

# اندازه حرکت خطی و برخورد

## قضیه اندازه حرکت خطی

قضیه اندازه حرکت را می توان به دو صورت بیان کرد:

$$p = mv = m \frac{dx}{dt}$$

(1) صورت دیفرانسیلی (2) صورت انتگرالی

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

شکل دیفرانسیلی قضیه اندازه حرکت بیان می کند که آهنگ تغییرات زمانی اندازه حرکت برابر با نیروی وارد بر جسم است:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (mv) = \frac{dp}{dt} = F$$

$$\frac{dp}{dt} = F$$

که همان قانون دوم نیوتن است

شکل انتگرالی قضیه اندازه حرکت بیان می کند که تغییر اندازه حرکت را می توان از ضربه وارده بر جسم به دست آورد

شکل انتگرالی این قضیه را می توان از شکل دیفرانسیلی آن به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{dp}{dt} = F$$

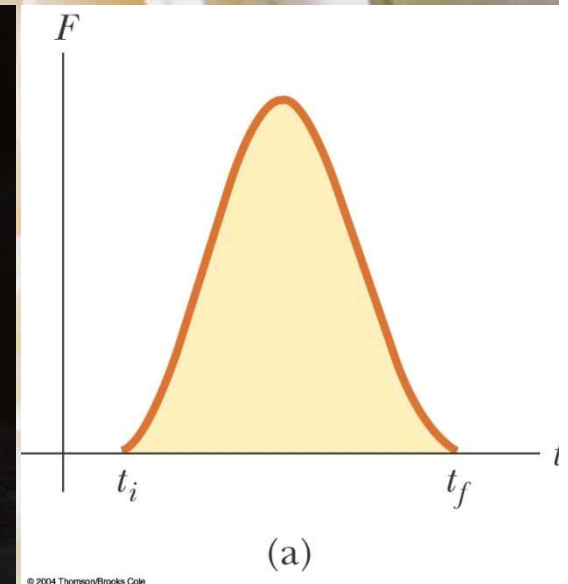
$$dp = Fdt$$

$$\Delta p = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

سمت راست معادله فوق ضربه وارده بر جسم می باشد

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$



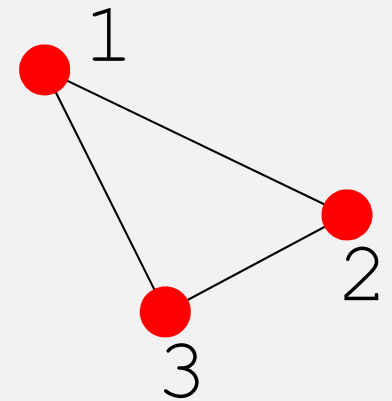
مطالعات ما تا کنون محدود به یک ذره می شده است

چگونه دستگاهی واقعی از ذرات شامل  $N$  ذره را مطالعه کنیم؟

برای یافتن پاسخ سوال فوق به صورت زیر عمل می کنیم

برای سادگی دستگاهی متشکل از 3 ذره را در نظر بگیرید

هر ذره تشکیل دهنده جسم از قانون دوم نیوتن  
تبعیت می کند



$$f_i = \frac{dp_i}{dt}$$

نیروی وارد بر ذره  $i$ -ام

$$f_i = f_i^{ext} + f_i^{int}$$

نیرو می تواند به بخشهای داخلی  
و خارجی تقسیم شود

$$F = \sum_{i=1}^N f_i = \sum_{i=1}^N (f_i^{ext} + f_i^{int})$$

نیروی کل را از جمع روی  
تک تک ذرات به دست  
می آوریم:

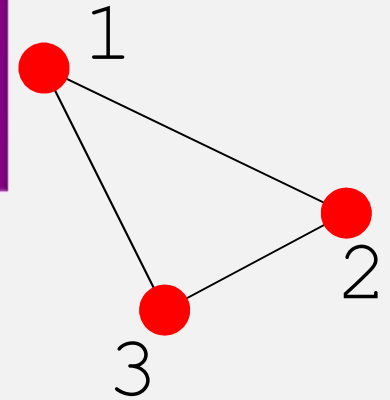
## جمع نیروهای داخلی صفر می شود

چرا؟

بنابر قانون سوم نیوتون

چگونه؟

مثلا برای دستگاه 3 ذره ای داریم:



$$\sum_{i=1}^N f_i^{int} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N f_i^{int} = \sum_{i,j} f_{ij}$$

$$f_{ij} = -f_{ji}$$

$$\sum_{i=1}^3 f_i^{int} = \sum_{i,j} f_{ij} = f_{12} + f_{13} + f_{23} + f_{21} + f_{31} + f_{32}$$

$$\sum_{i=1}^3 f_i^{int} = \sum_{i,j} f_{ij} = f_{12} + f_{13} + f_{23} - f_{12} - f_{13} - f_{23} = 0$$

بنابراین:

$$\sum_{i=1}^N f_i^{int} = 0$$

پس:

$$F = \sum_{i=1}^N (f_i^{ext} + f_i^{int}) = \sum_{i=1}^N f_i^{ext}$$

یعنی ذرات داخلی به یکدیگر نیرو وارد نمی کنند و جسم فقط تحت تاثیر نیروی خارجی است

$$F = \sum_{i=1}^N f_i^{ext} = \sum_{i=1}^N \frac{dp_i}{dt}$$

$$F = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N p_i \right)$$

جمع مشتقها  
مساوی است  
با مشتق  
مجموع

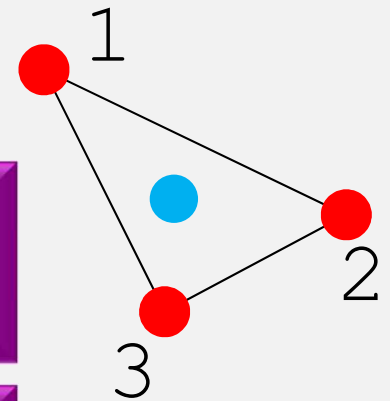
$$F = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N p_i \right) = \frac{d}{dt} (P) = \frac{dP}{dt}$$

بنابراین حرکت مجموعه ای از ذرات مانند حرکت یک ذره قابل انجام است اگر از اندازه حرکت کل ذرات به جای اندازه حرکت تک تک ذرات استفاده کنیم

## مرکز جرم

اگر به جای حرکت مجموعه ای از ذرات می توان حرکت یک ذره را بررسی کرد، آن ذره کجاست؟

آن ذره در واقع یک ذره مجازی است که جرم آن برابر جرم کل جسم است و مکان آن در مرکز جرم جسم واقع شده است



مرکز جرم یک نقطه ریاضی است که یک تعریف ریاضی دقیق دارد و می تواند بر مرکز ثقل منطبق باشد یا نباشد

مرکز جرم چیست؟

فرض کنید که جرم این نقطه ریاضی  $M$  و مکان آن  $R$  باشد

$$F = \frac{dP}{dt}$$

$$F = M\ddot{R}$$

$$F = M\ddot{R} = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N p_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{dr_i}{dt} \right)$$

$$M \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i r_i \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{i=1}^N m_i r_i \right)$$

$$MR = \sum_{i=1}^N m_i r_i$$

$$R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i r_i$$

مکان مرکز جرم که چیزی جز میانگین مکان جرمهای تشکیل دهنده جسم نیست

$$x_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

$$y_{\text{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i y_i}{M}$$

$$z_{\text{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = x_{\text{CM}} \hat{\mathbf{i}} + y_{\text{CM}} \hat{\mathbf{j}} + z_{\text{CM}} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\sum_i m_i x_i \hat{\mathbf{i}} + \sum_i m_i y_i \hat{\mathbf{j}} + \sum_i m_i z_i \hat{\mathbf{k}}}{M}$$

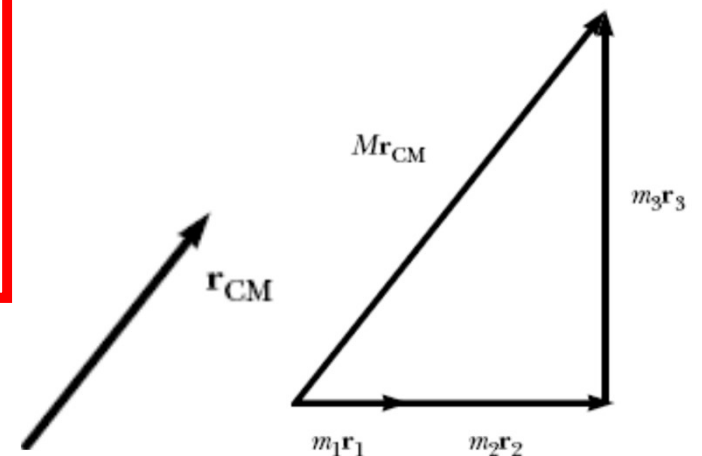
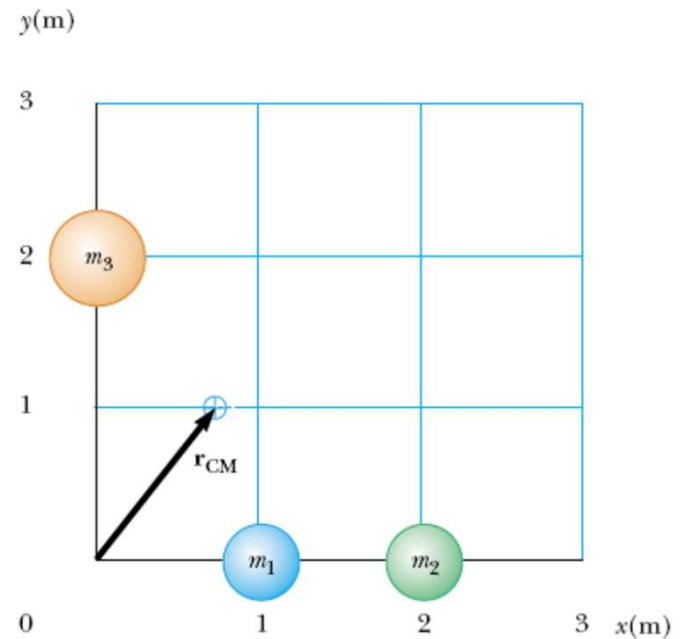
$$\mathbf{r}_{\text{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

$$\mathbf{r}_i \equiv x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{\mathbf{k}}$$

$$\begin{aligned}
 x_{\text{CM}} &= \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\
 &= \frac{(1.0 \text{ kg})(1.0 \text{ m}) + (1.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m}) + (2.0 \text{ kg})(0)}{1.0 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg} + 2.0 \text{ kg}} \\
 &= \frac{3.0 \text{ kg} \cdot \text{m}}{4.0 \text{ kg}} = 0.75 \text{ m}
 \end{aligned}$$

