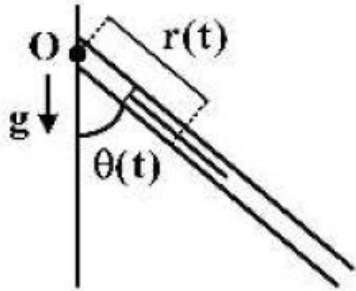


بسم الله الرحمن الرحيم

تمرین های مکانیک تحلیلی ۲

**تهیه شده توسط دکتر لیلا ملاباشی
پژوهشگر پسادکتری**

۸۱- میله یکنواختی به جرم M و طول L می تواند بدون اصطکاک داخل لوله طویل و بسیار سبکی بلغزد. مجموعه مطابق شکل حول یک انتهای لوله می تواند آزادانه در یک صفحه قائم دوران کند. در لحظه t فاصله مرکز جرم میله از محور دوران $r(t)$ و زاویه آن با امتداد قائم برابر $\theta(t)$ است، لختی دورانی میله حول مرکز جرم اش I است. معادلات حاکم بر حرکت میله کدام است؟



ارشد ۹۹

$$m(r\ddot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) + I\ddot{\theta} - mgr \sin \theta = 0, \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$m(r\ddot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) + I\ddot{\theta} + mgr \sin \theta = 0, \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - g \cos \theta = 0 \quad (2)$$

$$m(r\ddot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) + I\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgr \sin \theta = 0, \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}g \cos \theta = 0 \quad (3)$$

$$m(r\ddot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) + I\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mgr \sin \theta = 0, \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}g \cos \theta = 0 \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

حرکت: حرکت انتقالی میله در لوله +
حرکت دورانی میله

$$V = -mgr \cos \theta$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgr \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgr \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta = 0$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - g \cos \theta = 0$$

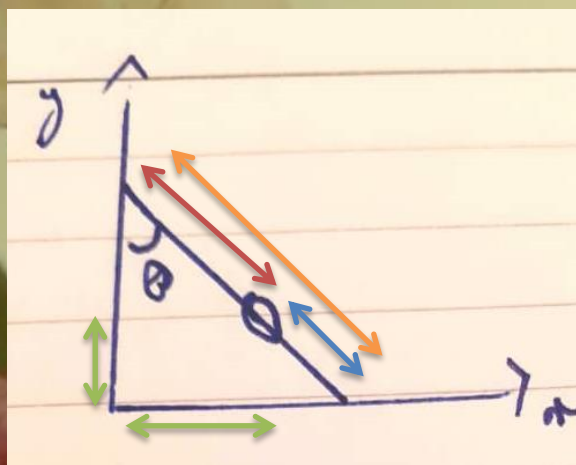
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} + I\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + I\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + I\ddot{\theta} + mgr \sin \theta = 0$$

۱۳. انتهای میله‌ای به جرم یکنواخت M با دیوار قائم صافی و انتهای دیگر آن با کف افقی همواری، در تماس است. دانه تسبیحی به جرم m و ابعاد ناچیز بر روی میله می‌لغزد. مختصات مناسبی اختیار کنید و تابع لاگرانژ و معادلات لاگرانژ را بنویسید. میله در صفحه‌ای قائم، که عمود بر دیوار است، حرکت می‌کند.



$$x = r \sin \theta$$

حرکت: حرکت انتقالی مهره + حرکت دورانی میله

$$y = l \cos \theta - r \cos \theta$$

$$y = (l - r) \cos \theta$$

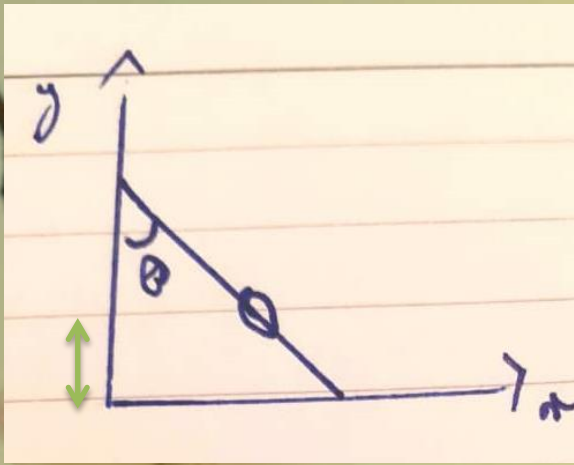
$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$I = \frac{1}{3} M l^2$$

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y} = -\dot{r} \cos \theta - (l - r) \dot{\theta} \sin \theta$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2l\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + \dot{r}^2 \cos^2 \theta + (l - r)^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$



$$(l - r)^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2lr \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2l\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + \dot{r}^2 \cos^2 \theta + (l - r)^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2lr \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$V = mg(l - r) \cos \theta + Mg \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2lr \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - mg(l - r) \cos \theta - Mg \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m(\dot{r} + l\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{r} + l\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) = m(\ddot{r} + l\ddot{\theta} \sin \theta \cos \theta + l\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - l\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2lr\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2lr\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg(l - r) \cos \theta - Mg \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m(r\dot{\theta}^2 - l\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + mg \cos \theta$$

$$m(\ddot{r} + l\ddot{\theta} \sin \theta \cos \theta + l\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - l\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) - m(r\dot{\theta}^2 - l\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) - mg \cos \theta = 0$$

$$\ddot{r} + l\ddot{\theta} \sin \theta \cos \theta + l\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2 - g \cos \theta = 0$$

تمرین: دومین معادله لاگرانژ را به دست آورید.

۱۶. گلوله آونگی به جرم m به وسیله ریسمانی به طول l از واگنی به جرم M آویزان شده است که در امتداد ریل هوایی افقی بی اصطکاکی حرکت می کند. آونگ در صفحه قائمی که شامل ریل است نوسان می کند. (الف) معادلات لاگرانژ را پیدا کنید. (ب) نشان دهید که مختصات قابل اغماض وجود دارد. آن را حذف کنید و به وسیله روش انرژی در باره چگونگی حرکت بحث کنید.

$$x = X + l \sin \theta$$

$$y = -l \cos \theta$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} M \dot{X}^2$$

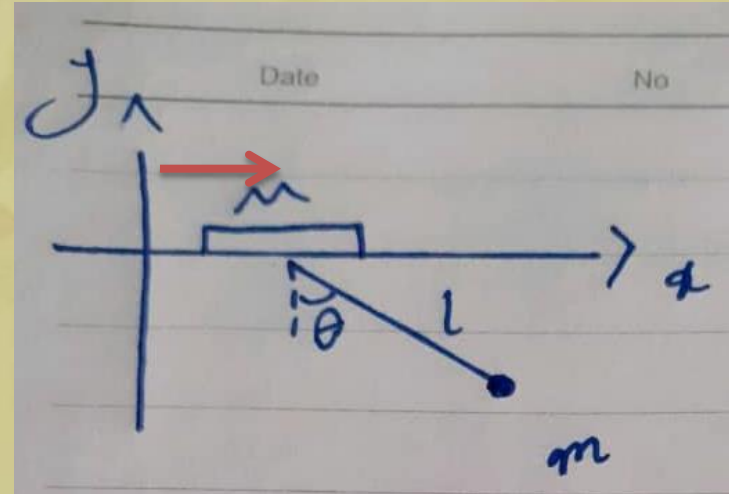
$$\dot{x} = \dot{X} + l \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y} = l \dot{\theta} \sin \theta$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + 2l\dot{X}\dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} M \dot{X}^2$$

$$V = -mgl \cos \theta$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + 2l\dot{X}\dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + mgl \cos \theta$$



$$L = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + 2l\dot{X}\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + mgl \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m(\dot{X} + l\dot{\theta} \cos \theta) + M\dot{X}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \frac{d}{dt} (m\dot{X} + ml\dot{\theta} \cos \theta + M\dot{X})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} p_X = 0$$

$$p_X = \text{ثابت}$$

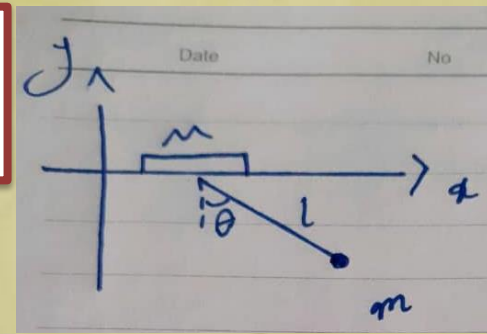
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l\dot{X} \cos \theta + l^2\dot{\theta})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m(-l\dot{X} \dot{\theta} \sin \theta - g \sin \theta)$$

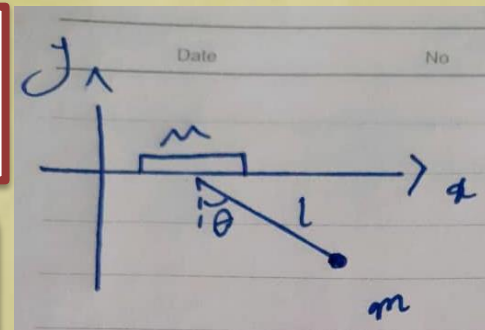
$$\frac{d}{dt} (ml\dot{X} \cos \theta + ml^2\dot{\theta}) + ml\dot{X} \dot{\theta} \sin \theta + mg \sin \theta = 0$$

$$p_X = m\dot{X} + ml\dot{\theta} \cos \theta + M\dot{X}$$

$$\dot{X} = \frac{p_X - ml\dot{\theta} \cos \theta}{M + m}$$



$$L = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + 2l\dot{X}\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + mgl \cos \theta$$



$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = E$$

داشتیم که اگر لاگرانژی وابستگی صریحی به زمان نداشته باشد آنگاه انرژی ثابت حرکت خواهد بود.

$$\dot{X} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} + \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = E$$

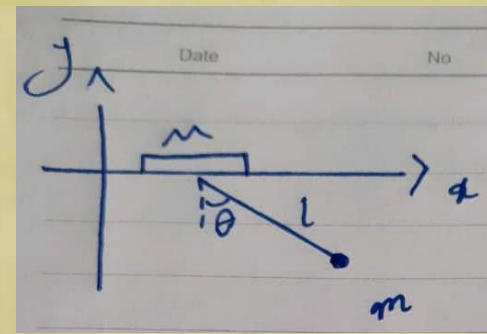
$$\dot{X}(m\dot{X} + ml\dot{\theta} \cos \theta + M\dot{X}) + \dot{\theta}(ml\dot{X} \cos \theta + ml^2\dot{\theta}) - L = E$$

$$\frac{1}{2}(m + M)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{X}\dot{\theta} \cos \theta - mgl \cos \theta = E$$

$$\dot{X} = \frac{p_X - ml\dot{\theta} \cos \theta}{M + m}$$

$$\frac{1}{2}(m + M) \left(\frac{p_X - ml\dot{\theta} \cos \theta}{M + m} \right)^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml \left(\frac{p_X - ml\dot{\theta} \cos \theta}{M + m} \right) \dot{\theta} \cos \theta - mgl \cos \theta = E$$

$$\frac{1}{2} \frac{p_X^2}{M + m} + \frac{1}{2} \frac{m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta}{M + m} - \frac{p_X ml \dot{\theta} \cos \theta}{M + m} + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + ml \left(\frac{p_X - ml \dot{\theta} \cos \theta}{M + m} \right) \dot{\theta} \cos \theta - mgl \cos \theta = E$$



$$\frac{1}{2} \frac{p_x^2}{M+m} + \frac{1}{2} \frac{m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta}{M+m} - \frac{p_x m l \dot{\theta} \cos \theta}{M+m} + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \left(\frac{p_x - m l \dot{\theta} \cos \theta}{M+m} \right) \dot{\theta} \cos \theta - m g l \cos \theta = E$$

$$\frac{1}{2} \frac{p_x^2}{M+m} - \frac{1}{2} \frac{m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta}{M+m} + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta = E$$

$$'V' = \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{M+m} - m g l \cos \theta = E$$

$$'V' - \frac{1}{2} \frac{m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta}{M+m} + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 = E$$

تمرین: نمودار پتانسیل مؤثر بر حسب
تتا را رسم نمایید.