ثابت
باشد

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$R(2gc - \omega^2) = 0$$

$$c = \frac{\omega^2}{g}$$



۸۱- مهره‌ای در امتداد سیم صافی که به شکل $z = cr^2$ خم شده است، می‌لغزد. (r, ϕ, z) مختصات استوانه‌ای مکان مهره روی سیم است. اگر سیم حول محور تقارن‌اش با سرعت زاویه‌ای ثابت ω بچرخد، مهره بر روی دایره‌ای به شعاع R می‌چرخد. مقدار c کدام است؟ محور z در امتداد قائم و مبدأ مختصات روی سطح زمین است.

$$\frac{\omega^2}{g} \quad (1)$$

$$\frac{2\omega^2}{g} \quad (2)$$

$$\frac{\omega^2}{2g} \quad (3)$$

$$\frac{\omega^2}{4g} \quad (4)$$

کنکور ارشد ۱۳۹۶

۸۳- ذره‌ای به جرم m در صفحه $x-z$ روی مسیر بدون اصطکاک $xz = c$ و تحت تأثیر نیروی گرانش، $\vec{g} = -g\hat{z}$ حرکت می‌کند. c ثابت است. معادله دیفرانسیل حرکت ذره کدام است؟

کنکور ارشد ۱۴۰۰

$$m\ddot{x}(x^5 + c^7x) - 6mc^7\dot{x}^7 - mgcx^7 = 0 \quad (1)$$

$$m\ddot{x}(x^5 + c^7x) - 7mc^7\dot{x}^7 - mgcx^7 = 0 \quad (2)$$

$$m\ddot{x}(x^5 + cx^7) - 7mc^7\dot{x}^7 - mgcx^7 = 0 \quad (3)$$

$$m\ddot{x}(x^5 + cx^7) - 6mc^7\dot{x}^7 - mgcx^7 = 0 \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

$$V = mgz$$

$$xz = c$$

$$z = \frac{c}{x}$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{c}{x^2} \dot{x}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\frac{c^2}{x^4}\dot{x}^2$$

$$V = mg\frac{c}{x}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\frac{c^2}{x^4}\dot{x}^2 - mg\frac{c}{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m\frac{c^2}{x^4}\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} + m\frac{c^2}{x^4}\ddot{x} - 4m\frac{c^2}{x^5}\dot{x}^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\frac{c^2}{x^4}\dot{x}^2 - mg\frac{c}{x}$$

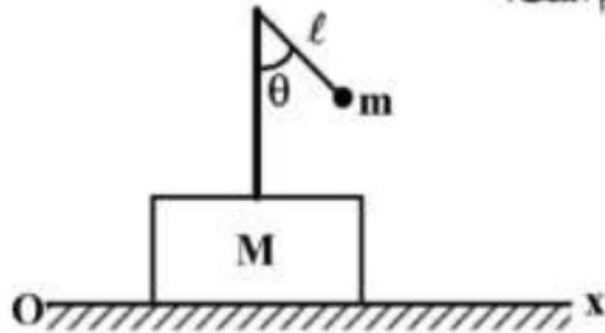
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2m\frac{c^2}{x^5}\dot{x}^2 + mg\frac{c}{x^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + m\frac{c^2}{x^4}\ddot{x} - 4m\frac{c^2}{x^5}\dot{x}^2$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= m\ddot{x}\left(1 + \frac{c^2}{x^4}\right) - 4m\frac{c^2}{x^5}\dot{x}^2 + 2m\frac{c^2}{x^5}\dot{x}^2 - mg\frac{c}{x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$m\ddot{x}(x^5 + c^2x) - 2mc^2\dot{x}^2 - mgcx^3 = 0$$

۸۰- آونگ ساده‌ای به جرم m و طول ℓ به انتهای میله‌ای که روی یک پایه نصب شده، وصل شده است. جرم پایه و میله متصل به آن M است. اگر پایه روی محور x با سرعت لحظه‌ای $\dot{x}$ نسبت به مبدأ ساکن O حرکت کند، لاگرانژی دستگاه بر حسب مختصات تعمیم‌یافته x و θ و سرعت‌های متناظر کدام است؟



کنکور ارشد
۱۳۹۷

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mg\ell\cos\theta \quad (۱)$$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mg\ell\cos\theta \quad (۲)$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + \frac{\ell\dot{\theta}}{2}\cos\theta\right)^2 + mg\ell\cos\theta \quad (۳)$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} - \ell\dot{\theta})^2\cos^2\theta + \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta] + mg\ell\cos\theta \quad (۴)$$

$$T_M = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

برای جرم M داریم:

$$T_m = \frac{1}{2}A_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + B_k\dot{q}_k + T_0$$

برای جرم m داریم:

$$A_{kl} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_l} \right)$$

$$q_1 = r, q_2 = \theta$$

$$T_m = \frac{1}{2} (m \dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2) + B_k \dot{q}_k + T_0$$

$$B_k = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)$$

$$B_r = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial r} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial r} \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)$$

$$B_\theta = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \theta} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial \theta} \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)$$

$$x_m = r \sin \theta + \dot{x} t$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial t} = \dot{x}$$

$$y_m = r \cos \theta$$

$$\frac{\partial y_m}{\partial r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial y_m}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial y_m}{\partial t} = 0$$

$$B_r = m(\sin \theta \dot{x})$$

$$B_\theta = m(r \cos \theta \dot{x})$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$r = l$$

$$\dot{r} = 0$$

$$T_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m (\sin \theta \dot{x} \dot{r} + r \cos \theta \dot{x} \dot{\theta}) + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (m + M) \dot{x}^2$$

$$V = -mgl \cos \theta$$

اگر انرژی پتانسیل را در
محل اتصال نخ آونگ صفر
در نظر بگیریم.

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (m + M) \dot{x}^2 + mgl \cos \theta$$