

بسم الله الرحمن الرحيم

تمرین های مکانیک تحلیلی ۲

**تهیه شده توسط دکتر لیلا ملاباشی
پژوهشگر پسادکتری**

۳. (الف) انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم m را برحسب مختصات دوبعدی سهموی f و h به صورتی که در مسئله ۱۷ فصل ۳ تعریف شد، بنویسید. اندازه‌های حرکت P_f و P_h را پیدا کنید. (ب) با فرض اینکه نیرویی به ذره وارد نمی‌شود، معادلات لاگرانژ را برحسب این مختصات بنویسید.

$$\dot{x} = \dot{f} - \dot{h}$$

$$\dot{y} = (fh)^{-1/2}(\dot{f}h + \dot{h}f)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{f} - \dot{h})^2 + \frac{1}{2}m\frac{(\dot{f}h + \dot{h}f)^2}{fh}$$

$$p_f = \frac{\partial T}{\partial \dot{f}} = m(\dot{f} - \dot{h}) + m\frac{h(\dot{f}h + \dot{h}f)}{fh} = m\left[(\dot{f} - \dot{h}) + \frac{(\dot{f}h + \dot{h}f)}{f}\right]$$

$$p_f = m\frac{f+h}{f}\dot{f}$$

۱۷*. (الف) مختصات سهموی f و h بر حسب مختصات دکارتی x و y به وسیله معادلات زیر تعریف می‌شوند $x = f - h$, $y = 2(fh)^{1/2}$ که در آن f و h هرگز منفی نمی‌شوند.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{f} - \dot{h})^2 + \frac{1}{2}m \frac{(\dot{f}h + \dot{h}f)^2}{fh}$$

$$p_h = \frac{\partial T}{\partial \dot{h}} = -m(\dot{f} - \dot{h}) + m \frac{f(\dot{f}h + \dot{h}f)}{fh} = m \left[(\dot{h} - \dot{f}) + \frac{(\dot{f}h + \dot{h}f)}{h} \right]$$

$$p_h = m \frac{h + f}{h} \dot{h}$$

با فرض اینکه نیرویی به ذره وارد نمی‌شود، معادلات لاگرانژ را برحسب این مختصات بنویسید.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{f}} - \frac{\partial T}{\partial f} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{f}} = \frac{d}{dt} m \left(\frac{f + h}{f} \dot{f} \right) = m \left[\frac{f + h}{f} \ddot{f} + \frac{\dot{f} + \dot{h}}{f} \dot{f} - \frac{f + h}{f^2} \dot{f} \dot{f} \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial f} = m \frac{\dot{h}(\dot{f}h + \dot{h}f)}{fh} - \frac{1}{2}m \frac{(\dot{f}h + \dot{h}f)^2}{f^2h}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{f}} - \frac{\partial T}{\partial f} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{h}} - \frac{\partial T}{\partial h} = 0$$

$$\frac{f+h}{f} \ddot{f} + \frac{\dot{f}+\dot{h}}{f} \dot{f} - \frac{f+h}{f^2} \dot{f}^2 - \frac{\dot{h}(\dot{f}h + \dot{h}f)}{fh} + \frac{(\dot{f}h + \dot{h}f)^2}{2f^2h} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{f} - \dot{h})^2 + \frac{1}{2} m \frac{(\dot{f}h + \dot{h}f)^2}{fh}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{h}} = \frac{d}{dt} \left(m \frac{h+f}{h} \dot{h} \right) = m \left[\frac{h+f}{h} \ddot{h} + \frac{\dot{h}+\dot{f}}{h} \dot{h} - \frac{h+f}{h^2} \dot{h}\dot{h} \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial h} = m \frac{\dot{f}(\dot{f}h + \dot{h}f)}{fh} - \frac{1}{2} m \frac{(\dot{f}h + \dot{h}f)^2}{fh^2}$$

$$\frac{h+f}{h} \ddot{h} + \frac{\dot{h}+\dot{f}}{h} \dot{h} - \frac{h+f}{h^2} \dot{h}^2 - \frac{\dot{f}(\dot{f}h + \dot{h}f)}{fh} + \frac{(\dot{f}h + \dot{h}f)^2}{2fh^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{f}} - \frac{\partial T}{\partial f} = Q_f$$

۴. (الف) مطلوب است نیروهای Q_h و Q_f لازم برای آنکه ذره مذکور در مسئله ۳ در زمان $t = 0$ از نقطه $h = 0$ با سرعت تعمیم یافته ثابت $\dot{h} = \dot{h}_0$ در امتداد سهمی، ثابت $f = f_0$ ، حرکت کند. (ب) نیروهای F_x و F_y مربوط در دستگاه مختصات دکارتی را پیدا کنید.

