معادلات حرکت لاگرانژ در مختصات کروی

(r, θ, φ) ، $(\dot r, \dot\theta, \dot\phi)$

$$v = \dot r\, e_r + r\dot\theta\, e_\theta + r\dot\phi \sin\theta\, e_\varphi$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\dot\phi^2 \sin^2\theta\right)$$

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} + F_z \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$Q_r = F_x \sin\theta\cos\varphi + F_y \sin\theta\sin\varphi + F_z\cos\theta$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$= rF_x\cos\theta\cos\varphi + rF_y\cos\theta\sin\varphi - rF_z\sin\theta$$

$$Q_\varphi = -rF_x\sin\theta\sin\varphi + rF_y\sin\theta\cos\varphi$$

$$Q_k = \frac{dP_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k}$$

آذین مر

$$Q_r = \frac{dP_r}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{dP_r}{dt} + 2r\dot\theta^2 + 2r\dot\phi^2\sin^2\theta$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)$$

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \cancel{2}\, m \dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} p_r = \cancel{2}\, m \ddot{r}$$

$$Q_r = \cancel{2}\, m\ddot{r} + \cancel{2}\, m r \dot{\theta}^2 + \cancel{2}\, r \dot{\phi} \sin\theta \cdot$$

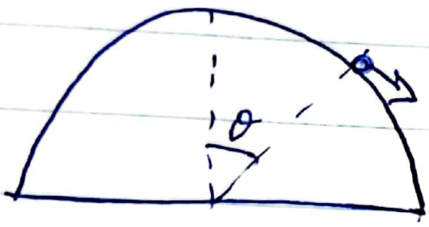
$$Q_\varphi = \frac{dp_\varphi}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

$$Q_\varphi = \frac{dp_\varphi}{dt} - 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}\right)$$

$$Q_\varphi = 2 r \dot{r} \sin^2\theta\, \dot{\phi} + 2 r^2 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta\, \dot{\phi} + r^2 \sin^2\theta\, \ddot{\phi}$$

$$Q_\theta = \frac{dp_\theta}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{dp_\theta}{dt} -$$

آذین مهر



معادلات حرکت را بیابید

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) \cancel{- mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = } \Rightarrow \cancel{m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2}$$

$$\boxed{m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\boxed{mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{r}r\dot{\theta} = mgr\sin\theta}$$

$$\boxed{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = g\sin\theta}$$

اگر یک قید داشته باشیم

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = F_N \qquad r = R$$

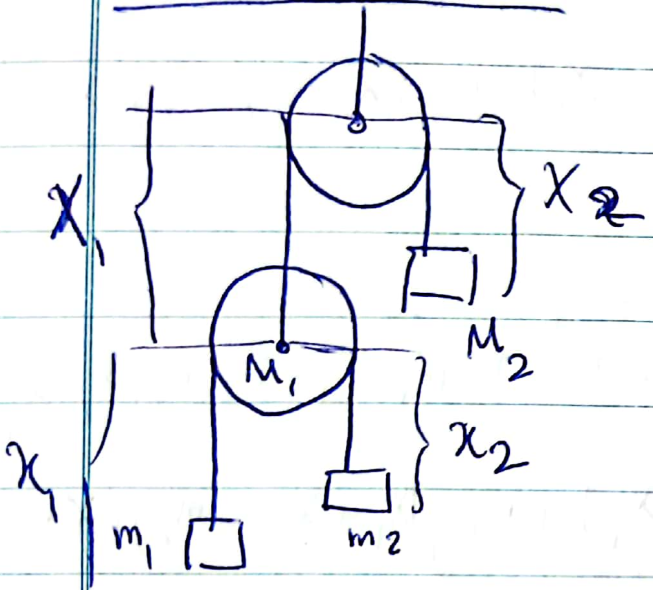
$$F_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 \Rightarrow F_N = 0$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{g/R \cos\theta}$$

آذرمهر

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = \sqrt{g/r}\, t$$

معادل حرکت را بیابید.