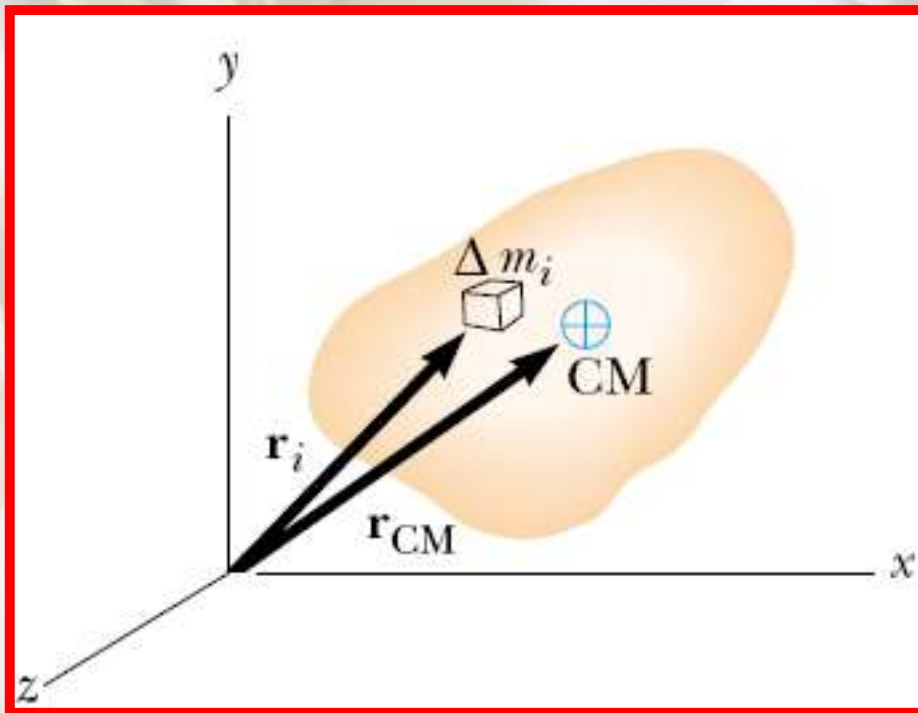
$$\begin{aligned}
 y_{\text{CM}} &= \frac{\sum_i m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\
 &= \frac{(1.0 \text{ kg})(0) + (1.0 \text{ kg})(0) + (2.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m})}{4.0 \text{ kg}} \\
 &= \frac{4.0 \text{ kg} \cdot \text{m}}{4.0 \text{ kg}} = 1.0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} \equiv x_{\text{CM}} \hat{\mathbf{i}} + y_{\text{CM}} \hat{\mathbf{j}} = (0.75 \hat{\mathbf{i}} + 1.0 \hat{\mathbf{j}}) \text{ m}$$



# مرکز جرم یک جسم پیوسته را چگونه به دست آوریم؟

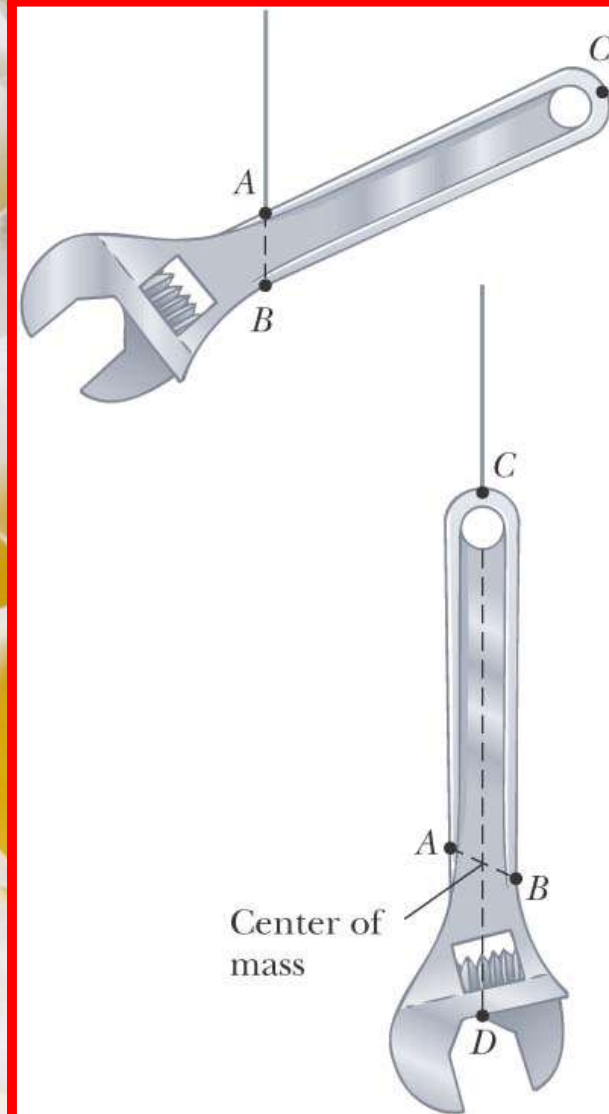
روش نظری



$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV$$

$$M = \int dm = \int \rho(\mathbf{r}) dV$$

روش تجربی



© 2004 Thomson/Brooks Cole

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\lambda}{M} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

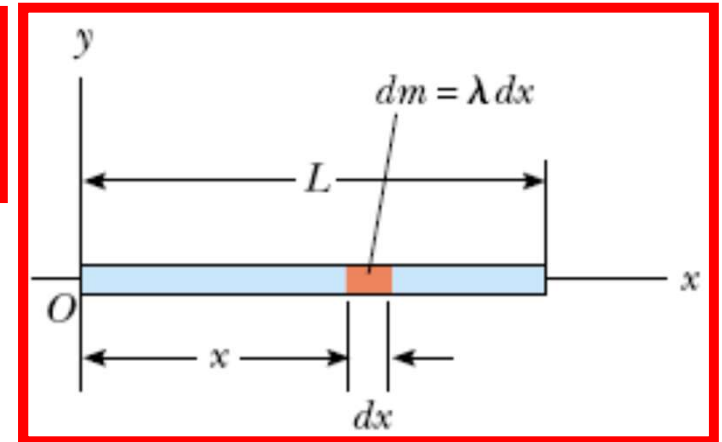
$$\lambda = M/L$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{L^2}{2M} \left( \frac{M}{L} \right) = \frac{L}{2}$$

$$\lambda = \alpha x$$

$$\begin{aligned} x_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{1}{M} \int_0^L x \alpha x dx \\ &= \frac{\alpha}{M} \int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha L^3}{3M} \end{aligned}$$

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L \alpha x dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$



$$x_{\text{CM}} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \frac{2}{3}L$$

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int_S \mathbf{r} dm = \frac{\sigma}{M} \int_S \mathbf{r} dx dy = \frac{1}{A} \int_S \mathbf{r} dx dy$$

$$M = \int_S \sigma dx dy$$

$$= \sigma \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} dy$$

$$= \sigma \int_0^a \left( \frac{b}{a} x \right) dx$$

$$= \frac{\sigma b}{a} \frac{a^2}{2} =$$

$$= \sigma \frac{1}{2} ab = \sigma A$$

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{\sigma}{M} \int_S \mathbf{r} dx dy = \frac{1}{A} \int_S \mathbf{r} dx dy$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{A} \int_0^a x dx \int_0^{\frac{b}{a}x} dy =$$

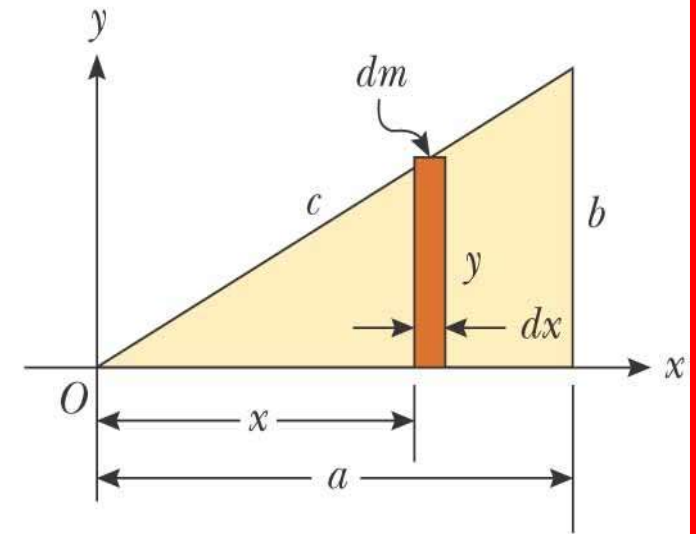
$$\frac{1}{A} \int_0^a \left( \frac{b}{a} x \right) x dx =$$

$$\frac{1}{A} \frac{b}{a} \frac{1}{3} a^3 = \frac{2}{3} a$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{1}{A} \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} y dy =$$

$$\frac{1}{A} \int_0^a \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} x \right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{A} \frac{1}{6} \frac{b^2}{a^2} a^3 = \frac{1}{3} b$$