$$m \left(\frac{f+h}{f} \ddot{f} + \frac{\dot{f}+\dot{h}}{f} \dot{f} - \frac{f+h}{f^2} \dot{f}^2 - \frac{\dot{h}(\dot{f}h + \dot{h}f)}{fh} + \frac{(\dot{f}h + \dot{h}f)^2}{2f^2h} \right) = Q_f$$

$$f = f_0$$

$$\dot{f} = \ddot{f} = 0$$

$$\dot{h} = \dot{h}_0$$

$$\ddot{h} = 0$$

$$Q_f = -m \frac{\dot{h}_0 \dot{h}_0 f_0}{f_0 h} + m \frac{\dot{h}_0^2 f_0^2}{2 f_0^2 h}$$

$$Q_f = -\frac{1}{2} m \frac{\dot{h}_0^2}{h}$$

$$m \left(\frac{h+f}{h} \ddot{h} + \frac{\dot{h}+\dot{f}}{h} \dot{h} - \frac{h+f}{h^2} \dot{h}^2 - \frac{\dot{f}(\dot{f}h + \dot{h}f)}{fh} + \frac{(\dot{f}h + \dot{h}f)^2}{2fh^2} \right) = Q_h$$

$$Q_h = m \frac{\dot{h}_0}{h} \dot{h}_0 - m \frac{h+f_0}{h^2} \dot{h}_0^2 + \frac{\dot{h}_0^2 f_0^2}{2 f_0 h^2} = m \frac{h \dot{h}_0^2 - h \dot{h}_0^2 - f_0 \dot{h}_0^2}{h^2} + m \frac{\dot{h}_0^2 f_0}{2 h^2}$$

$$Q_h = -m \frac{\dot{h}_0^2 f_0}{2 h^2}$$

۴. (الف) مطلوب است نیروهای Q_h و Q_f لازم برای آنکه ذره مذکور در مسئله ۳ در زمان $t = 0$ از نقطه $h = 0$ با سرعت تعمیم یافته ثابت $\dot{h} = \dot{h}_0$ در امتداد سهمی، ثابت $f = f_0$ ، حرکت کند. (ب) نیروهای F_x و F_y مربوط در دستگاه مختصات دکارتی را پیدا کنید.

$$Q_h = -m \frac{\dot{h}_0^2 f_0}{2h^2}$$

$$Q_f = -\frac{1}{2} m \frac{\dot{h}_0^2}{h}$$

$$x = f - h$$

$$y = 2(fh)^{1/2}$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

$$Q_f = F_x \frac{\partial x}{\partial f} + F_y \frac{\partial y}{\partial f}$$

$$Q_h = F_x \frac{\partial x}{\partial h} + F_y \frac{\partial y}{\partial h}$$

$$\frac{\partial x}{\partial f} = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial h} = -1$$

$$\frac{\partial y}{\partial f} = -\left(\frac{h}{f}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial h} = -\left(\frac{f}{h}\right)^{1/2}$$

$$-\frac{1}{2} m \frac{\dot{h}_0^2}{h} = F_x - \left(\frac{h}{f}\right)^{1/2} F_y$$

$$-m \frac{\dot{h}_0^2 f_0}{2h^2} = -F_x - \left(\frac{f}{h}\right)^{1/2} F_y$$

۴. (الف) مطلوب است نیروهای Q_f و Q_h لازم برای آنکه ذره مذکور در مسئله ۳ در زمان $t = 0$ از نقطه $h = 0$ با سرعت تعمیم یافته ثابت $\dot{h} = \dot{h}_0$ در امتداد سهمی، ثابت $f = f_0$ ، حرکت کند. (ب) نیروهای F_x و F_y مربوط در دستگاه مختصات دکارتی را پیدا کنید.

$$-\frac{1}{2}m \frac{\dot{h}_0^2}{h} = F_x - \left(\frac{h}{f}\right)^{1/2} F_y$$

$$-\frac{1}{2}m \frac{\dot{h}_0^2}{h} \times \left(\frac{f}{h}\right)^{1/2} = \left(\frac{f}{h}\right)^{1/2} F_x - F_y$$

$$-m \frac{\dot{h}_0^2 f_0}{2h^2} = -F_x - \left(\frac{f}{h}\right)^{1/2} F_y$$

$$-m \frac{\dot{h}_0^2 f_0}{2h^2} \times \left(-\left(\frac{h}{f}\right)^{1/2}\right) = \left(\frac{h}{f}\right)^{1/2} F_x + F_y$$

$$m \left(\frac{\dot{h}_0^2 f_0}{2h^2} + \frac{\dot{h}_0^2}{2h} \right) = \left(\left(\frac{f}{h}\right)^{1/2} + \left(\frac{h}{f}\right)^{1/2} \right) F_y$$

$$m \left(\frac{\dot{h}_0^2 f_0 h^{1/2}}{2h^2 f^{1/2}} + \frac{\dot{h}_0^2 f^{1/2}}{2h h^{1/2}} \right) = \left(\left(\frac{f}{h}\right)^{1/2} + \left(\frac{h}{f}\right)^{1/2} \right) F_x$$

$$F_y = m \frac{\dot{h}_0^2 (f_0 + h) (hf_0)^{1/2}}{2h^2 f_0 + h}$$

$$m \left(\frac{\dot{h}_0^2 f_0 h - \dot{h}_0^2 f_0 h}{2h^2 (hf_0)^{1/2}} \right) = \left(\frac{f_0 + h}{(hf_0)^{1/2}} \right) F_x$$

$$F_y = m \frac{\dot{h}_0^2 (hf_0)^{1/2}}{2h^2}$$

$$F_x = 0$$

۸. اجرام m و $۲m$ به وسیلهٔ ریسمانی به طول $l_۱$ از دو سوی قرقره‌ای و اجرام $۳m$ و $۴m$ نیز به همین شکل به وسیلهٔ ریسمانی به طول $l_۲$ از دو سوی قرقرهٔ دیگری آویزان شده‌اند. این دو قرقره از دو انتهای ریسمانی به طول $l_۳$ که بر روی قرقرهٔ ثابت دیگری قرار دارد، آویزان شده‌اند. معادلات لاگرانژ را بنویسید و شتابها و نیروهای کشش را در ریسمانها پیدا کنید.