$$X_1 + X_2 = a \Rightarrow \dot{X}_1 = -\dot{X}_2$$

$$x_1 + x_2 = b \qquad \dot{x}_2 = -\dot{x}_1$$

$$V_{M_1} = \dot{X}_1$$

$$V_{M_2} = \dot{X}_2 = -\dot{X}_1$$

$$V_{m_1} = \dot{X}_1 + \dot{x}_1$$

$$V_{m_2} = \dot{X}_1 + \dot{x}_2 = \dot{X}_1 - \dot{x}_1$$

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2$$

آذین‌مهر

انرژی پتانسیل نسبت به قرقره بالا

$$V = -M_1 g X_1 - M_2 g X_2 - m_1 g (X_1 + x_1) - m_2 g (X_1 + x_2)$$

$$V = -M_1 g X_1 - M_2 g (a - X_1) - m_1 g (X_1 + x_1) - m_2 g (X_1 + b - x_1)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} M_1 \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2$$
$$+ M_1 g X_1 + M_2 g (a - X_1) + m_1 g (X_1 + x_1) + m_2 g (X_1 + b - x_1)$$

$$L = \frac{1}{2} (M_1 + M_2 + m_1 + m_2) \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + (m_1 - m_2) \dot{X}_1 \dot{x}_1$$
$$+ (M_1 - M_2 + m_1 + m_2) g X_1 + (m_1 - m_2) g x_1 + M_2 g a + m_2 g b$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial X_1} = 0 \ , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[(M_1 + M_2 + m_1 + m_2) \dot{X}_1 + (m_1 - m_2) \dot{x}_1\right] - (M_1 - M_2 + m_1 + m_2) g = 0$$

$$\boxed{(M_1 + M_2 + m_1 + m_2) \ddot{X}_1 + (m_1 - m_2) \ddot{x}_1 = (M_1 - M_2 + m_1 + m_2) g}$$

(1)

آذین مهر

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((m_1+m_2)\dot{x}_1+(m_1-m_2)\dot{X}_1\right)-(m_1-m_2)g=0$$

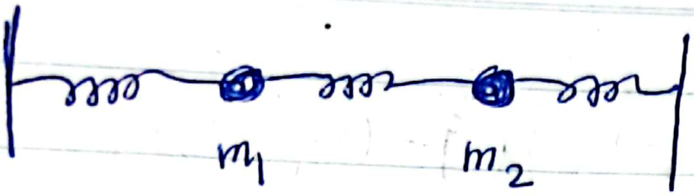
$$\boxed{(m_1+m_2)\ddot{x}_1+(m_1-m_2)\ddot{X}=(m_1-m_2)g \quad (2)}$$

$$\Rightarrow 1,٢ \Rightarrow \ddot{X}_1=\frac{(M_1-M_2)(m_1+m_2)+4m_1m_2}{(M_1+M_2)(m_1+m_2)+4m_1m_2}\,g$$

$$\ddot{x}_1=\frac{2M_2(m_1-m_2)}{(M_1+M_2)(m_1+m_2)+4m_1m_2}\,g$$

$$\Rightarrow \ddot{X}_2=-\ddot{X}_1$$

معادلات حرکت سیستم
زیر را بنویسید



$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2^2) + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$- \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 + k x_1 + k(x_2 - x_1) = 0$$

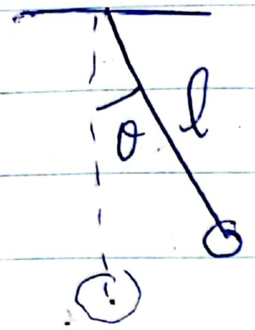
$$m_1 \ddot{x}_1 + k(x_2 - 2x_1) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow m_2 \ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k(x_2 - 2x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k(x_1 - 2x_2) \end{aligned}}$$

آذرمهر

معادلات حرکت آونگ ساده و آونگ فنردار

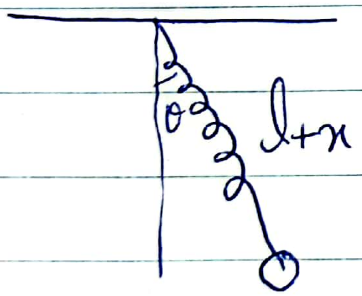


$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$L = T - V \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m l^2 \dot{\theta}\right) - mgl\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta}$$