(b)

# قانون بقا اندازہ حرکت

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0$$

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = 0$$

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 0$$

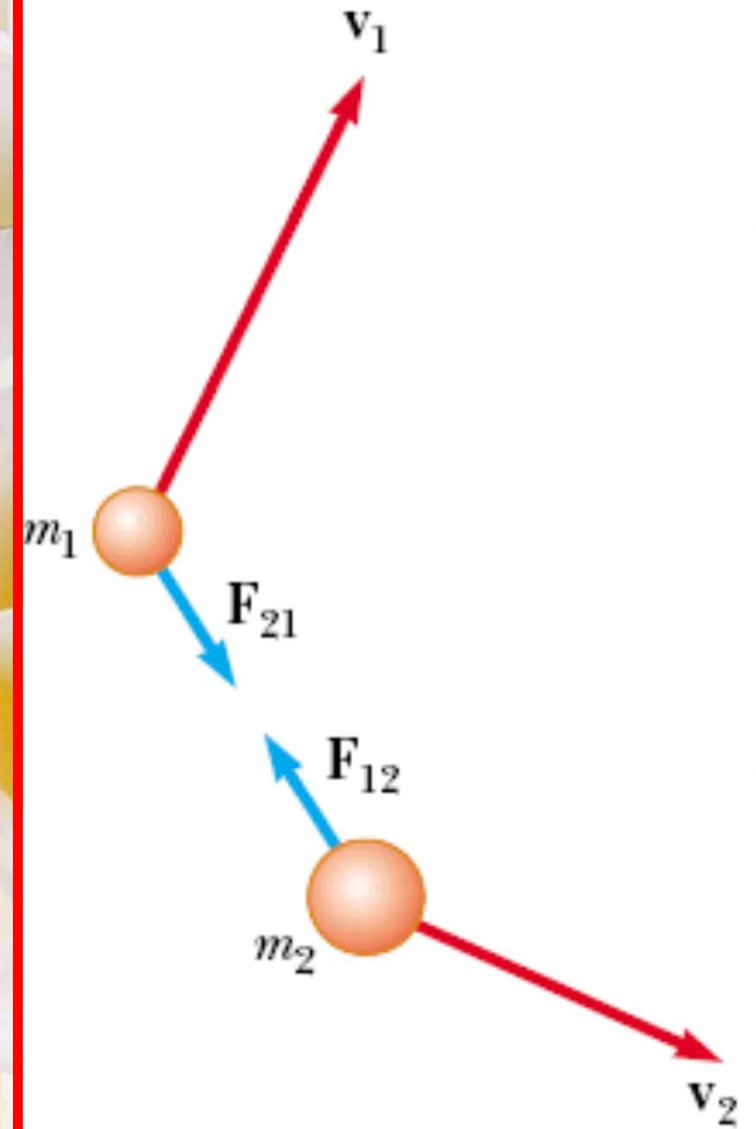
$$\frac{d(m_1 \mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \mathbf{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{constant}$$

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f}$$



به عکس می توان گفت که اگر در دو جسم در حال برهمکنش قانون بقا اندازه حرکت خطی را داشته باشیم آنگاه دو جسم نیروی یکسانی به یکدیگر وارد می کنند:



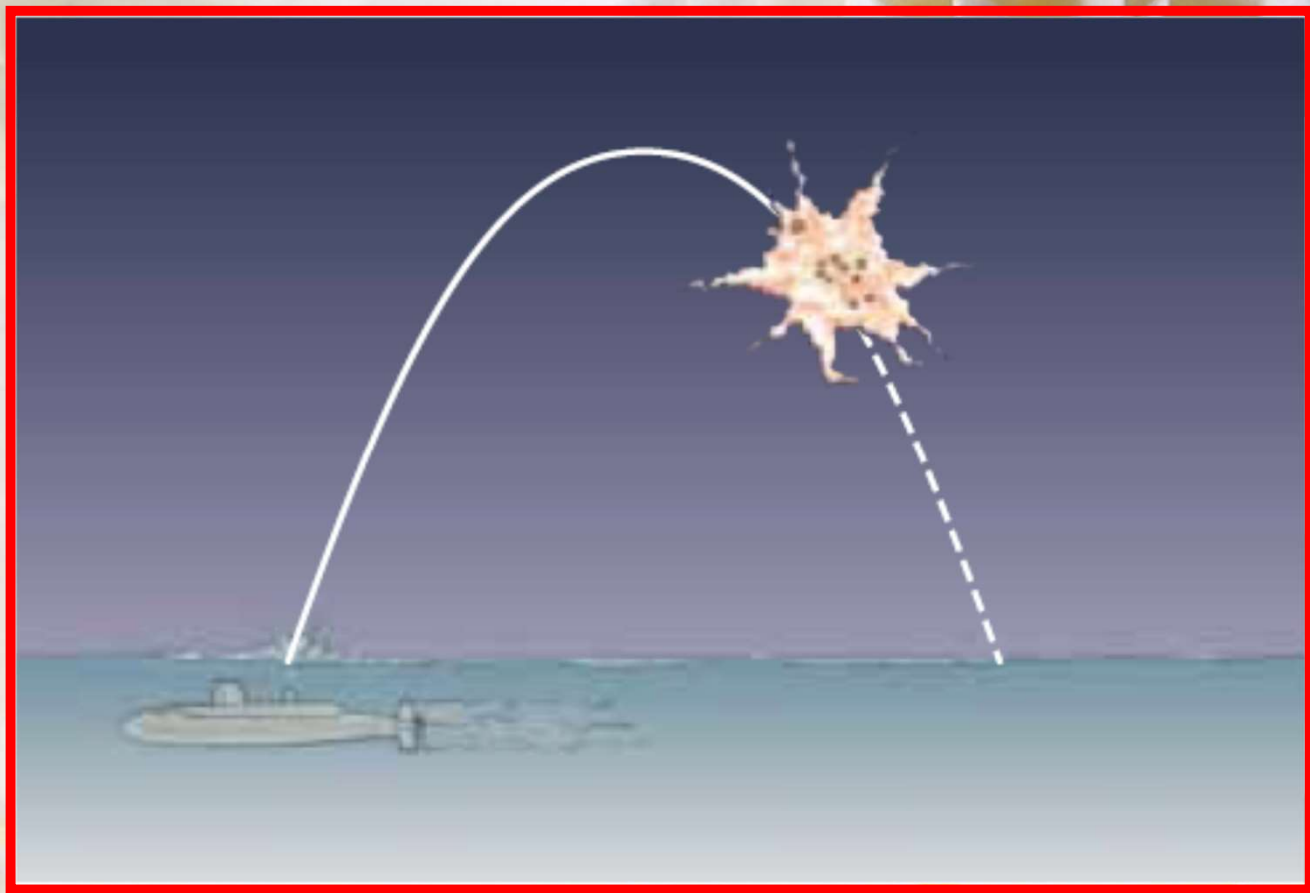
$$0 = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt}$$