- مکان قرقره متحرک اول h_1
- مکان قرقره متحرک دوم h_2
- مکان جرم اول y_1
- مکان جرم دوم y_2
- مکان جرم سوم y_3
- مکان جرم چهارم y_4

$$(y_1 - h_1) + (y_2 - h_1) = l_1$$

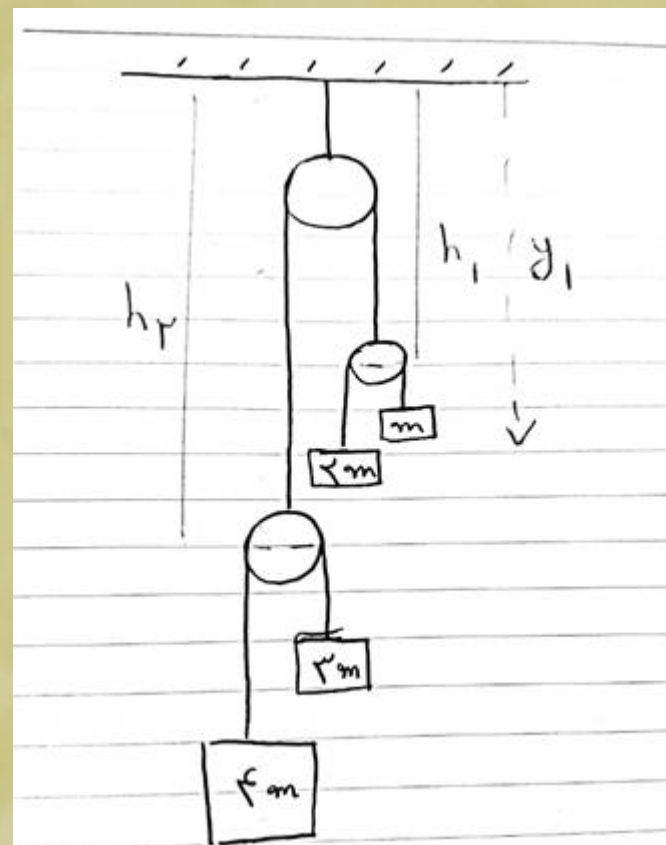
$$h_1 + h_2 = l_3$$

$$(y_3 - h_2) + (y_4 - h_2) = l_2$$

$$y_2 = l_1 + 2h_1 - y_1$$

$$y_4 = l_2 + 2h_2 - y_3$$

$$y_4 = l_2 + 2l_3 - 2h_1 - y_3$$



$$y_2 = l_1 + 2h_1 - y_1$$

$$\dot{y}_2 = 2\dot{h}_1 - \dot{y}_1$$

$$y_4 = l_2 + 2l_3 - 2h_1 - y_3$$

$$\dot{y}_4 = -2\dot{h}_1 - \dot{y}_3$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}2m\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}3m\dot{y}_3^2 + \frac{1}{2}4m\dot{y}_4^2$$

$$V = -mgy_1 - 2mgy_2 - 3mgy_3 - 4mgy_4$$

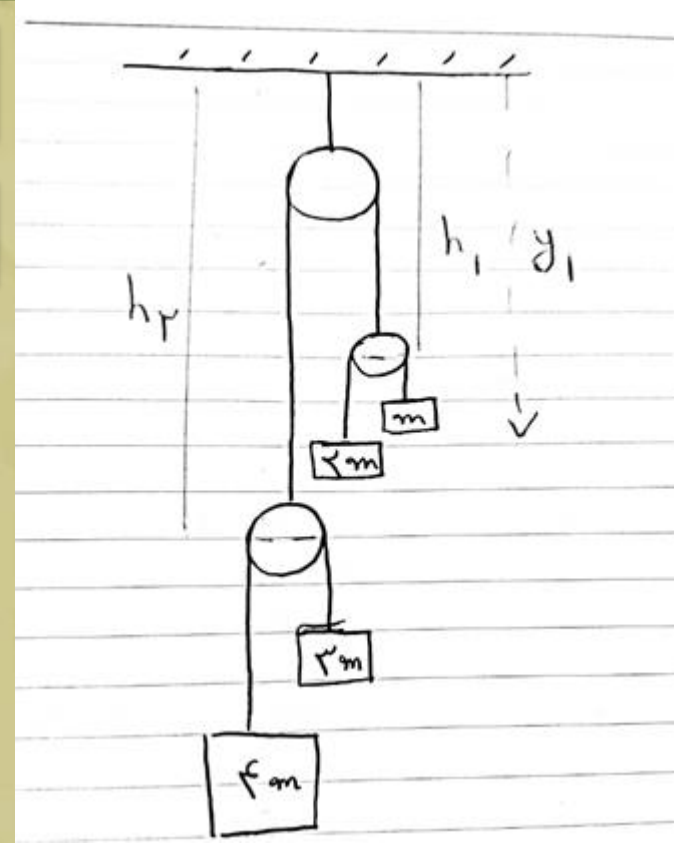
$$T = \frac{1}{2}m \left[\dot{y}_1^2 + 2(2\dot{h}_1 - \dot{y}_1)^2 + 3\dot{y}_3^2 + 4(-2\dot{h}_1 - \dot{y}_3)^2 \right]$$