$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$V = -mg(l+x)\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\theta}^2\right) + mg(l+x)\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + m(l+x)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + kx = 0$$

$$m\ddot{x} = -m(l+x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx$$

آذین مهر

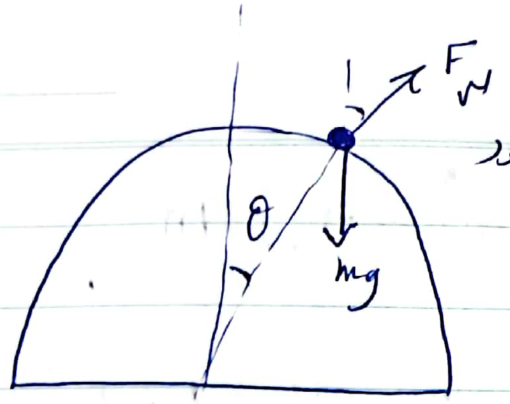
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}(l+x)^2\dot{\theta}^2\right) + mg(l+x)\sin\theta =$$

$\Rightarrow$

$$m(l+x)^2\ddot{\theta} + 2m(l+x)\dot{x}\dot{\theta} = -mg(l+x)\sin\theta$$

$$\boxed{m(l+x)\ddot{\theta} + 2m\dot{x}\dot{\theta} = -mg\sin\theta}$$

با استفاده از معادلات لاگرانژ نشان دهید
در چه زاویه ای گلوله از روی نیم کره جدا می شود



$x = r\sin\theta \quad , \; y = r\cos\theta$

$F_x = F_N \sin\theta$

$F_y = F_N \cos\theta - mg$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_r = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 \\ Q_\theta = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$Q_r = \sum F_i \frac{\partial x_i}{\partial r} = F_x \sin\theta + F_y \cos\theta$$

$$\Rightarrow Q_r = F_N \sin^2\theta + F_N \cos^2\theta - mg\cos\theta = F_N - mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_N - mg\cos\theta$$

$$r = R, \dot{r} = \ddot{r} = 0 \Rightarrow \boxed{F_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2}$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = F_N \sin\theta(r\cos\theta) + F_N\cos\theta(-r\sin\theta) + mgr\sin\theta$$

آدینه

$$\Rightarrow Q_\theta = -mgr\cos\theta \Rightarrow 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = mg\sin\theta$$

$r = R$, $\dot{r}$, $\ddot{r} = 0 \Rightarrow \boxed{mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta}$

θ if $F_N = 0 \Rightarrow mg\cos\theta = mR\dot{\theta}^2$

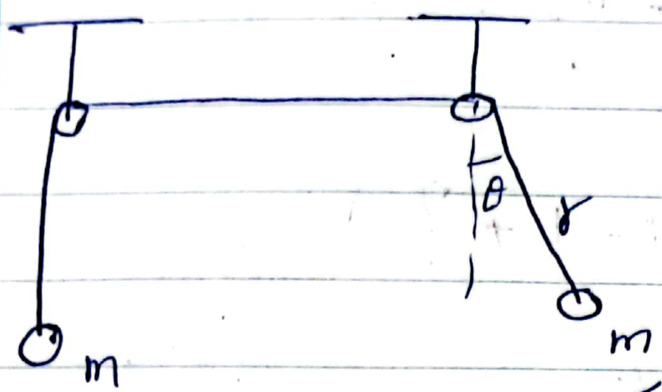
$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{R}\sin\theta}} \Rightarrow \ddot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{R\sin\theta}}\ \frac{\cos\theta}{\cancel{}}$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\cos\theta = \sqrt{\frac{g}{R\sin\theta}}\ \frac{\cos\theta}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{4R}{g}} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{4R}{g}$

در این زاویه جسم از سطح جدا می‌شود.

