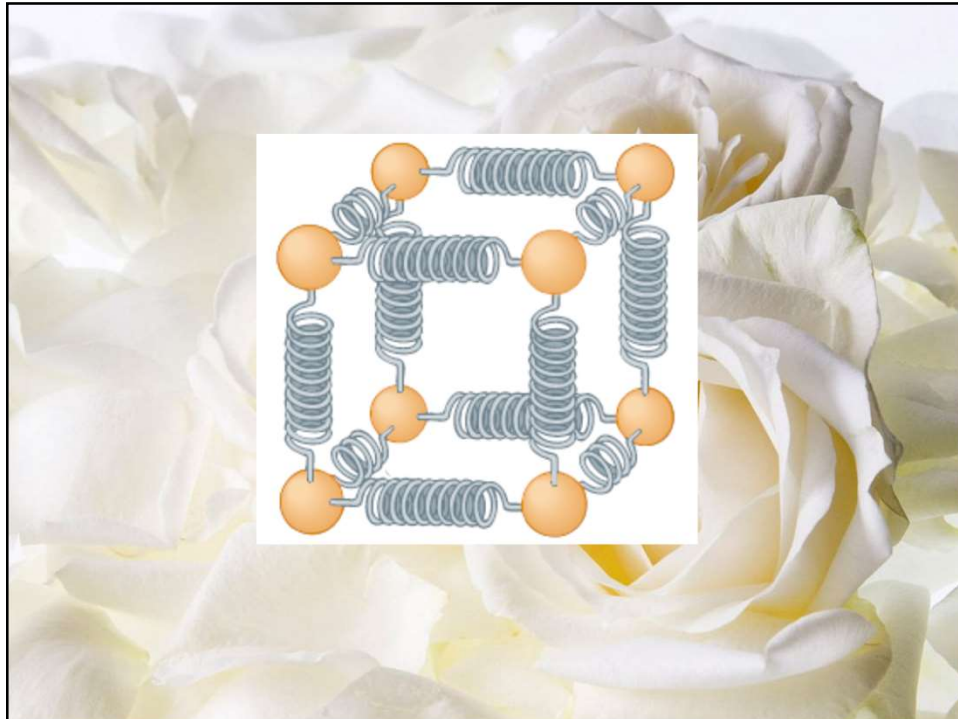
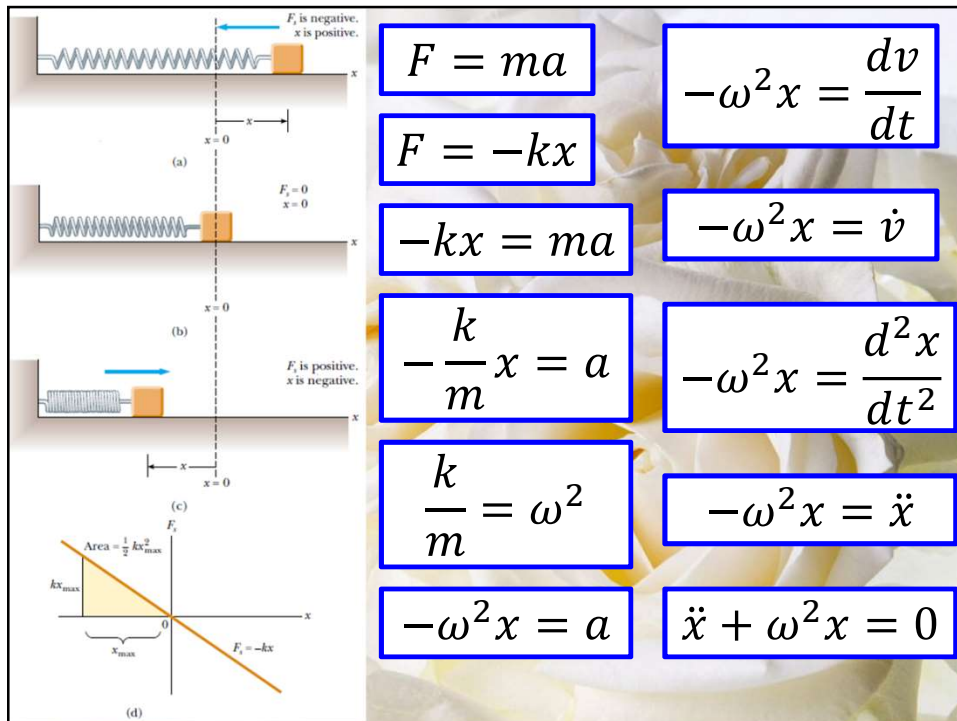