$$T = \frac{1}{2}m \left[3\dot{y}_1^2 - 8\dot{h}_1\dot{y}_1 + 7\dot{y}_3^2 + 16\dot{h}_1\dot{y}_3 + 24\dot{h}_1^2 \right]$$

$$V = -mg[y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4]$$

$$V = -mg[y_1 + 2(l_1 + 2h_1 - y_1) + 3y_3 + 4(l_2 + 2l_3 - 2h_1 - y_3)]$$

$$V = mg[y_1 + 4h_1 + y_3] - mg[2l_1 + 4l_2 + 8l_3]$$



$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$L = \frac{1}{2}m \left[3\dot{y}_1^2 - 8\dot{h}_1\dot{y}_1 + 7\dot{y}_3^2 + 16\dot{h}_1\dot{y}_3 + 24\dot{h}_1^2 \right] - mg[y_1 + 4h_1 + y_3] + mg[2l_1 + 4l_2 + 8l_3]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = 3m\dot{y}_1 - 4m\dot{h}_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = 3m\ddot{y}_1 - 4m\ddot{h}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -mg$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 3m\ddot{y}_1 - 4m\ddot{h}_1 + mg = 0$$

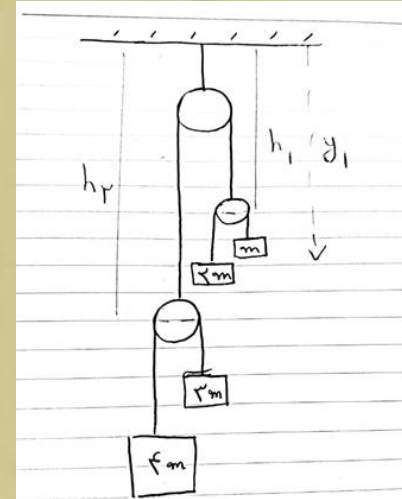
$$3\ddot{y}_1 - 4\ddot{h}_1 + g = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{h}_1} = 24m\dot{h}_1 - 4m\dot{y}_1 + 8m\dot{y}_3$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_1} = 24m\ddot{h}_1 - 4m\ddot{y}_1 + 8m\ddot{y}_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial h_1} = -4mg$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_1} - \frac{\partial L}{\partial h_1} = 24m\ddot{h}_1 - 4m\ddot{y}_1 + 8m\ddot{y}_3 + 4mg = 0$$



$$6\ddot{h}_1 - \ddot{y}_1 + 2\ddot{y}_3 + g = 0$$

$$L = \frac{1}{2}m \left[3\dot{y}_1^2 - 8\dot{h}_1\dot{y}_1 + 7\dot{y}_3^2 + 16\dot{h}_1\dot{y}_3 + 24\dot{h}_1^2 \right] - mg[y_1 + 4h_1 + y_3] + mg[2l_1 + 4l_2 + 8l_3]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} = 7m\dot{y}_3 + 8m\dot{h}_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} = 7m\ddot{y}_3 + 8m\ddot{h}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_3} = -mg$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} - \frac{\partial L}{\partial y_3} = 7m\ddot{y}_3 + 8m\ddot{h}_1 + mg = 0$$