$$0 = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

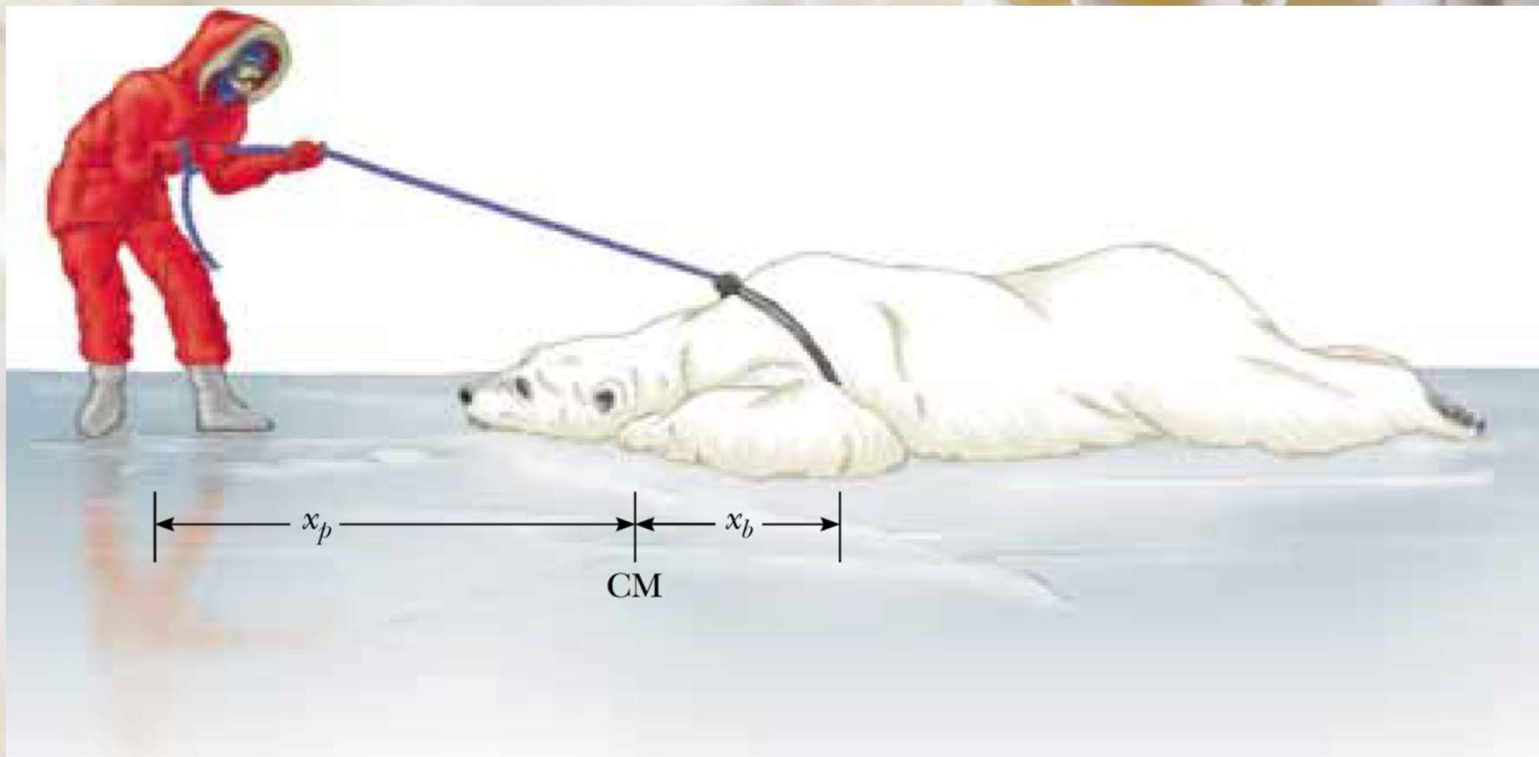
پس از یک منظر  
قانون سوم هم یک  
قانون مستقل به نظر  
نمی رسد

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

که همان قانون  
سوم است



جرم یک خرس قطبی که در خواب زمستانی به سر می برد را با استفاده از یک طناب و خط کش به دست آورید:



فرض کنید که دو جسم ایزوله باشند- سطوح را بدون اصطحاک در نظر بگیرید و از برهمکنش این دو جسم با اجسام دیگر صرف نظر کنید

$$P_b + P_p = 0$$

$$m_b v_b = -m_p v_p$$

$$m_b \frac{\Delta x_b}{\Delta t} = -m_p \frac{\Delta x_p}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta(m_b x_b)}{\Delta t} = -\frac{\Delta(m_p x_p)}{\Delta t}$$

$$\Delta(m_b x_b) = -\Delta(m_p x_p)$$

$$m_b \Delta x_b = -m_p \Delta x_p$$

$$m_b = -m_p \frac{\Delta x_p}{\Delta x_b}$$

معنای فیزیکی این رابطه زیر:

$$m_b \Delta x_b = -m_p \Delta x_p$$

این است که مرکز جرم دوجسم  
تغییر نمی کند:

$$R_{CM1} = \frac{m_b x_{b1} + m_p x_{p1}}{m_b + m_p}$$

$$R_{CM2} = \frac{m_b x_{b2} + m_p x_{p2}}{m_b + m_p}$$

$$R_{CM2} - R_{CM1} = \frac{m_b x_{b2} + m_p x_{p2}}{m_b + m_p} - \frac{m_b x_{b1} + m_p x_{p1}}{m_b + m_p}$$

$$R_{CM2} - R_{CM1} = \frac{m_b x_{b2} + m_p x_{p2}}{m_b + m_p} - \frac{m_b x_{b1} + m_p x_{p1}}{m_b + m_p}$$

$$R_{CM2} - R_{CM1} = \frac{m_b x_{b2} + m_p x_{p2} - m_b x_{b1} - m_p x_{p1}}{m_b + m_p}$$

$$R_{CM2} - R_{CM1} = \frac{m_b (x_{b2} - x_{b1}) + m_p (x_{p2} - x_{p1})}{m_b + m_p}$$

$$R_{CM2} - R_{CM1} = \frac{m_b \Delta x_b + m_p \Delta x_p}{m_b + m_p} = 0$$

$$m_b \Delta x_b = -m_p \Delta x_p$$

از قانون بقا اندازه حرکت خطی  
داشتیم:

$$R_{CM2} = R_{CM1}$$

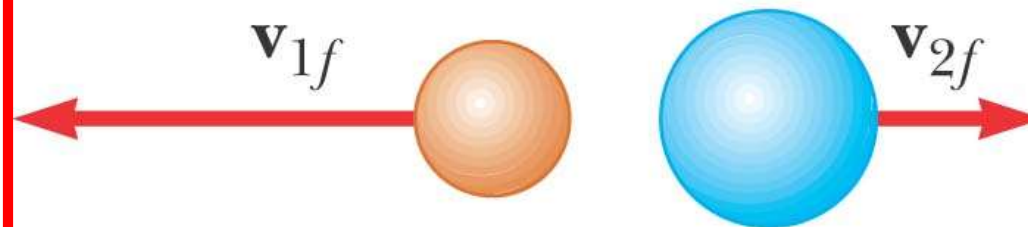
پس مرکز جرم نباید تغییر کند:

Before collision

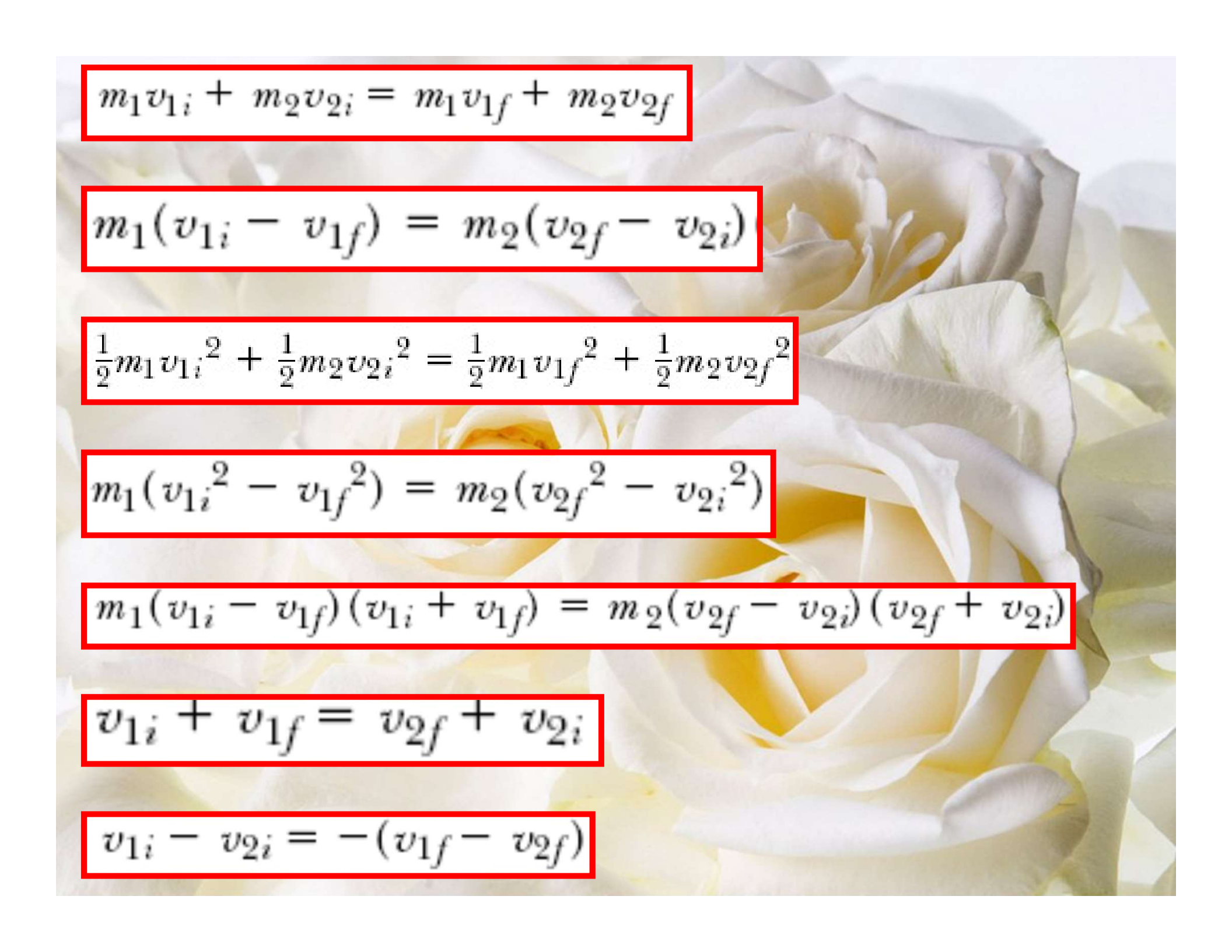


(a)

After collision



(b)


$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})$$

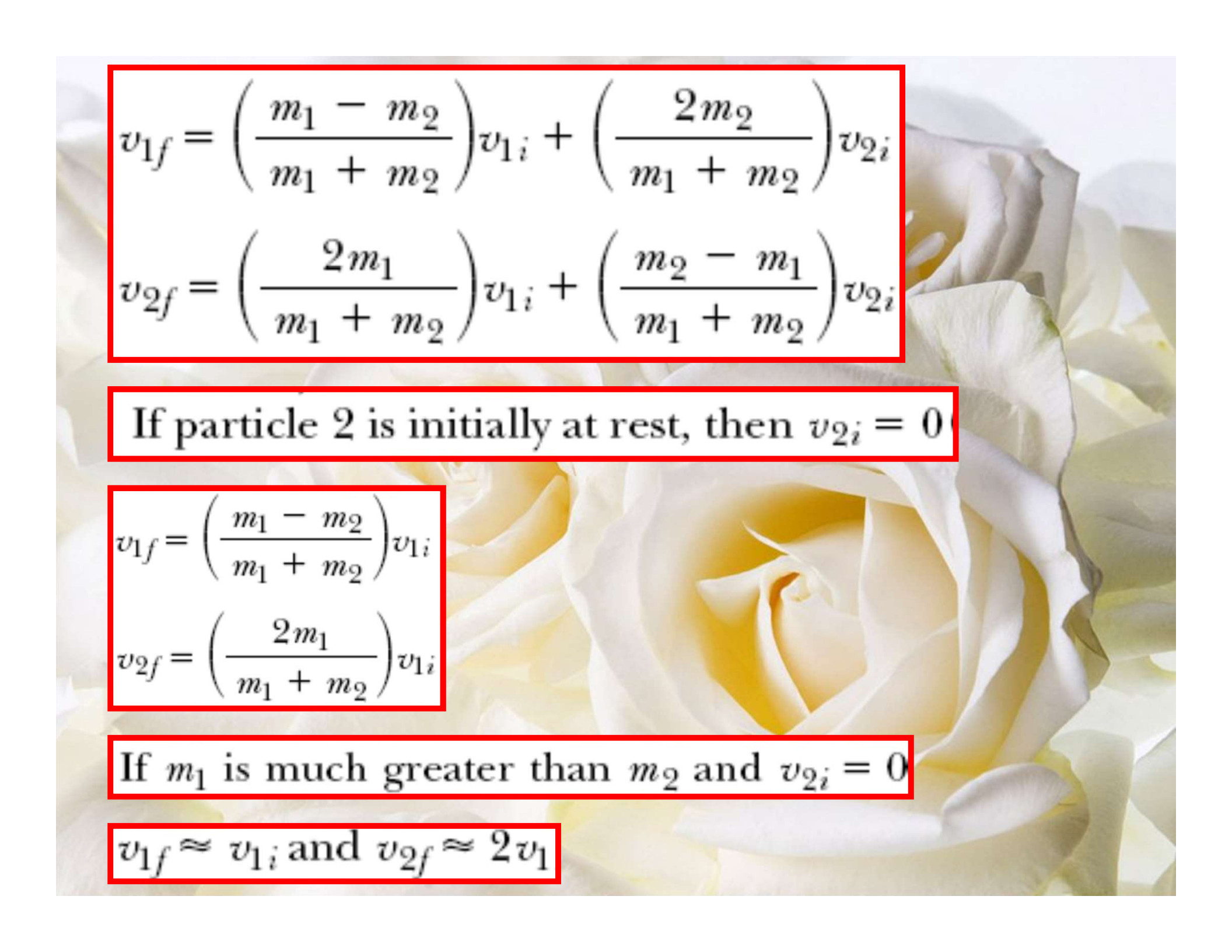
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) (v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) (v_{2f} + v_{2i})$$

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

The background of the entire slide is a close-up photograph of a white rose with yellow-tinted petals.
$$v_{1f} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

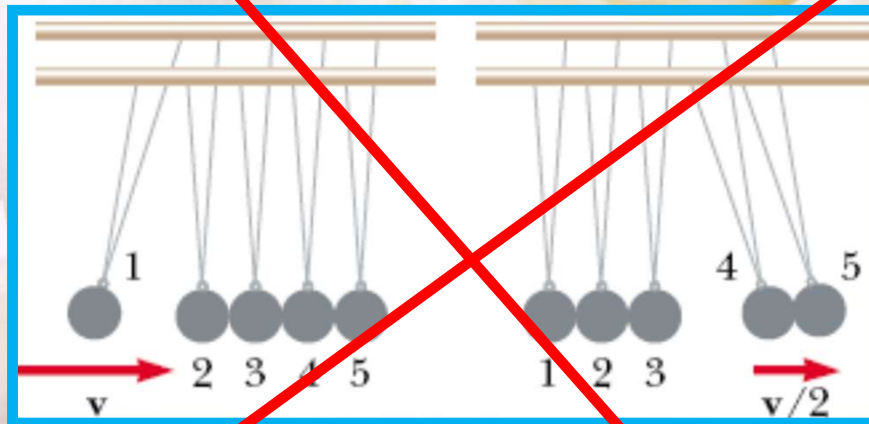
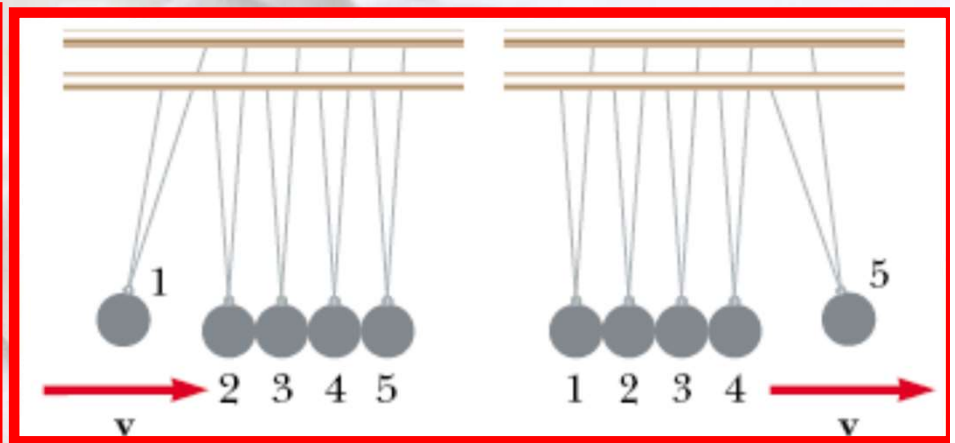
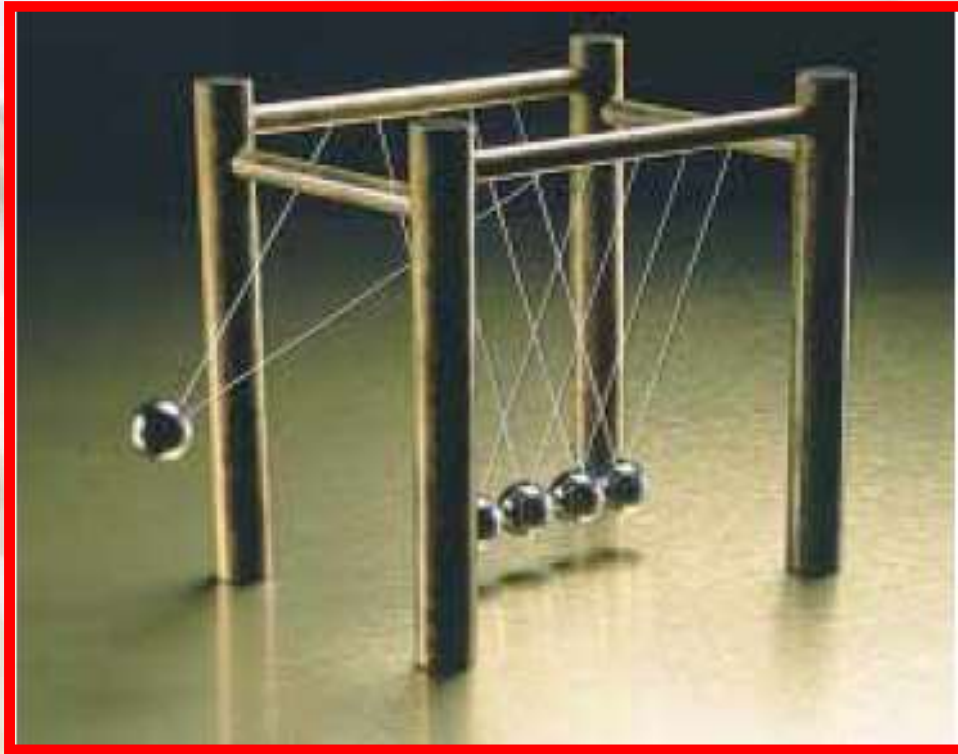
If particle 2 is initially at rest, then  $v_{2i} = 0$

$$v_{1f} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

$$v_{2f} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

If  $m_1$  is much greater than  $m_2$  and  $v_{2i} = 0$

$$v_{1f} \approx v_{1i} \text{ and } v_{2f} \approx 2v_{1i}$$



$$m(v/2) + m(v/2) = mv$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}m(v/2)^2 + \frac{1}{2}m(v/2)^2 = \frac{1}{4}mv^2$$

اگر گلوله های 4 و 5 به هم چسبیده باشند به طوری که فقط با هم بتوانند حرکت کنند و گلوله 1 کشیده و رها شود چه اتفاقی روی خواهد داد؟

$$p_i = p_f$$

$$mv_{1i} = mv_{1f} + 2mv_{4,5f}$$

$$K_i = K_f$$

$$\frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}(2m)v_{4,5f}^2$$

$$v_{4,5f} = \frac{2}{3}v_{1i} \quad v_{1f} = -\frac{1}{3}v_{1i}$$

بنابراین گلوله های 4 و 5 با هم به جلو پرتاب و گلوله 1 هم به عقب با یک سوم سرعت اولیه اش پس زده خواهند شد.

در برخوردهای کاملاً غیر الاستیک قانون بقا انرژی جنبشی صادق نیست  
اما کماکان قانون بقا اندازه حرکت صادق است

$$m_2 = 2m_1 = 2m$$

$$\mathbf{V}_{1i} = -\mathbf{V}_{2i} = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$$

$$m_1 \mathbf{V}_{1i} + m_2 \mathbf{V}_{2i} = (m_1 + m_2) \mathbf{V}_f$$

$$m\mathbf{V} - 2m\mathbf{V} = (m + 2m)\mathbf{V}_f$$

$$-m\mathbf{V} = 3m\mathbf{V}_f$$

$$\mathbf{V}_f = -\frac{1}{3} \mathbf{V}$$

مثال: فرض کنید که در یک برخورد کاملاً غیر الاستیک داشته باشیم:

سرعت نهایی جسم مرکب حاصل از ادغام اجسام اولیه پس از برخورد را به دست آورید

همان طور که ملاحظه می شود قانون بقا انرژی جنبشی صادق نمی ماند

$$\frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} 2m \mathbf{V}^2 \neq \frac{1}{2} 3m \left( \frac{1}{3} \mathbf{V} \right)^2$$

$$3 \neq \frac{1}{3}$$

# مثال: آونگ بالستیک به عنوان وسیله ای برای اندازه گیری سرعت گلوله یک تفنگ

قانون بقا انرژی بین مراحل A و B  
(مرحله برخورد کاملاً غیر  
الاستیک) صادق نیست

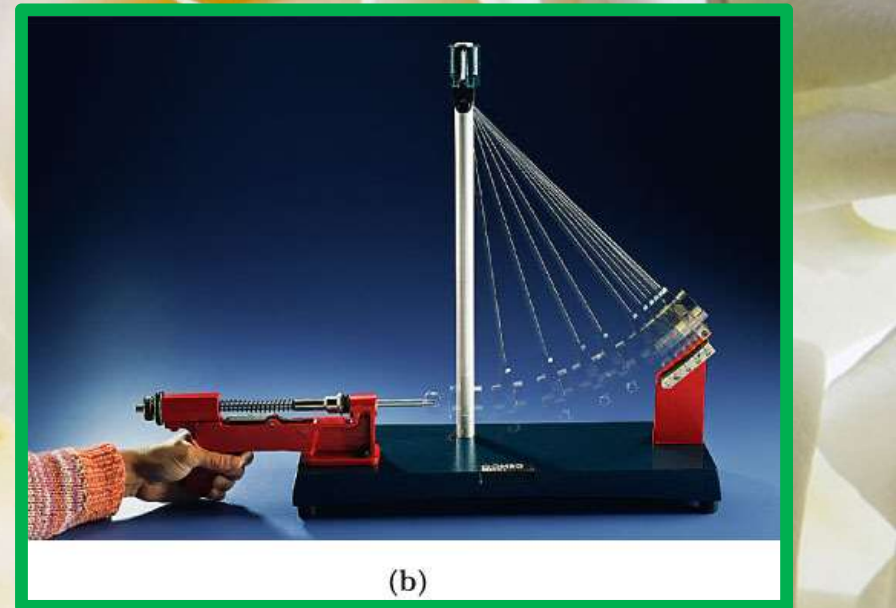
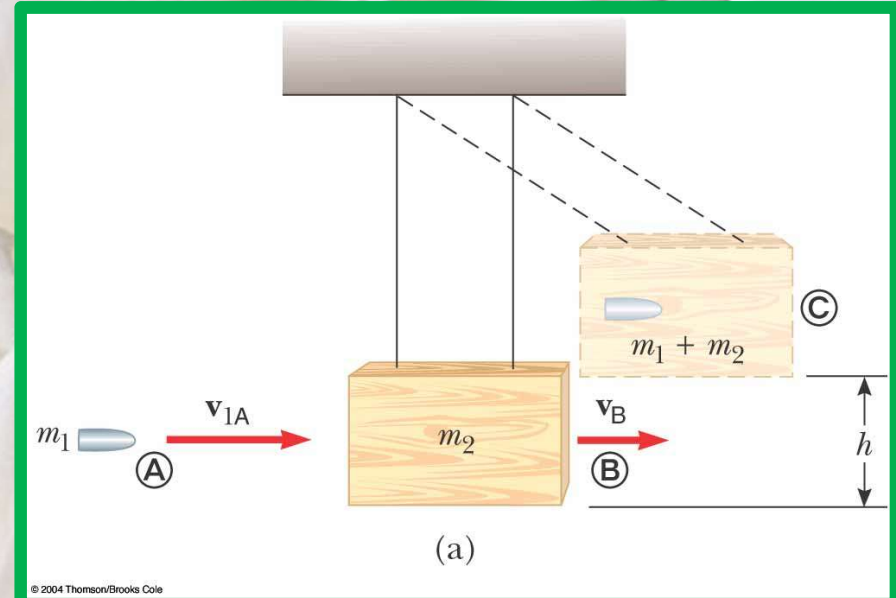
$$m_1 v_{1A} = (m_1 + m_2) v_B$$

$$v_B = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1A}$$

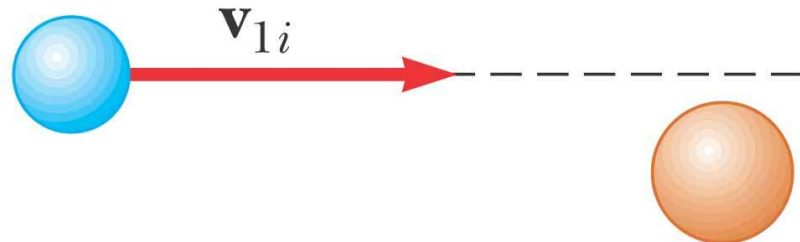
قانون بقا انرژی بین مراحل B و C  
صادق است

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_B^2 = (m_1 + m_2) gh$$

$$v_{1A} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

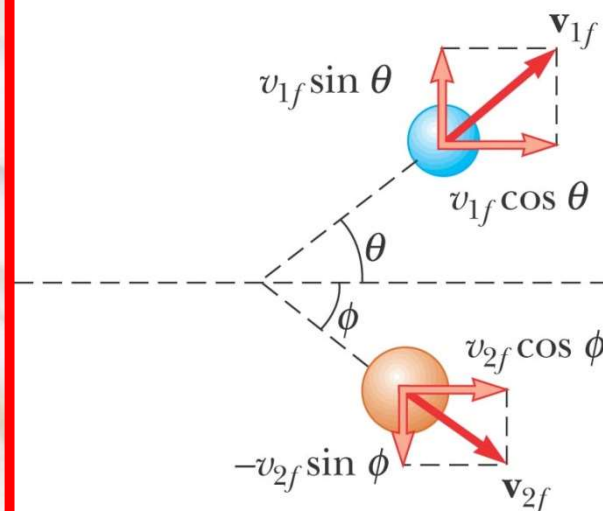


## برخورد دوبعدی



(a) Before the collision

© 2004 Thomson/Brooks Cole



(b) After the collision

© 2004 Thomson/Brooks Cole

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi$$

$$m_1 v_{1f} \sin \theta = m_2 v_{2f} \sin \phi$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

همان طور  
که ملاحظه  
می شود 3  
معادله اما 4  
مجهول  
داریم

پس دانستن  
یکی از  
مجهولها  
ضروری  
است

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

But  $m_1 = m_2 = m$ , so that

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

$$m_1\mathbf{v}_{1i} = m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f}$$

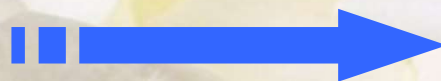
$$v_{1i}^2 = (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) \cdot (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f}$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35^\circ)$$

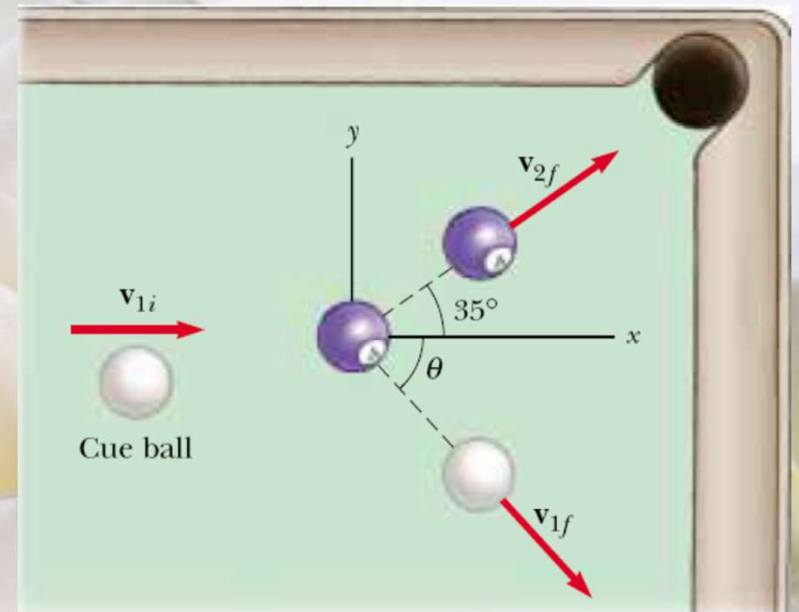
$$0 = 2v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35^\circ)$$

$$0 = \cos(\theta + 35^\circ)$$

$$\theta + 35^\circ = 90^\circ$$



$$\theta = 55^\circ$$



# حرکت موشک در فضا

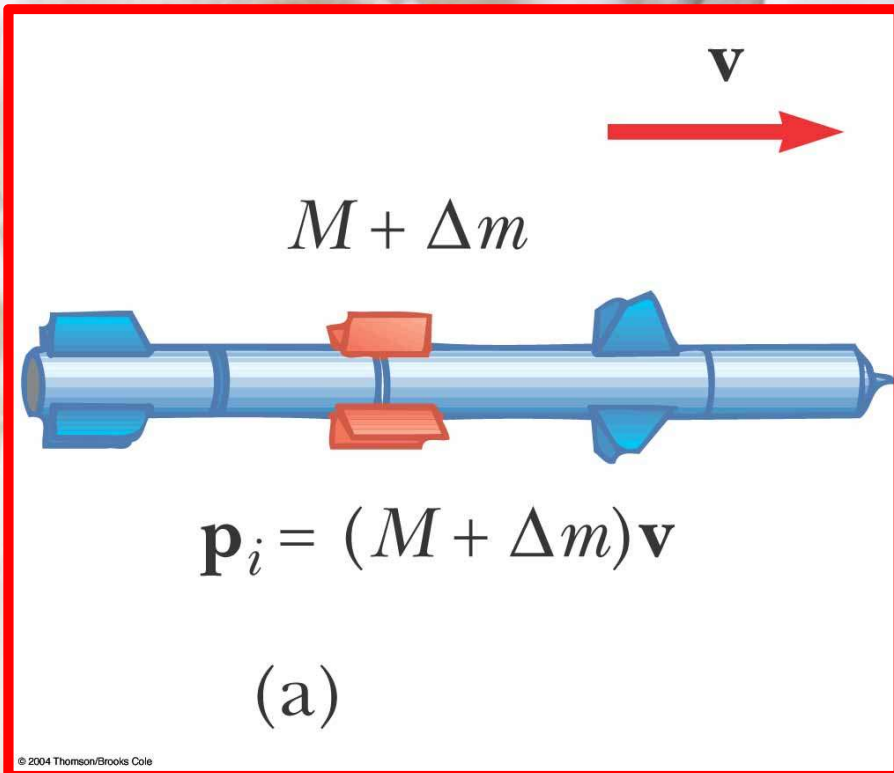


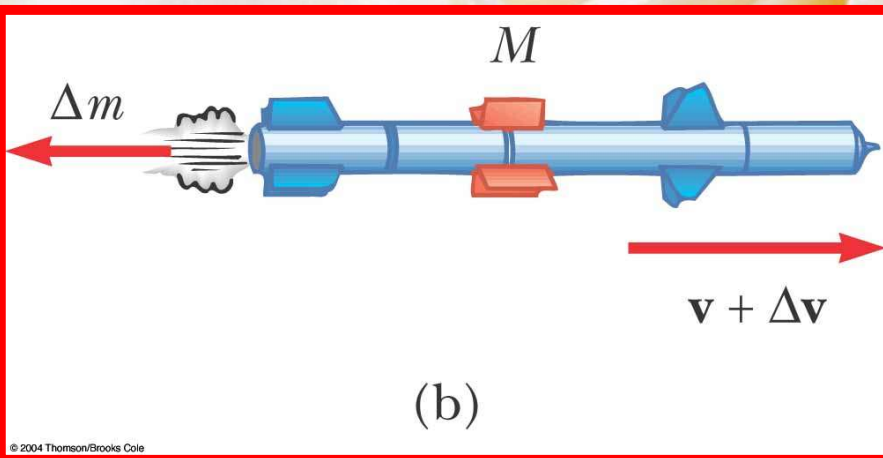
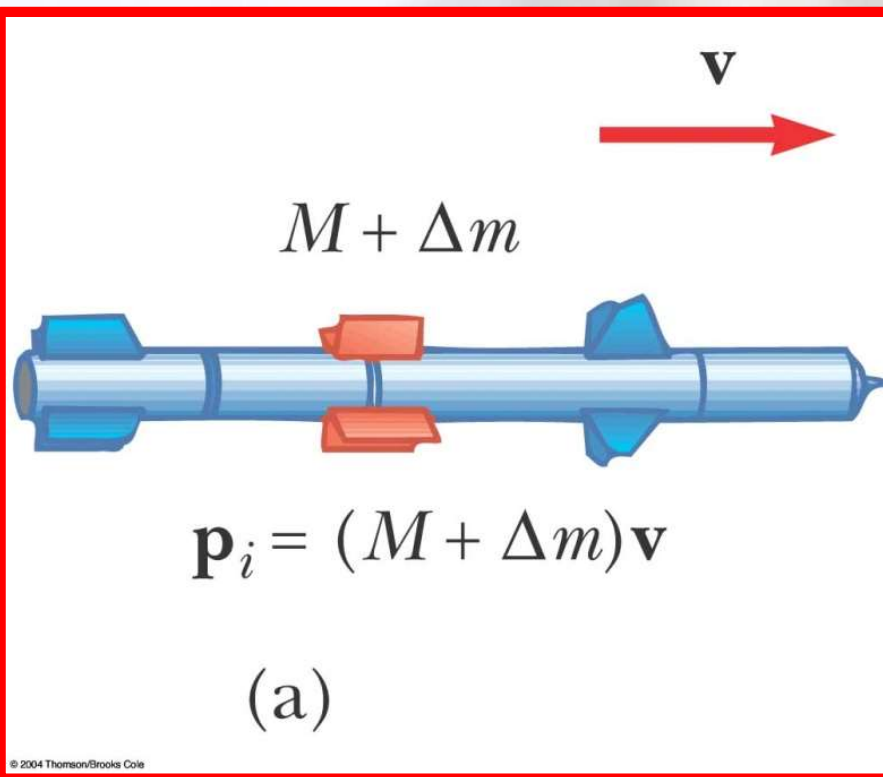
# نیروی پشران موشک

موشک در فضا چگونه نیروی پیش  
ران خود را تامین می کند؟

در فضا چیزی برای هل دادن به  
عقب مانند زمین یا هوا وجود  
ندارد؟

پس موشک چگونه حرکت می  
کند؟





$$\mathbf{P}_f = M(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + \Delta m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_e)$$

سرعت جرم خارج  
شده نسبت به موشک

سرعت جرم خارج  
شده نسبت به زمین

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

$$Mv + \Delta mv = Mv + M\Delta v + \Delta mv - \Delta mv_e$$

$$0 = M\Delta v - \Delta mv_e$$

$$M\Delta v = \Delta mv_e$$

$$Mdv = v_e dm$$

$$dm = -dM$$

$$Mdv = -v_e dM$$

$$dv = -v_e \frac{dM}{M}$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = -v_e \ln \left| \frac{M_f}{M_i} \right|$$

$$v_f - v_i = v_e \ln \left| \frac{M_i}{M_f} \right|$$

$$Thrust = M \frac{dv}{dt} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i}{\Delta t}$$

$$\mathbf{P}_i = M\mathbf{V}$$

$$\mathbf{P}_f = (M - \Delta M)(\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}) + \Delta M \mathbf{U}$$

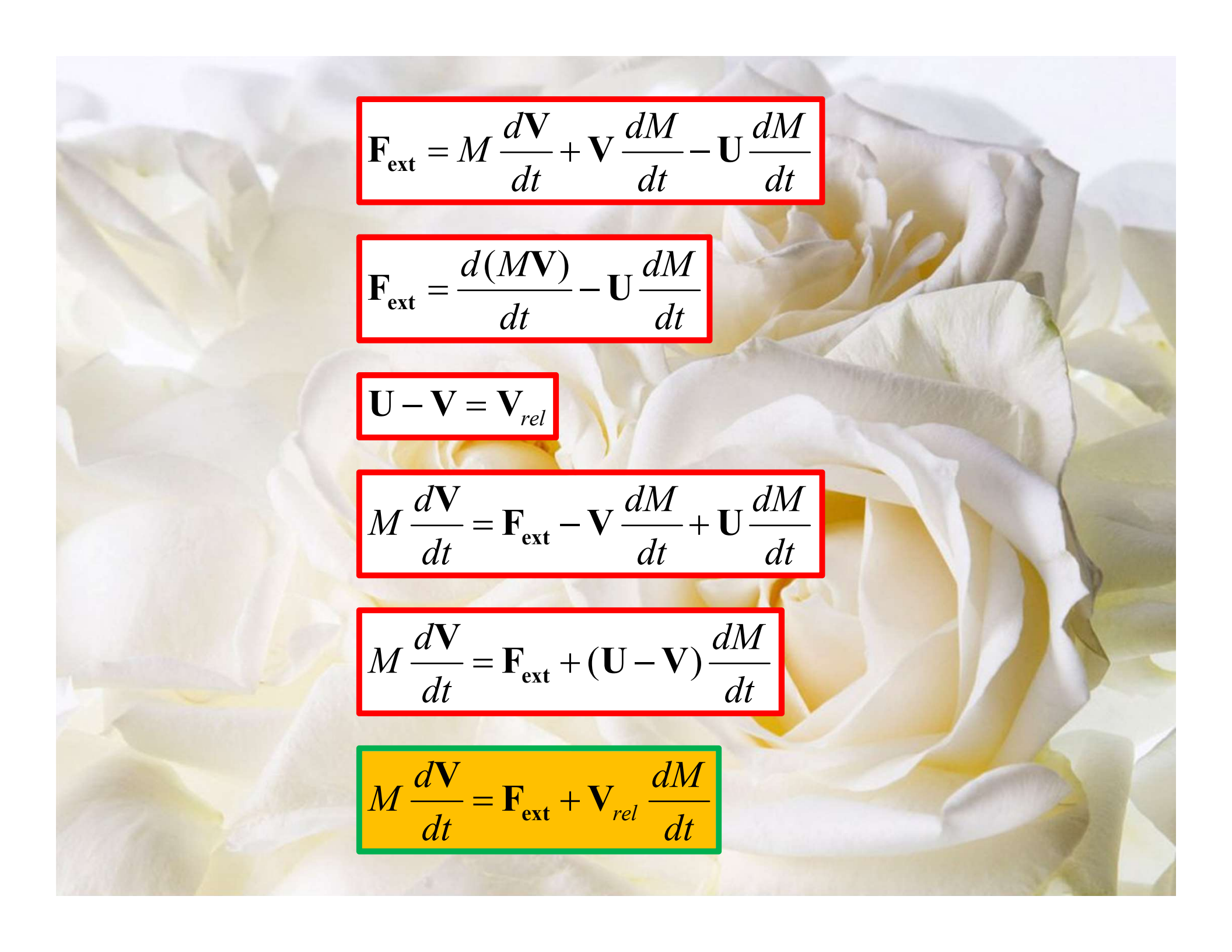
$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\{(M - \Delta M)(\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}) + \Delta M \mathbf{U}\} - \{M\mathbf{V}\}}{\Delta t}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M\Delta \mathbf{V} + (\mathbf{U} - (\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}))\Delta M}{\Delta t}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ M \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} + (\mathbf{U} - (\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V})) \frac{\Delta M}{\Delta t} \right\}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{V} \Delta M}{\Delta t} = 0$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = M \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{V} \frac{dM}{dt} - \mathbf{U} \frac{dM}{dt}$$


$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = M \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{V} \frac{dM}{dt} - \mathbf{U} \frac{dM}{dt}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d(M\mathbf{V})}{dt} - \mathbf{U} \frac{dM}{dt}$$

$$\mathbf{U} - \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{rel}}$$

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{V} \frac{dM}{dt} + \mathbf{U} \frac{dM}{dt}$$

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + (\mathbf{U} - \mathbf{V}) \frac{dM}{dt}$$

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{V}_{\text{rel}} \frac{dM}{dt}$$

### Example 9.18 The Exploding Rocket

A rocket is fired vertically upward. At the instant it reaches an altitude of 1 000 m and a speed of 300 m/s, it explodes into three fragments having equal mass. One fragment continues to move upward with a speed of 450 m/s following the explosion. The second fragment has a speed of 240 m/s and is moving east right after the explosion. What is the velocity of the third fragment right after the explosion?

**Solution** Let us call the total mass of the rocket  $M$ ; hence, the mass of each fragment is  $M/3$ . Because the forces of the explosion are internal to the system and cannot affect its total momentum, the total momentum  $\mathbf{p}_i$  of the rocket just before the explosion must equal the total momentum  $\mathbf{p}_f$  of the fragments right after the explosion.

Before the explosion,

$$\mathbf{p}_i = M\mathbf{v}_i = M(300\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s})$$

After the explosion,

$$\mathbf{p}_f = \frac{M}{3} (240\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}) + \frac{M}{3} (450\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}) + \frac{M}{3} \mathbf{v}_f$$

where  $\mathbf{v}_f$  is the unknown velocity of the third fragment. Equating these two expressions (because  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$ ) gives

$$\begin{aligned} \frac{M}{3} \mathbf{v}_f + \frac{M}{3} (240\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}) + \frac{M}{3} (450\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}) \\ = M(300\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_f = (-240\hat{\mathbf{i}} + 450\hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}$$

What does the sum of the momentum vectors for all the fragments look like?

### Example 9.19 A Rocket in Space

A rocket moving in free space has a speed of  $3.0 \times 10^3$  m/s relative to the Earth. Its engines are turned on, and fuel is ejected in a direction opposite the rocket's motion at a speed of  $5.0 \times 10^3$  m/s relative to the rocket.

**(A)** What is the speed of the rocket relative to the Earth once the rocket's mass is reduced to half its mass before ignition?

**Solution** We can guess that the speed we are looking for must be greater than the original speed because the rocket is accelerating. Applying Equation 9.41, we obtain

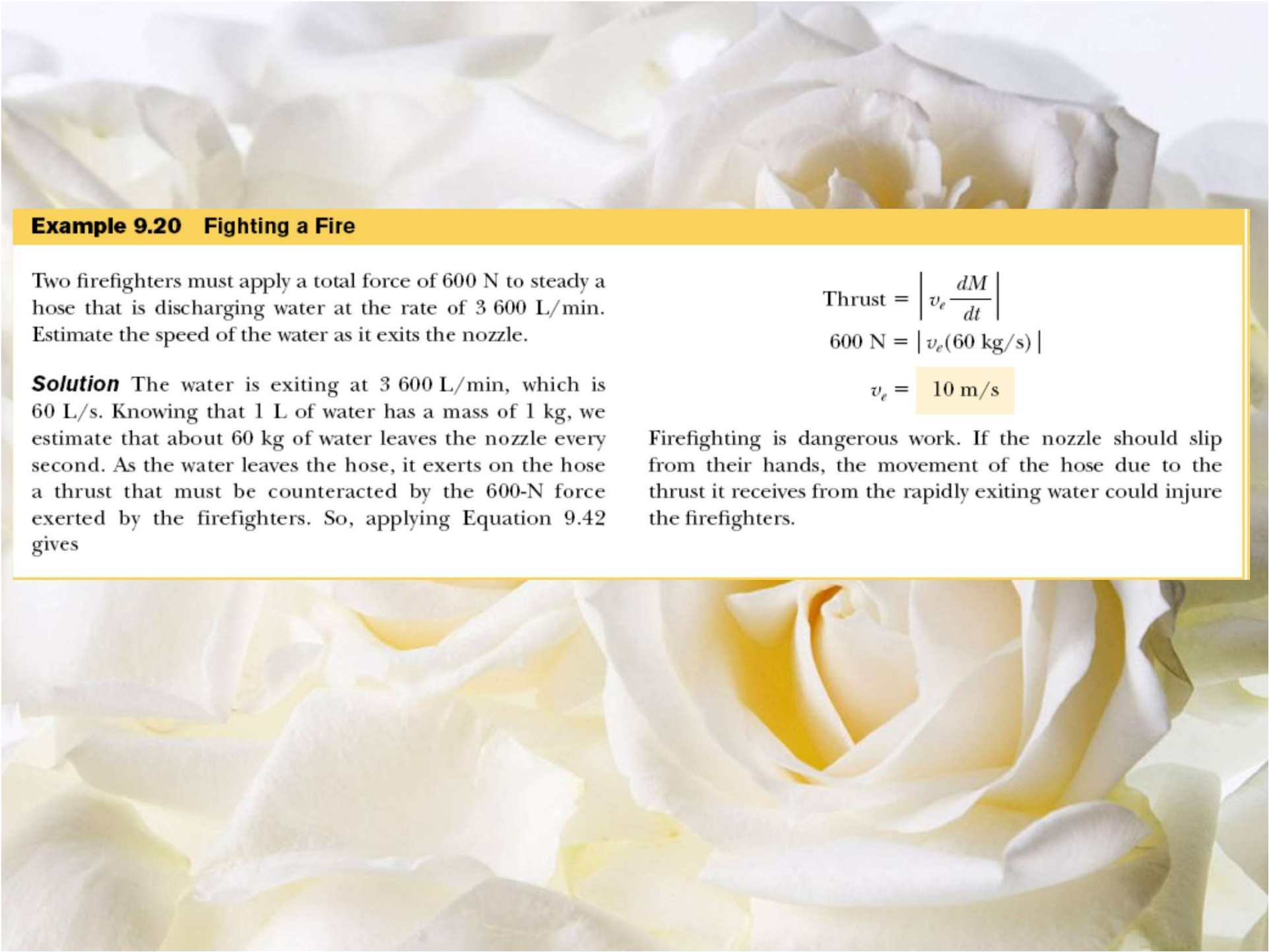
$$v_f = v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

$$\begin{aligned} &= 3.0 \times 10^3 \text{ m/s} + (5.0 \times 10^3 \text{ m/s}) \ln\left(\frac{M_i}{0.5 M_i}\right) \\ &= 6.5 \times 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**(B)** What is the thrust on the rocket if it burns fuel at the rate of 50 kg/s?

**Solution** Using Equation 9.42,

$$\begin{aligned} \text{Thrust} &= \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| = (5.0 \times 10^3 \text{ m/s})(50 \text{ kg/s}) \\ &= 2.5 \times 10^5 \text{ N} \end{aligned}$$



### Example 9.20 Fighting a Fire

Two firefighters must apply a total force of 600 N to steady a hose that is discharging water at the rate of 3 600 L/min. Estimate the speed of the water as it exits the nozzle.

**Solution** The water is exiting at 3 600 L/min, which is 60 L/s. Knowing that 1 L of water has a mass of 1 kg, we estimate that about 60 kg of water leaves the nozzle every second. As the water leaves the hose, it exerts on the hose a thrust that must be counteracted by the 600-N force exerted by the firefighters. So, applying Equation 9.42 gives

$$\begin{aligned}\text{Thrust} &= \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| \\ 600 \text{ N} &= | v_e (60 \text{ kg/s}) | \\ v_e &= 10 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Firefighting is dangerous work. If the nozzle should slip from their hands, the movement of the hose due to the thrust it receives from the rapidly exiting water could injure the firefighters.