## قضیه کار انرژی

$$F = f(x)$$

در اینجا فرض می کنیم که  $F$  فقط تابع صریحی از مکان باشد:

$$m \frac{dv}{dt} = F(x)$$

$$mv \frac{dv}{dt} = F(x)v$$

$$\int_{t_0}^t mv \frac{dv}{dt} dt = \int_{t_0}^t F(x)v dt$$

$$\int_{v_0}^v mv dv = \int_{t_0}^t F(x) \frac{dx}{dt} dt$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

انرژی پتانسیل را به صورت کار انجام شده توسط نیرو هنگامی که ذره از نقطه  $x$  به نقطه  $x_s$  می رود تعریف می کنیم

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(x) dx = - \int_{x_s}^x F(x) dx \quad F = - \frac{dV(x)}{dx}$$

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = \int_{x_0}^{x_s} F(x) dx + \int_{x_s}^x F(x) dx$$

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = V(x_0) - V(x)$$

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = V(x_0) - V(x)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0)$$

کمیت طرف راست فقط به شرایط اولیه بستگی دارد، پس

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \text{cte.} = E$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - V(x)$$

$$v^2 = \frac{2}{m}(E - V(x)) \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2/m} \sqrt{E - V(x)}$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = dt$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = t - t_0$$



$$F = -mg$$

مثال: معادله مستقل از زمان را در حرکت سقوط آزاد با استفاده از قضیه کار انرژی به دست آورید

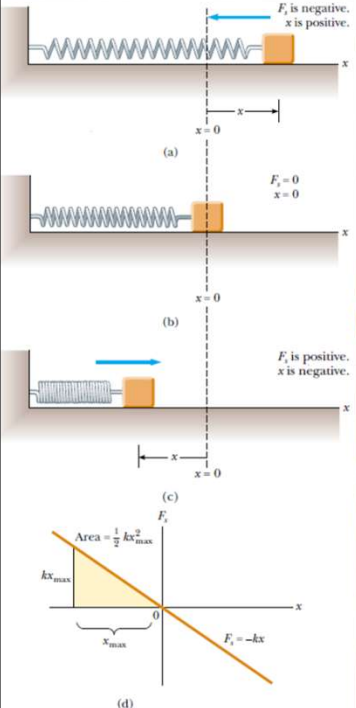
$$\int_{x_0}^x F(x) dx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\int_{x_0}^x -mg dx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$-mg(x - x_0) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$-2g(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

که همان معادله مستقل از زمان است



(a)  $F_s$  is negative,  $x$  is positive.

(b)  $F_s = 0$ ,  $x = 0$ .

(c)  $F_s$  is positive,  $x$  is negative.

(d)  $F_s = -kx$ . Area =  $\frac{1}{2}kx_{\max}^2$ .

$$F = -kx$$

$$V(x) = - \int_{x_s}^x F(x) dx$$

$$x_s = 0$$

$$V(x) = - \int_0^x -kx dx$$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2}} = t$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2} \frac{k}{E} x^2}} = t$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta} = t$$

$$\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x\right)^2}} = t$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = t$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x = \sin \theta$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} x_0 = \sin \theta_0$$

$$\sqrt{\frac{2E}{k}} x = \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$x = A \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$\sqrt{k/m} = \omega$$

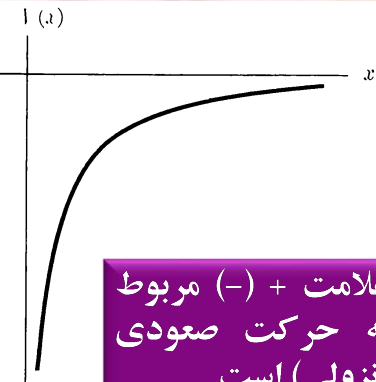
$$\theta = \omega t + \theta_0$$

$$\sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) = \omega t + \theta_0$$

$$dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta d\theta$$

$$\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = t$$

اجسام افتان (از ارتفاع زیاد) به عنوان مثالی از نیروی وابسته به مکان



$$F = -G \frac{mM}{x^2}$$

$$V(x) = - \int_{-\infty}^x F dx = -G \frac{mM}{x}$$

علامت + (-) مربوط به حرکت صعودی (نزولی) است

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2/m} \sqrt{E + G \frac{mM}{x}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E + G \frac{mM}{x}}} = t$$