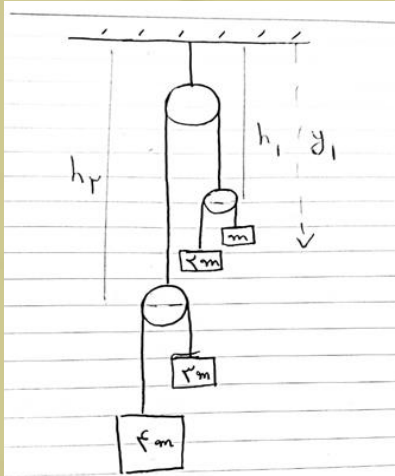
$$7\ddot{y}_3 + 8\ddot{h}_1 + g = 0$$

$$\ddot{y}_3 = -\frac{8\ddot{h}_1 + g}{7}$$

$$3\ddot{y}_1 - 4\ddot{h}_1 + g = 0$$

$$6\ddot{h}_1 - \ddot{y}_1 + 2\ddot{y}_3 + g = 0$$

$$6\ddot{h}_1 - \ddot{y}_1 + 2\left(-\frac{8\ddot{h}_1 + g}{7}\right) + g = 0$$



$$6\ddot{h}_1 - \ddot{y}_1 + 2\left(-\frac{8\ddot{h}_1 + g}{7}\right) + g = 0$$

$$42\ddot{h}_1 - 7\ddot{y}_1 - 16\ddot{h}_1 - 2g + 7g = 0$$

$$26\ddot{h}_1 - 7\ddot{y}_1 + 5g = 0$$

$\times 3$

$$78\ddot{h}_1 - 21\ddot{y}_1 + 15g = 0$$

$$3\ddot{y}_1 - 4\ddot{h}_1 + g = 0$$

$\times 7$

$$21\ddot{y}_1 - 28\ddot{h}_1 + 7g = 0$$

$$50\ddot{h}_1 + 22g = 0$$

$$\ddot{h}_1 = -\frac{22}{50}g = -\frac{11}{25}g$$

$$\ddot{h}_1 = -\frac{11}{25}g$$

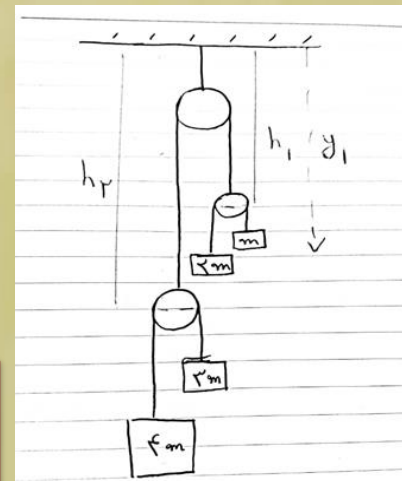
$$21\ddot{y}_1 - 28\left(-\frac{11}{25}g\right) + 7g = 0$$

$$25 \times 21\ddot{y}_1 + 308g + 175g = 0$$

$$525\ddot{y}_1 = -483g$$

$$\ddot{y}_1 = -\frac{483}{25 \times 21}g = -\frac{23 \times 21}{25 \times 21}g$$

$$\ddot{y}_1 = -\frac{23}{25}g$$



$$\ddot{y}_1 = -\frac{23}{25}g$$

$$\ddot{h}_1 = -\frac{11}{25}g$$

$$\dot{y}_2 = 2\dot{h}_1 - \dot{y}_1$$

$$\ddot{y}_2 = 2\ddot{h}_1 - \ddot{y}_1$$

$$\ddot{y}_2 = 2\left(-\frac{11}{25}g\right) - \left(-\frac{23}{25}g\right)$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{1}{25}g$$

$$7\ddot{y}_3 + 8\ddot{h}_1 + g = 0$$

$$7\ddot{y}_3 + 8\left(-\frac{11}{25}g\right) + g = 0$$

$$25 \times 7\ddot{y}_3 - 8 \times 11g + 25g = 0$$

$$\ddot{y}_3 = \frac{63}{25 \times 7}g$$

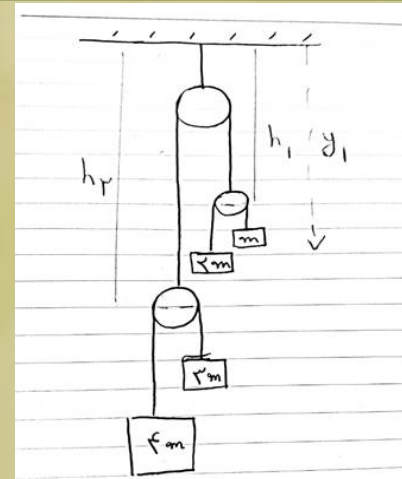
$$\ddot{y}_3 = \frac{9}{25}g$$

$$\ddot{y}_4 = -2\ddot{h}_1 - \ddot{y}_3$$

$$\ddot{y}_4 = -2\ddot{h}_1 - \ddot{y}_3$$

$$\ddot{y}_4 = -2\left(-\frac{11}{25}g\right) - \left(\frac{9}{25}g\right)$$

$$\ddot{y}_4 = \frac{13}{25}g$$



$$\ddot{y}_1 = -\frac{23}{25}g$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{1}{25}g$$