دو جرم یک طناب:



جرم سمت راست آزادانه نوسان کند و جرم سمت چپ فقط در راستای قائم نوسان کند معادلات حرکت برای r و θ را بیابید

اگر دامنه نوسانات کوچک باشد شتاب میانگین اولیه جرم سمت چپ چقدر است؟ و در جرم راست چی؟

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr + mgr\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow 2\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - g(1-\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -gr\sin\theta$$

$$\boxed{2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = -gr\sin\theta}$$

$$t = 0 \Rightarrow \ddot{r}(0) = 0 \Rightarrow \dot{r} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\sin\theta \xrightarrow{\theta \ll 6^\circ} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta(t) = A\cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

آذین مهر

$\theta << 6 \Rightarrow \cos\theta = 1 + \frac{\theta^2}{2}$

$\Rightarrow 2\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - g(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2})$

$2\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}g\theta^2$

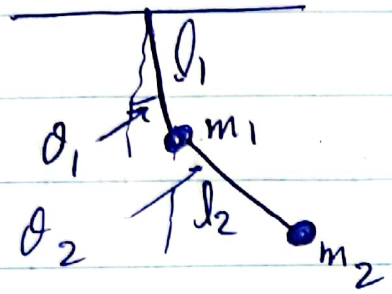
$2\ddot{r} = A^2 g\left(\sin^2(\omega t + \phi) - \frac{1}{2}\cos^2(\omega t + \phi)\right)$

$\ddot{r}_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{r}\, dt = A^2 g\left[\underbrace{\int \sin^2(\omega t + \phi)\, dt}_{1/2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \cos^2(\omega t + \phi)}_{1/2}\right.$

$$\boxed{\ddot{r}_{avg} = \frac{A^2 g}{8}}$$

سوال ~~[illegible]~~ : آونگ دوگانه

معادلات حرکت آونگ دوگانه زیر را با استفاده از روش لاگرانژ بیابید.



مختصات تعمیم یافته θ_1 و θ_2

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1 \quad , \quad y_1 = -l_1 \cos\theta_1$$

$$x_2 = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \quad , \quad y_2 = -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2$$

$$v_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}^2 \quad , \quad v_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right)$$
$$+ m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$+ (m_1 + m_2) g l_2 \sin\theta_1 = 0$$

آذین‌مهر

$$\Rightarrow \boxed{(m_1+m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1+m_2)g\,\theta_1 = 0}$$

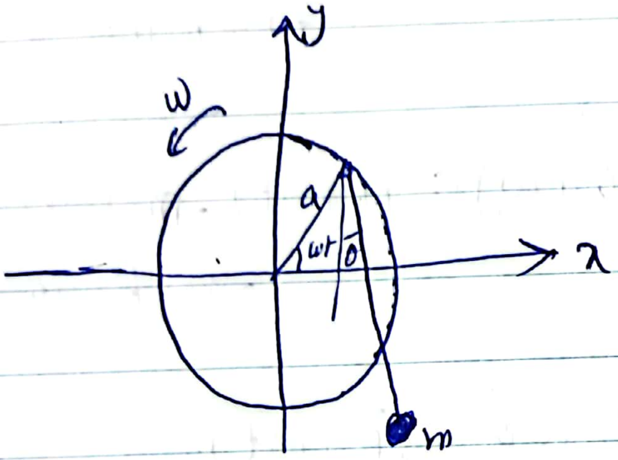
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} \cdots$$

$$\Rightarrow \quad m_2 l_2\ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$+ m_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\ddot{\theta}_1 + g\,\theta_2 = 0}$$

نقطه آویز آونگ ساده‌ای به طول b به حلقه بدون جرمی متصل است. حلقه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور تقارن که عمود بر صفحه است دوران می‌کند. حرکت مهره را بررسی کنید



$$x = a\cos\omega t + b\sin\theta \Rightarrow \dot{x} = -a\omega\sin\omega t + b\dot{\theta}\cos\theta$$

$$y = a\sin\omega t - b\cos\theta \qquad \dot{y} = a\omega\cos\omega t + b\dot{\theta}\sin\theta$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{و} \quad V = mgy$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\Big(a^2\omega^2\sin^2\omega t + b^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta - 2ab\omega\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t$$
$$+ a^2\omega^2\cos^2\omega^2 + b^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2ab\omega\dot{\theta}\sin\theta\cos\omega t\Big)$$
$$- mg(a\sin\omega t - b\cos\theta)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left[a^2\omega^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2ab\omega\dot{\theta}\sin(\theta + \omega t)\right]$$
$$- mga\sin\omega t + mgb\cos\theta$$

آذین‌مهر

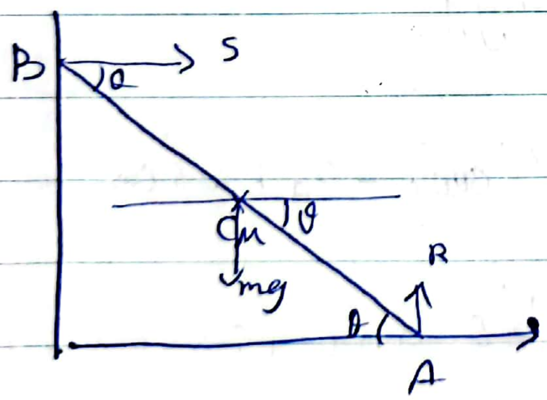
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(2b^2\dot\theta + 2ab\omega\sin(\theta+\omega t)\right) - mab\omega\dot\theta\cos(\theta+\omega t) - mgb\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow mb^2\ddot\theta + mab\omega(\dot\theta+\omega)\cos(\theta+\omega t) - mab\omega\dot\theta\cos(\theta+\omega t) - mgb\sin\theta = 0$$

$$\ddot\theta + \frac{g}{b}\sin\theta + \frac{a}{b}\omega\dot\theta\cos(\theta+\omega t) = 0$$

نردبانی به طول $2a$ و جرم m مطابق شکل از یک طرف به دیوار و از طرف دیگر به زمین تکیه دارد اگر سطح صاف باشد معادله تغییرات θ چیست



$$x = a\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \dot x = -a\dot\theta\sin\theta$$
$$y = -a\sin\theta \qquad\qquad \dot y = -a\dot\theta\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(a^2\dot\theta^2\sin^2\theta + a^2\dot\theta^2\cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(ma^2\dot\theta^2 + I_{cm}\dot\theta^2\right), \quad V = -mga\sin\theta$$

آذرمهر

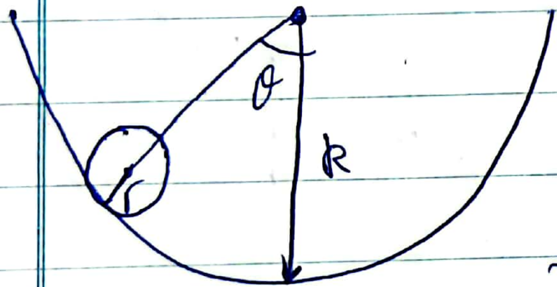
$$L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2 + mga\sin\theta$$

$$L = \left(\frac{ma^2 + I_{cm}}{2}\right) \dot{\theta}^2 + mga\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow (ma^2 + I_{cm})\ddot{\theta} - mga\cos\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mga}{ma^2 + I_{cm}} \cos\theta$$

کره کوچکی به شعاع r داخل کره بزرگتری به شعاع R دارای نوسانات کوچک حول نقطه تعادلش است زمان تناوب و لگ کره کوچک را بدست آورید



اگر کره کوچک به اندازه ϕ بچرخد مرکز آن به اندازه $(R-r)\theta$ حرکت می‌کند با توجه به غلتش کامل می‌توان نوشت.

$$r\phi = -(R-r)\theta$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\phi}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m r^2\right)\dot{\phi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{5} m r^2 \dot{\phi}^2 = \frac{7}{10} m r^2 \dot{\phi}^2$$

آنگاه $T = \frac{7}{10} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 , \; V = -mg(R-r)\cos\theta$

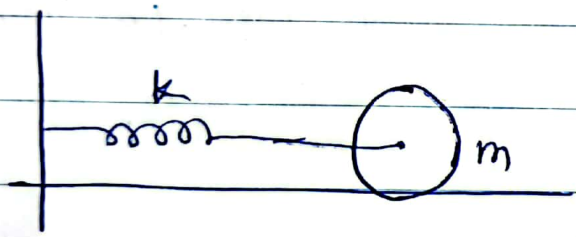
$$\mathcal{L} = T - V = \frac{7}{10} m (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + mg(R-r)\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{7}{5} m (R-r)^2 \ddot{\theta} + mg(R-r)\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \simeq \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-5g}{7(R-r)}\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{5}{7}\frac{g}{R-r}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

قرص توپری به جرم m توسط فنری با ثابت k به دیوار متصل است
این قرص بر روی یک سطح افقی می غلتد دوره تناوب نوسانات
کوچک را بدست آورید!



$$I_{cm} = \frac{1}{2} m r^2$$

$$\omega = \frac{\dot{x}}{r}$$

$$T = \frac{1}{2} m V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \qquad \mathcal{L} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

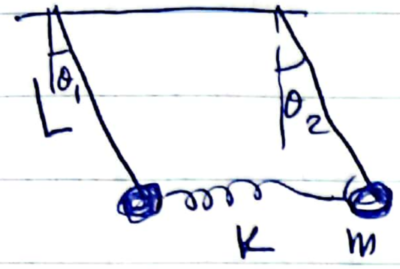
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} - kx = 0$$

$$\ddot{x} - \frac{2}{3}\frac{k}{m} x = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}}$$

آدینه

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

دو آونگ مشابه به طول L و جرم m توسط فنری با جرم ناچیز و ثابت فنر k به هم متصل اند. حرکت را بررسی کنید برای زوایای کوچک



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

$$x_1 = L \sin\theta_1 \simeq L\theta_1$$

$$x_2 = L \sin\theta_2 \simeq L\theta_2$$

$$\dot{x}_1 = \cdot$$

$$V = -mgl\cos\theta_1 - mgl\cos\theta_2$$

$$= -mgL\left[\left(1-\frac{\theta_1^2}{2}\right)+\left(1-\frac{\theta_2^2}{2}\right)\right]$$

$$= -2mgL + \frac{mg}{2L}\left(L^2\theta_1^2 + L^2\theta_2^2\right)$$

$$V = -2mgL + \frac{mg}{2L}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

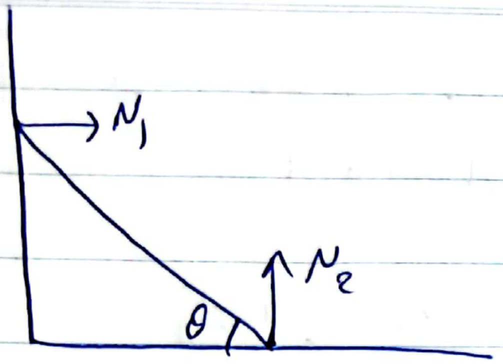
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + 2mgL - \frac{mg}{2L}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_1 - \frac{mg}{L}x_1 - k(x_1 - x_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_2 - \frac{mg}{L}x_2 + k(x_1 - x_2) = 0$$

آذین مهر

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 - \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\right)x_1 + \frac{k}{m}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\right)x_2 + \frac{k}{m}x_1 = 0 \end{cases}$$



نردبانی به دیوار صاف متکی است، با فرض اینکه نردبان تماس خود را با دیوار حفظ کند معادلات حرکت را به دست آورید.

اگر زاویه اولیه نردبان با زمین θ باشد در چه زاویه ای از دیوار جدا می شود

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2$$

$$x = \frac{l}{2}\cos\theta \quad , \quad y = \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\dot{x} = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta \quad , \quad \dot{y} = \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\ddot{x} = -\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \quad , \quad \ddot{y} = \frac{l}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 \quad , \quad V = mgy = \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgl\cos\theta = 0$$

آذرمهر

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\cos\theta = 0 \quad (1)$$

با ضرب طرفین در $\dot{\theta}$ داریم

$$\dot{\theta}\ddot{\theta}+\frac{3g}{2l}\dot{\theta}\cos\theta=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+\frac{3g}{2l}\sin\theta\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2+\frac{3g}{2l}\sin\theta=C$$

در لحظه $t=0$ ، $\theta=\alpha$ و $\dot{\theta}=0$

$$\Rightarrow \frac{3g}{2l}\sin\alpha=C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2+\frac{3g}{2l}\sin\theta=\frac{3g}{2l}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2+\frac{3g}{l}(\sin\theta-\sin\alpha)=0 \quad (2)$$

در لحظه قطع تماس $N_1=0$ یعنی شتاب در راستای x صفر خواهد شد

$$\ddot{x}=0 \Rightarrow -\frac{l}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta)=0$$

$$\Rightarrow \cancel{\ddot{\theta}+\dot{\theta}^2\cot\theta} \Rightarrow \ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta=0 \quad (3)$$

$$\theta-\frac{3g}{2l}\cos\theta\sin\theta-\frac{3g}{l}(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta=0 \quad \text{از ۲}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\sin\theta=\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{2}{3}\sin\alpha \Rightarrow \theta=\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right)$$

آذین مهر

دستگاه مختصات دکارتی با محورهای x و y و z با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω حول محور z می‌چرخد. ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر پتانسیل $V(x,y,z)$ حرکت می‌کند

الف) معادلات حرکت لاگرانژ را به دست آورید

ب) نشان دهید این معادلات را می‌توان معادلات حرکت ذره‌ای دانست که در دستگاه مختصات ثابتی تحت تاثیر نیروی $-\nabla V$ و نیروی ناشی از یک پتانسیل وابسته به سرعت U قرار دارد.

از این جا انرژی پتانسیل وابسته به سرعت را برای نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس به دست آورید

ج: U را در مختصات کروی r و θ و φ، $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ و $\dot{\varphi}$ بنویسید

سرعت در دستگاه مختصات متحرک به صورت زیر است:

$$\vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \text{و} \qquad \vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

$$v' = (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) + \omega\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$
$$= (\dot{x} - \omega y)\hat{i} + (\dot{y} + \omega x)\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$\cancel{T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}$

آذین مهر

$$T=\frac{1}{2}m\,v'\cdot v'=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right]$$

$$T=\frac{1}{2}m\left[(\dot{x}-\omega y)^2+(\dot{y}+\omega x)^2+\dot{z}^2\right]$$

$$T=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+2\omega(x\dot{y}-\dot{x}y)+\omega^2(x^2+y^2)\right]$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+2\omega(x\dot{y}-\dot{x}y)+\omega^2(x^2+y^2)\right]-V(x,y,z)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0\Rightarrow m\ddot{x}-m\omega\dot{y}-m\omega\dot{y}-m\omega^2x+\frac{\partial V}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow\boxed{m\ddot{x}-2m\omega\dot{y}-m\omega^2x+\frac{\partial V}{\partial x}=0}\quad (1)$$

(۲)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}=0\Rightarrow\boxed{m\ddot{y}+2m\omega\dot{x}-m\omega^2y+\frac{\partial V}{\partial y}=0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}=0\Rightarrow\boxed{m\ddot{z}+\frac{\partial V}{\partial z}=0}\quad (۳)$$

حل ب:

معادلات ۱ تا ۳ را با هم جمع می‌کنیم

$$m(\ddot{x}i+\ddot{y}j+\ddot{z}k)+\left(\frac{\partial V}{\partial x}i+\frac{\partial V}{\partial y}j+\frac{\partial V}{\partial z}k\right)$$

$$-(2m\omega\dot{y}\hat{i}-2m\omega\dot{x}\hat{j})-(m\omega^2x\,i+m\omega^2y\,j)=0$$

آخر $\Rightarrow m\ddot{\vec{r}}+\nabla V-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=0$

در این رابطه (رابطه قبل) دو جمله اول مربوط به حرکت جسم تحت پتانسیل V است و دو جمله بعدی مربوط به حرکت تحت پتانسیل وابسته به سرعت U است

$$\Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} = -2m\omega\dot{y} - m\omega^2 x$$

$$U = 2m\omega\dot{y}x + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + u_1(y)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = 2m\omega\dot{x} - m\omega y \Rightarrow U = -2m\omega x\dot{y} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + u_2(x)$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + 2m\omega(\dot{y}x - \dot{x}y)$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + r\sin\theta\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\sin^2\theta + 2m\omega r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\sin^2\theta(1 + 4\dot{\varphi})$$

آذین

هامیلتونی دو جسم که تحت تاثیر گرانش همدیگر قرار دارند و هر دو تحت تاثیر شتاب گرانش زمین قرار دارند را بدست آورید (نشان دهید دو مسأله مجزا (هر یک با یک درجه آزادی) باقی می‌مانند و می‌توان آن را (از نظر اصولی) با استفاده از روش انرژی حل کرد و تابع انرژی پتانسیل موثر کدام چیست؟

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2\theta)$$
$$+ G\frac{m_1 m_2}{r^2} + (m_1+m_2) g z$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \sum p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \dot{x} p_x - \dot{y} p_y + \dot{z} p_z + \dot{r} p_r + \dot{\theta} p_\theta + \dot{\varphi} p_\varphi - L$$

$$\mathcal{H} = \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} + \dot{r}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - L$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2\theta)$$
$$- G\frac{m_1 m_2}{r} - (m_1+m_2) g$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = (m_1+m_2)\dot{y}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = (m_1+m_2)\dot{z}$$

آذین مهر

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{r}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} r^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\varphi} r^2 \sin^2\theta$$

چون لاگرانژی تابع صریحی از x و y و φ نیست پس

P_x و P_y و P_φ ثابت حرکت هستند

$$\Rightarrow P_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{P_x}{m_1+m_2}$$

$$P_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = (m_1+m_2)\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{P_y}{m_1+m_2}$$

$$P_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\varphi}\, r^2 \sin^2\theta \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{P_\varphi}{r^2\sin^2\theta}$$

پس x و y و φ قابل اغماض هستند

$$\Rightarrow P_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = (m_1+m_2)\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{P_z}{m_1+m_2}$$

$$P_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}P_r$$

$$P_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{P_\theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left[\left(\frac{P_x}{m_1+m_2}\right)^2 + \left(\frac{P_y}{m_1+m_2}\right)^2 + \left(\frac{P_z}{m_1+m_2}\right)^2\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}P_r\right)^2 + r^2\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{P_\theta}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\frac{P_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right)^2 r^2\sin^2\theta\right]$$

$$-\frac{G m_1 m_2}{r} - (m_1+m_2) g z$$

آذرمهر

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{1}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) - G\frac{m_1 m_2}{r} - (m_1+m_2) g z$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \quad , \quad m_1 + m_2 = M$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} - (m_1+m_2) g z + \frac{P_r^2}{2\mu} + \frac{P_\theta^2}{2\mu r^2} + \frac{P_\varphi^2}{2\mu r^2 \sin^2\theta} - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\mathcal{H}_z = \frac{1}{2M}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) - Mgz$$

$$\mathcal{H}_r = \frac{P_r}{2\mu} + \frac{P_\theta^2}{2\mu r^2} + \frac{P_\varphi^2}{2\mu r^2 \sin^2\theta} - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

حاصل دو هامیلتونی مستقل H_z و H_r است

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \Rightarrow \dot{P}_r = + \frac{P_\theta^2}{\mu r^3} + \frac{P_\varphi^2}{\mu r^3 \sin^2\theta} - \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$P_r = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{r} = \mu \dot{r} \Rightarrow \dot{P}_r = \mu \ddot{r}$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{r} = \frac{P_\theta^2}{\mu r^3} + \frac{P_\varphi^2}{\mu r^3 \sin^2\theta} - \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = \frac{P_\varphi^2 \cos\theta}{\mu r^2 \sin^3\theta}$$

$$P_\theta = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \dot{\theta} \Rightarrow P_\theta = \mu r^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{P}_\theta = \mu r^2 \ddot{\theta} + 2\mu r \dot{r} \dot{\theta} = \mu (2 r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta})$$

$$\Rightarrow 2\mu r \dot{r} \dot{\theta} + \mu r^2 \ddot{\theta} = \frac{P_\varphi \cos\theta}{\mu r^2 \sin^3\theta}$$

$$\dot{P}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \Rightarrow \dot{P}_z = Mg$$

$$P_z = M\dot{z} \Rightarrow M\ddot{z} = Mg \Rightarrow \ddot{z} = g$$