$$\pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{G \frac{mM}{x} \left( \frac{Ex}{GmM} + 1 \right)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$\pm \frac{GmM}{\sqrt{(-E)^3}} \int_{\theta_0}^{\theta} 2 \cos^2 \theta d\theta = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\frac{Ex}{GmM} = -\cos^2 \theta$$

$$\pm \frac{GmM}{\sqrt{(-E)^3}} \int_0^{\theta} (\cos 2\theta + 1) d\theta = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$dx = \frac{GmM}{E} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\pm \frac{GmM}{\sqrt{(-E)^3}} \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right) = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

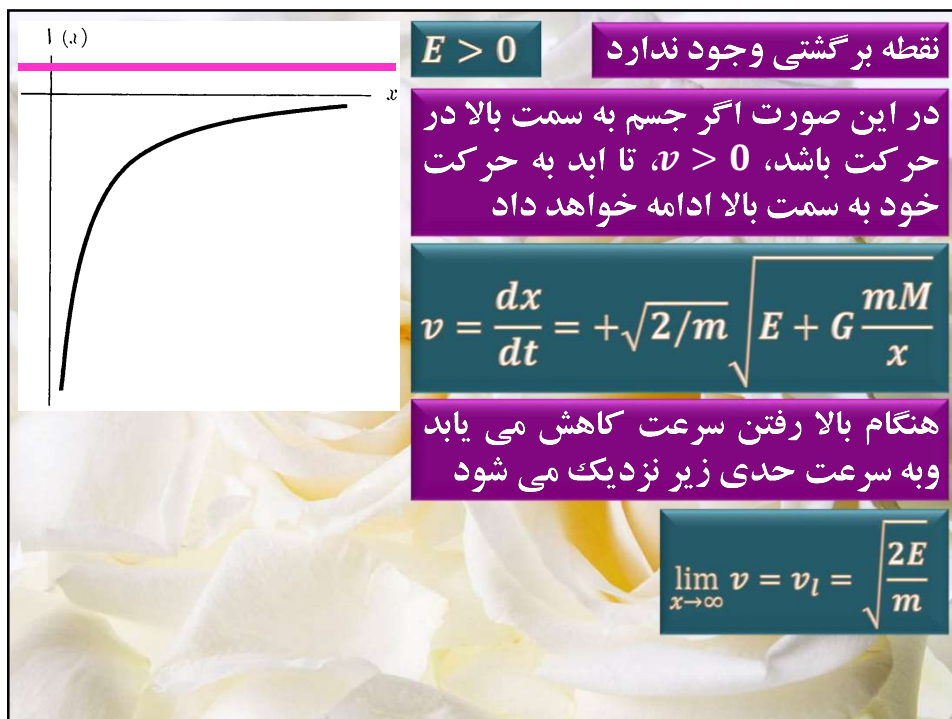
$$\pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\frac{GmM}{E} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{-\frac{E}{\cos^2 \theta} (-\cos^2 \theta + 1)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