$$\ddot{y}_3 = \frac{9}{25}g$$

$$\ddot{y}_4 = \frac{13}{25}g$$

$$mg - T_1 = m\ddot{y}_1 = -m\frac{23}{25}g$$

$$T_1 = \frac{48}{25}mg$$

$$2mg - T_2 = 2m\ddot{y}_2 = 2m\frac{1}{25}g$$

$$T_2 = \frac{48}{25}mg$$

$$3mg - T_3 = 3m\ddot{y}_3 = 3m\frac{9}{25}g$$

$$T_3 = \frac{48}{25}mg$$

$$4mg - T_4 = 4m\ddot{y}_4 = 4m\frac{13}{25}g$$

$$T_4 = \frac{48}{25}mg$$

$$T_1 + T_2 - T_h = 0$$

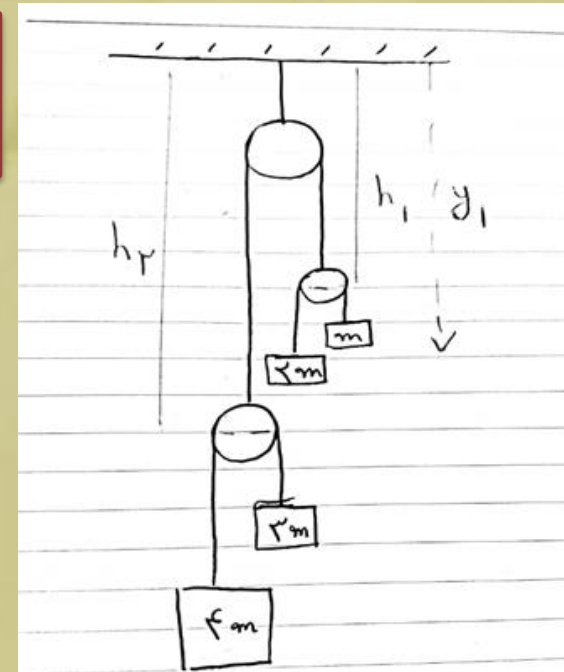
$$T_h = T_1 + T_2$$

$$T_h = \frac{96}{25}mg$$

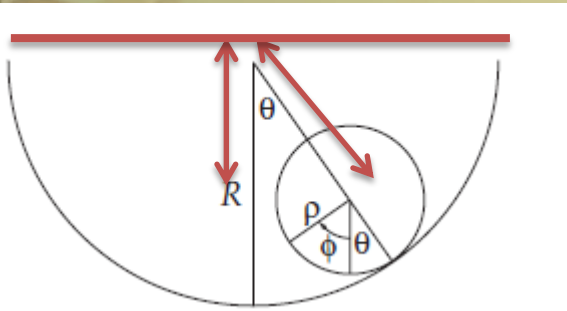
$$T_h + T_h - T = 0$$

$$T = 2T_h$$

$$T = \frac{192}{25}mg$$



تمرین: کره‌ای به شعاع ρ مقید است که بدون لغزش بر روی نیمه پایینی سطح داخلی یک استوانه توخالی به شعاع داخلی R بغلتد. تابع لاگرانژی را بنویسید.



دوران مرکز جرم حول محور استوانه + حرکت دورانی کره حول مرکز جرم

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2$$

$$r = R - \rho$$

$$\dot{r} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m (R - \rho)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2$$

$$V = -(R - \rho) \cos \theta \, m g$$

اگر انرژی پتانسیل در بالاترین نقطه استوانه (یعنی وقتی $\theta = 0$) برابر نود درجه است) صفر فرض کنیم:

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} m (R - \rho)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 + (R - \rho) \cos \theta \, m g$$

$$I = \frac{2}{5} m \rho^2$$

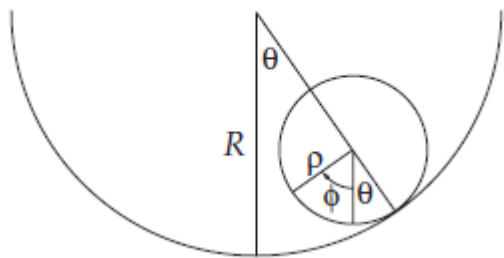
$$L = \frac{1}{2} m (R - \rho)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{5} m \rho^2 \dot{\phi}^2 + (R - \rho) \cos \theta \, m g$$

تمرین: کره‌ای به شعاع ρ مقید است که بدون لغزش بر روی نیمه پایینی سطح داخلی یک استوانه توخالی به شعاع داخلی R بغلتد. تابع لاگرانژی را بنویسید.

$$(R - \rho)\theta = \rho\phi$$

$$\frac{R - \rho}{\rho} \dot{\theta} = \dot{\phi}$$

شرط غلتش:



$$L = \frac{1}{2} m(R - \rho)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{5} m \rho^2 \dot{\phi}^2 + (R - \rho) \cos \theta \, mg$$

$$L = \frac{1}{2} m(R - \rho)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{5} m(R - \rho)^2 \dot{\theta}^2 + (R - \rho) \cos \theta \, mg$$

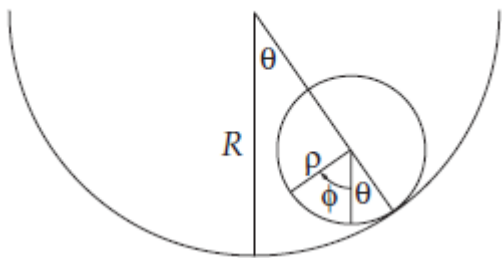
$$L = \frac{7}{10} m(R - \rho)^2 \dot{\theta}^2 + (R - \rho) \cos \theta \, mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{7}{5} m(R - \rho)^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{7}{5} m(R - \rho)^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(R - \rho) \sin \theta$$

تمرین: کره‌ای به شعاع ρ مقید است که بدون لغزش بر روی نیمه پایینی سطح داخلی یک استوانه توخالی به شعاع داخلی R بغلتد. تابع لاگرانژی را بنویسید.



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{7}{5} m (R - \rho)^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(R - \rho) \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{7}{5} m (R - \rho)^2 \ddot{\theta} + mg(R - \rho) \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(R - \rho)} \sin \theta$$

۱۲. نردبانی به دیوار صافی متکی است و بی اصطکاک بر روی دیوار و زمین می لغزد. با فرض اینکه نردبان تماس خود را با دیوار حفظ کند، معادلات حرکت را به دست آورید. اگر زاویه اولیه نردبان با زمین α باشد، در چه زاویه ای (در صورت وجود)، نردبان از دیوار جدا می شود؟

حرکت انتقالی مرکز جرم + حرکت دورانی حول مرکز جرم

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$x = \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$\dot{x} = -\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = -\frac{l}{2} \sin \theta \ddot{\theta} - \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta}^2$$

$$I = \frac{1}{12} m l^2$$

$$y = \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$\dot{y} = \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\omega = \dot{\theta}$$

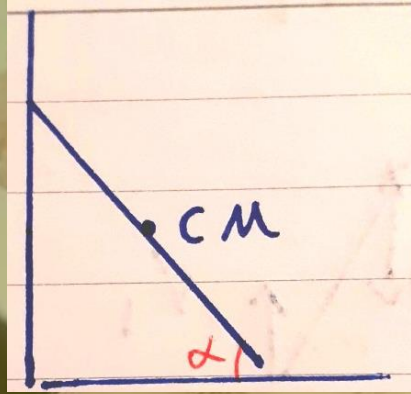
$$T = \frac{1}{8} m l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{8} m l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{24} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = m g y = m g \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g \frac{l}{2} \sin \theta$$

۱۲. نردبانی به دیوار صافی متکی است و بی اصطکاک بر روی دیوار و زمین می لغزد. با فرض اینکه نردبان تماس خود را با دیوار حفظ کند، معادلات حرکت را به دست آورید. اگر زاویه اولیه نردبان با زمین α باشد، در چه زاویه ای (در صورت وجود)، نردبان از دیوار جدا می شود؟



$$L = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + mg\frac{l}{2}\cos\theta = 0$$

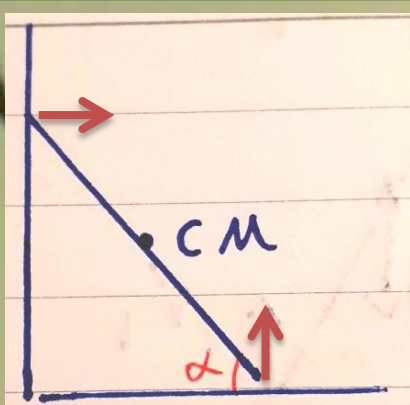
$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + mg\frac{l}{2}\cos\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + g\frac{3}{2l}\cos\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - g\frac{3}{2l}\sin\theta\right] = \dot{\theta}\ddot{\theta} + g\frac{3}{2l}\cos\theta\dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - g\frac{3}{2l}\sin\theta = cte$$

در لحظه $t = 0$ زاویه نردبان با زمین برابر α و سرعت برابر صفر است.



$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - g \frac{3}{2l} \sin \theta = cte$$

$$0 - g \frac{3}{2l} \sin \theta = cte$$

$$cte = g \frac{3}{2l} \sin \alpha$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - g \frac{3}{2l} \sin \theta = g \frac{3}{2l} \sin \alpha$$

در لحظه جدا شدن نردبان از دیوار نیروی عمودی سطح در راستای افقی برابر صفر می‌شود.

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} = -\frac{l}{2} (\sin \theta \ddot{\theta} + \cos \theta \dot{\theta}^2) = 0$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l} (\sin \alpha - \sin \theta)$$

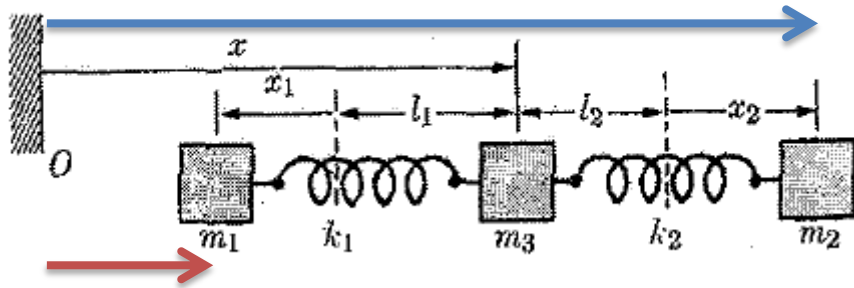
$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2l} \cos \theta$$

$$-\sin \theta \frac{3g}{2l} \cos \theta + \cos \theta \frac{3g}{l} (\sin \alpha - \sin \theta) = 0$$

$$-\frac{3}{2} \sin \theta + \sin \alpha = 0$$

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} \sin \alpha \right)$$

۶. تابع لاگرانژ دستگاه مکانیکی شکل ۴-۱۶ را با به کار بردن مختصات x, x_1, x_2 به صورتی که نشان داده شده است، پیدا کنید. معادلات حرکت را به دست آورید و نشان دهید که این معادلات با معادلاتی که از به کار بردن مستقیم قانون حرکت نیوتن به دست می آیند، معادل اند.