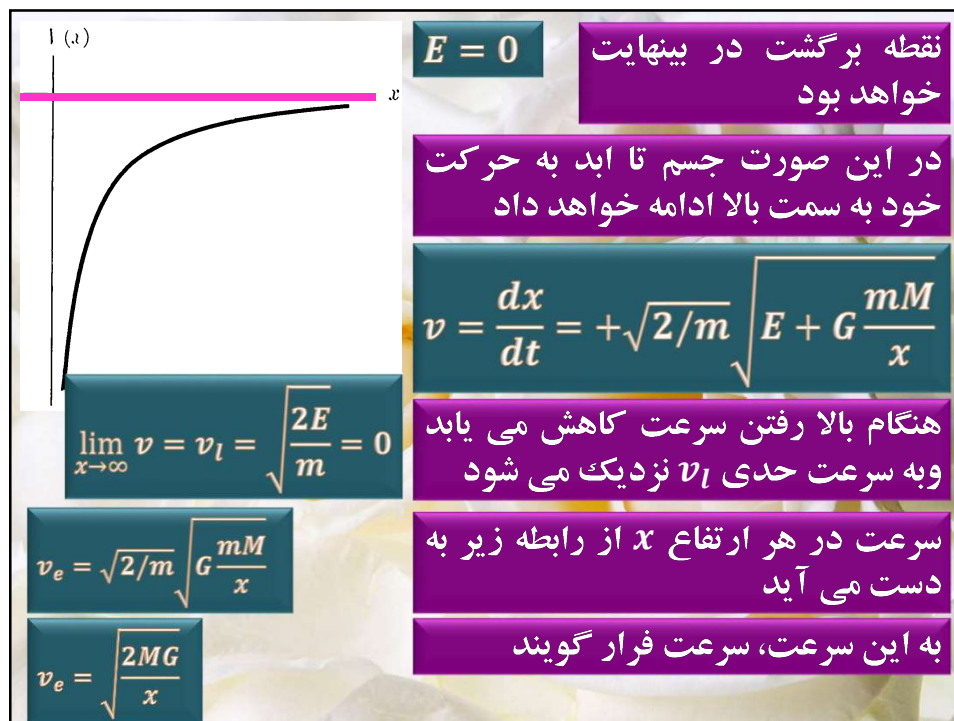
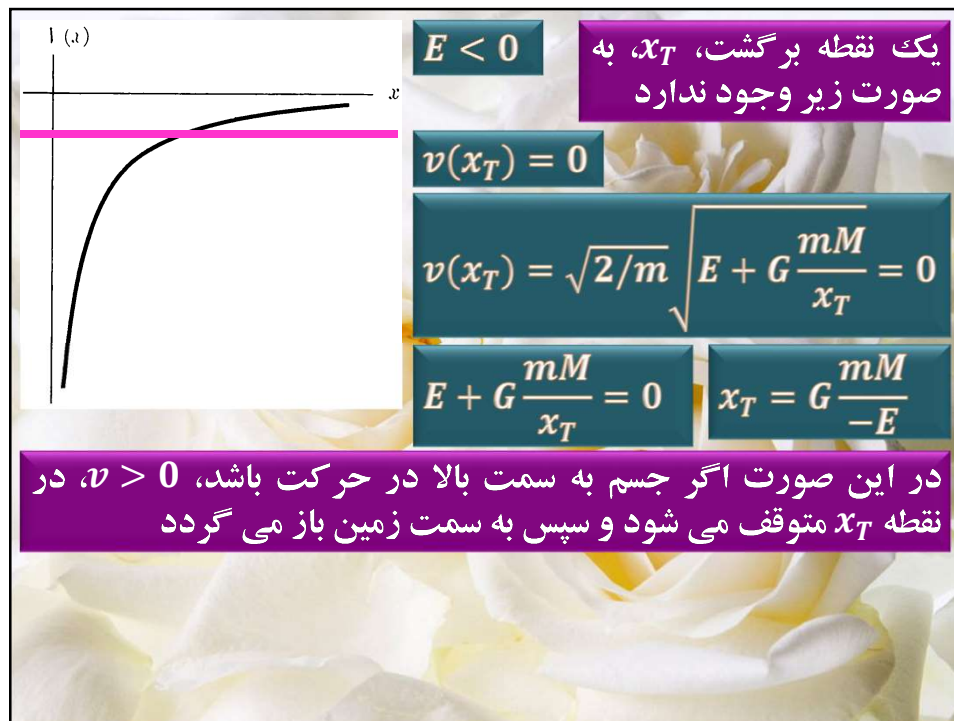
$$\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta = \sqrt{\frac{2(-E)^3}{m^2 M^2 G^2}} t$$

$$x = -\frac{GmM}{E} \cos^2 \theta$$

$$\pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\frac{GmM}{E} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{-E} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

اگر  $\theta$  بین دو معادله فوق حذف می شود، به صورت تابعی از زمان به دست می آید، ولی این کار به صورت تحلیلی امکان پذیر نیست، اما می توان مساله را به طور عددی حل کرد







سرعت فرار در سطح زمین را به دست آورید

$$v_e = \sqrt{\frac{2M_e G}{R_e}}$$

$$g = G \frac{M_e}{R_e^2}$$

$$v_e = \sqrt{2gR_e}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{R_e}^r -G \frac{mM_e}{r^2} dr$$

توضیح:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = G \frac{mM_e}{r} \Big|_{R_e}^r = GmM_e \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_e} \right)$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = GmM_e \frac{-1}{R_e}$$

$$\frac{1}{2}v_e^2 = GM_e \frac{1}{R_e}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2M_e G}{R_e}} = \sqrt{2gR_e}$$

که با نتیجه قبل  
در توافق است