$$X_1 = x - (x_1 + l_1)$$

$$X_2 = x + (x_2 + l_2)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{X}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2$$

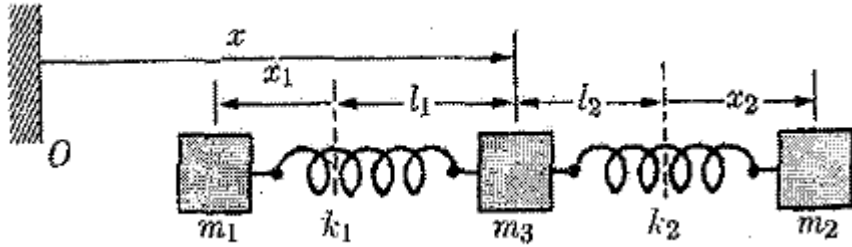
$$\dot{X}_1 = \dot{x} - \dot{x}_1$$

$$\dot{X}_2 = \dot{x} + \dot{x}_2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x} - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x} + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

$$L = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{x} - \dot{x}_1)^2 + m_2 (\dot{x} + \dot{x}_2)^2 + m_3 \dot{x}^2 - k_1 x_1^2 - k_2 x_2^2]$$



$$L = \frac{1}{2} [m_1(\dot{x} - \dot{x}_1)^2 + m_2(\dot{x} + \dot{x}_2)^2 + m_3\dot{x}^2 - k_1x_1^2 - k_2x_2^2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1(\dot{x} - \dot{x}_1) + m_2(\dot{x} + \dot{x}_2) + m_3\dot{x}$$

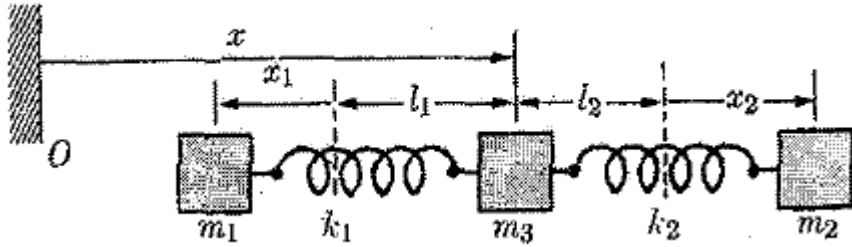
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1(\ddot{x} - \ddot{x}_1) + m_2(\ddot{x} - \ddot{x}_2) + m_3\ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m_1(\ddot{x} - \ddot{x}_1) + m_2(\ddot{x} - \ddot{x}_2) + m_3\ddot{x} = 0$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} - m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$$



$$L = \frac{1}{2} [m_1(\dot{x} - \dot{x}_1)^2 + m_2(\dot{x} + \dot{x}_2)^2 + m_3\dot{x}^2 - k_1x_1^2 - k_2x_2^2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = -m_1(\dot{x} - \dot{x}_1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = -m_1(\ddot{x} - \ddot{x}_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1x_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$-m_1(\ddot{x} - \ddot{x}_1) + k_1x_1 = 0$$

$$m_1(\ddot{x} - \ddot{x}_1) = k_1x_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2(\dot{x} + \dot{x}_2)$$

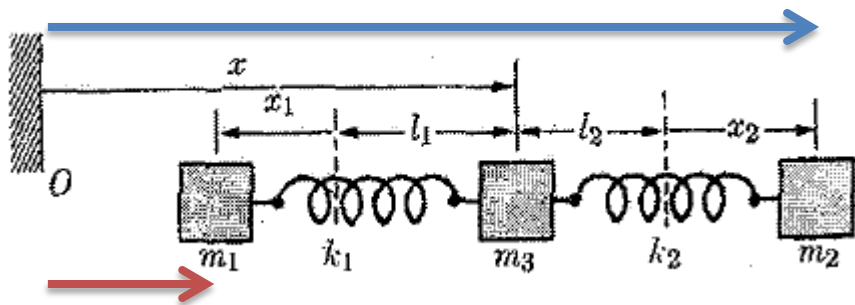
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2(\ddot{x} + \ddot{x}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2x_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$m_2(\ddot{x} + \ddot{x}_2) + k_2x_2 = 0$$

$$m_2(\ddot{x} + \ddot{x}_2) = -k_2x_2$$



$$m_1(\ddot{x} - \ddot{x}_1) = k_1 x_1$$

$$m_2(\ddot{x} + \ddot{x}_1) = -k_2 x_2$$

$$m_1(\ddot{x} - \ddot{x}_1) + m_2(\ddot{x} - \ddot{x}_2) + m_3 \ddot{x} = 0$$

$$\ddot{X}_1 = \ddot{x} - \ddot{x}_1$$

$$\ddot{X}_2 = \ddot{x} + \ddot{x}_2$$

$$k_1 x_1 - k_2 x_2 + m_3 \ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{k_2 x_2 - k_1 x_1}{m_3}$$

$$m_3 \ddot{x} = -k_1 x_1 + k_2 x_2$$

قوانین نیوتون
برای دو جرم
اول و دوم: