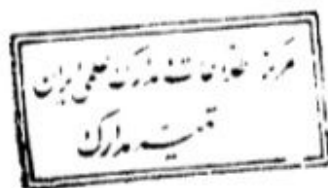


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

۲۲۴۴۴

۱۳۷۷ / ۹ / ۱۱



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

مطالعه کوانتومی دستگاه استادیوم دوار

سعید جلالی اسدآبادی

استاد راهنما

دکتر مهدی بارزی

تابستان ۱۳۷۷

652/2

۲۲۴۴۴



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سعید جلالی اسدآبادی
در رشته فیزیک تحت عنوان

مطالعه کوانتومی دستگاه استادیوم دوار

در تاریخ ۱۳۷۷/۶/۲۵ توسط کمیته تخصصی زیر متشکل از

۱- استاد راهنمای پایان نامه: آقای دکتر مهدی بارزی

۲- استاد مشاور: آقای دکتر احمد شیرزاد

۳- استاد مدعو: آقای دکتر شاهین روحانی

و نیز مسئول تحصیلات تکمیلی دانشکده فیزیک آقای دکتر احمد شیرزاد

مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

سپاسگزارى

اساتيد را همتا به ويژه در مقاطع تحصيلات تكميلى وظيف
خطيرى بر عهده دارند. رشته هاى علوم پايه همانگونه كه از نام
آنها بر مى آيد مى توانند زير بناى يك جامعه در حال توسعه را
از جهات مختلف تحت الشعاع تحقيقات پايداي خود قرار دهند.

استاد دكتور مهدى بسارزى دانشمندى وارسته حتى در
مسائل علمى است كه علاوه بر اين وظيف دانشجويان خود را با
شيوه هاى صحيح تحقيق آشنا نموده و انسان را مستقل و آماده
فعاليتهاى علمى مى نمايند. من نيز افتخار شاگردى ايشان را از
الطاف باري تعالى دانسته و بر خود مى بالم و از ايشان كمال
تشكر را به عمل مى آورم.

در پايان از اساتيد مشاور و مدعو به جهت بازخوانى
پايان نامه سپاسگزارم.

باکمال احترام تقدیم به

خانواده و استاد

فهرست مطالب

چکیده..... ۴

مقدمه..... ۵

۱- آشوب در مکانیک کلاسیک..... ۱

مقدمه..... ۱

۱-۱ دستگاه‌های انتگرال پذیر..... ۲

۲-۱ جنبه‌های ناوردا و متغیرهای کنش زاویه..... ۴

۳-۱ حرکت‌هایی با چند دوره تناوب..... ۶

۴-۱ آشوب نرم و قضیه KAM..... ۸

۵-۱ دستگاه‌های آنوسوف و آشوب سخت..... ۹

۶-۱ بیلارد استادیوم و دستگاه استادیوم دوار..... ۱۲

۲- آشوب در مکانیک کوانتومی..... ۱۴

مقدمه..... ۱۴

۱-۲ توابع موج در دستگاه‌های آشوبی..... ۱۵

۲-۲ ویژه توابع یک دستگاه انتگرال پذیر..... ۱۶

۳-۲ طرح خطوط صفر توابع موج..... ۱۷

۴-۲ زخمهای کوانتومی..... ۱۹

۵-۲ تعریف یک تابع مناسب برای مطالعه همبستگی ترازی..... ۲۲

۶-۲ حدسهای ویگنر..... ۲۳

۳- بررسی کوانتومی یک ذره در کره..... ۲۵

مقدمه..... ۲۵

۱-۳ حل تحلیلی یک ذره کوانتومی در کره..... ۲۶

۲-۳ معادله ویژه مقدار..... ۲۸

۳-۳ حل معادله $J_l(x) = 0$ ۳۰

۴-۳ توزیع آماری جدائی بین ترازها..... ۳۷

۵-۳ نحوه توزیع احتمال ذره..... ۴۰

۶-۳ حل عددی..... ۴۴

۱-۶-۳ دستگاه دایره با پایه مستطیل..... ۴۴

۲-۶-۳ دستگاه دایره با پایه مستطیل تصحیح شده..... ۵۴

۳-۶-۳ دستگاه کره با پایه دایره دوران یافته..... ۵۶

۴- بررسی کوانتومی یک ذره در استوانه..... ۶۰

مقدمه..... ۶۰

۱-۴ حل تحلیلی یک ذره کوانتومی در استوانه..... ۶۱

۲-۴ معادله ویژه مقدار..... ۶۳

۳-۴ حل معادله $J_m(x) = 0$ ۶۴

۴-۴ توزیع آماری جدایی بین ترازها..... ۷۶

۵-۴ کمینه انرژی..... ۷۸

۶-۴ نحوه توزیع احتمال ذره..... ۸۳

۵- بررسی کوانتومی یک ذره در استادیوم دوار..... ۸۵

مقدمه..... ۸۵

۱-۵ حل تحلیلی..... ۸۹

۲-۵	حل عددی با پایه کره.....	۹۱
۳-۵	معرفی پایه استوانه.....	۹۵
۴-۵	حل عددی با پایه استوانه.....	۱۰۰
۵-۵	تغییرات انرژی حالت زمینه بر حسب پارامتر تغییر شکل.....	۱۰۲
۶-۵	مطالعه آماری.....	۱۰۶
۷-۵	منحنیهای صفرهای توابع موج.....	۱۰۸

نتیجه گیری..... ۱۱۲

پیوست..... ۱۱۳

مراجع..... ۱۵۲

چکیده

مطالعه آشوب کوانتومی در دستگاه استادیوم دوار سخت مستلزم حل معادله شرودینگر در سه بعد است. این معادله بطور تحلیلی قابل حل نیست. در این پایان نامه یک روش عددی مبتنی بر مفاهیم فیزیکی توابع موج ارائه شده است. در این روش با استفاده از تبدیل انتگرالی فوریه توابع موج، یک پایه کامل که بسط توابع موج بر حسب آن به سرعت همگرا می شود معرفی شده است. با اعمال شرایط مرزی دستگاه استادیوم دوار به یک دسته معادلات خطی دست می یابیم که به روش SVD آنها را برای بدست آوردن ضرایب بسط حل کرده ایم. نتایج حاصل از محاسبات نشان می دهد که تابع توزیع پواسون بر جدایی بین ترازهای انرژی حاکم است. رفتار منحنی صفرهای توابع موج دستگاه در ترازهای انرژی بالا نشان می دهد که این منحنیها یکدیگر را درون استادیوم دوار قطع نمی کنند.

مقدمه

آشوب یک مفهوم کلاسیکی است و چگونگی ظهور آن از دیدگاه مکانیک کوانتومی یک زمینه تحقیقاتی جدید به شمار می‌آید که از عمر آن بیش دو دهه نمی‌گذرد. مطالعه آشوب از دیدگاه مکانیک کوانتومی غالباً با حل معادله شرودینگر و بررسی آماری ترازهای انرژی و همچنین رفتار توابع موج در حالات برانگیخته بالا انجام می‌شود.

در این پایان نامه دستگاه استادیوم دوار به منظور بررسی پدیده آشوب از دیدگاه مکانیک کوانتومی مورد مطالعه قرار گرفته است.

دستگاه استادیوم دوار یک دستگاه سه بعدی است که شباهت زیادی به خوشه‌های رشد یافته C_{250} دارد. در اینجا به دلیل سادگی از یک طرف، و به دلیل مطالعه پدیده آشوب با پیچیده گیهای احتمالی خاص خود از طرف دیگر، جدار استادیوم دوار به صورت یک پتانسیل بینهایت در نظر گرفته شده است. به این ترتیب دستگاهی را که آشوبی بودن آن از دیدگاه مکانیک کلاسیک به اثبات رسیده است مورد بررسی کوانتومی قرار خواهد گرفت.

مطالعه کوانتومی دستگاه استادیوم دوار به صورت تحلیلی امکان پذیر نیست، و تا کنون هم به صورت عددی مورد بررسی قرار نگرفته است. در اینجا یک روش عددی مبتنی بر مفاهیم فیزیکی ارائه خواهد شد. در این روش سعی می‌شود که تابع موج دستگاه استادیوم دوار به ازای یک انرژی معین که بیان کننده حالت دستگاه است بر حسب یک پایه کامل مناسب بسط داده شود. انتخاب مناسب این پایه‌ها به منظور کاهش حجم محاسبات یا سرعت هر چه بیشتر همگرایی از یک طرف و افزایش دقت از طرف دیگر از اهمیت زیادی برخوردار است. یک روش مناسب برای حدس چنین پایه‌ای استفاده از تبدیل انتگرالی تابع موج دستگاه می‌باشد. هسته تبدیل انتگرالی فوریه یک تابع موج تخت است، که نمای این هسته را حاصل ضرب درونی بردار مکان در بردار تکانه تشکیل داده است. با توجه به ثابت بودن طول بردار تکانه که از پایستگی انرژی ناشی می‌شود، می‌توان به راحتی انتگرال روی انرژی را محاسبه کرد.

از طرفی با توجه به تقارن این دستگاه نسبت به زاویه سمتی و در نتیجه دانستن پاسخ مربوط به این قسمت، انتگرال روی زاویه سمتی نیز به آسانی قابل محاسبه خواهد بود. به این ترتیب ضرایب تبدیل انتگرالی فوری فقط تابعی از زاویه قطبی خواهند شد. این ضرایب برای این دستگاه در حالت کلی ثابت نبوده و باید محاسبه شوند. پس انتگرالده تبدیل انتگرالی فوری اکنون تابعی از زاویه قطبی، اندازه بردار مکان و اندازه انرژی دستگاه است. برای محاسبه ضرایب تبدیل انتگرال فوری باید انتگرالده آن را گسسته سازی کرد. این گسسته سازی باید هم در فضای مکان و هم در فضای تکانه انجام شود. گسسته سازی در فضای مکان به معنی گسسته سازی دستگاه استادیوم دوار است، نقاط گسسته سازی شده نقاطی هستند که باید شرایط مرزی بر آنها تحمیل گردد. شرایط مرزی برای دستگاه استادیوم دوار سخت هم ارز صفر شدن تابع موج در نقاط گسسته سازی شده است. گسسته سازی در فضای تکانه یعنی انتخاب نقاطی از این فضا که طول بردار تکانه را ثابت نگاه دارند. به این ترتیب به ازای هر نقطه روی دستگاه تابع موج به یک مجموع تبدیل خواهد شد که در آن جمع روی تمام جهات بردار تکانه بسته شده است، که باید به دلیل برآورده کردن شرایط مرزی صفر شوند. به این ترتیب به یک دسته معادلات خطی دست می‌یابیم که با حل آن ضرایب بسط بدست خواهند آمد. اما این دسته معادلات همگن هستند یعنی طرف راست آنها صفر است، که یک مجموعه جواب بدیهی صفر و بینهایت جواب غیر بدیهی خواهند داشت. اما بر اساس فیزیک مسئله می‌دانیم که فقط یکی از آنها قابل قبول است. برای رفع چنین مشکلی کافی است که یک نقطه دلخواه غیر از مرز دستگاه، که در آن تابع موج مقداری غیر از صفر را دارا است، بجای یکی از نقاط گسسته سازی شده در نظر گرفته شود. این دسته معادلات بر اساس یکتایی پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم بر حالات دستگاه فقط یک جواب خواهند داشت. برای دست یابی به چنین پاسخ یکتایی باید انرژی دستگاه منطبق بر یکی از ویژه مقادیر مجاز آن اختیار شود، که این امر با سعی و خطا و بررسی رفتار مناسب توابع موج امکان پذیر است. تابع موج دستگاه در حالت پایه رفتاری نرم و غیر نوسانی دارد و شرایط مرزی را برآورده می‌سازد. پس محاسبه تراز زمینه دستگاه بهترین نقطه شروع به حساب می‌آید. ترازهای انرژی بالاتر نیز در صورتی که تراز زمینه با دقت زیاد محاسبه شده باشد، با استفاده از شرط تعامد توابع موج حالات مختلف دستگاه بر یکدیگر به راحتی قابل محاسبه خواهند شد. در این روش دقت محاسبات تراز زمینه از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا محاسبه ترازهای بالاتر متکی بر تراز زمینه می‌باشند.

پس از محاسبه ترازهای انرژی دستگاه استادیوم دوار مطالعه آماری این ترازها آشوبی بودن این دستگاه را از دیدگاه مکانیک کوانتومی به اثبات خواهد رساند. نکته دیگری که می‌توان از روی آن به آشوبی بودن دستگاه پی برد، مطالعه رفتار توابع موج آن در حالات برانگیخته بسیار بالا است. برای این منظور بهتر است که ابتدا صفرهای تابع موج یک حالت را بدست آورده و سپس رفتار منحنی‌های ایجاد شده از اتصال این صفرها به یکدیگر را مورد بررسی قرار دهیم.

در فصل اول پایان نامه ضمن بیان قضیه KAM به تعریف آشوب در مکانیک کلاسیک پرداخته‌ایم. در انتهای این فصل دستگاه استادیوم دوار تعریف شده است، و مراجعی که آشوبی بودن این دستگاه را از دیدگاه مکانیک کلاسیک مورد بررسی قرار داده‌اند معرفی کرده‌ایم.

در فصل دوم ضمن معرفی آشوب از دیدگاه مکانیک کوانتومی به فعالیت‌های انجام شده در این زمینه پرداخته شده است. و در پایان این فصل نحوه توزیع آماری ترازهای انرژی مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل اول و دوم جنبه مقدمه داشته و در صورت آشنایی با مفاهیم مقدماتی آشوب می‌توان از مطالعه آنها صرف نظر کرد، زیرا کار اصلی ارائه شده در این پایان نامه از فصل سه به بعد آغاز می‌شود. با توجه به آنکه اطلاعات زیادی در مورد آشوب کوانتومی موجود نیست، به همین دلیل مقایسه دستگاه‌های انتگرال پذیر با دستگاه استادیوم دوار می‌تواند به فهم این پدیده در مکانیک کوانتومی کمک کند. بنابراین فصل سوم را به مطالعه دستگاه انتگرال پذیر کره اختصاص داده‌ایم. مطالعه این دستگاه از یک جنبه دیگر نیز حائز اهمیت است. آن جنبه این است که دستگاه انتگرال پذیر کره یکی از حالات حدی دستگاه استادیوم دوار است، که می‌توان توسط آن جوابهای عددی حاصل از حل دستگاه استادیوم دوار را در این حالت حدی با آن مقایسه و به صحت محاسبات اعتماد کرد. به همین دلایل فصل سه را به مطالعه دستگاه انتگرال پذیر کره اختصاص داده‌ایم.

در فصل چهارم دستگاه انتگرال پذیر استوانه را بنا به دلایل مشابه با آنچه که در مورد فصل سه ذکر شد، از دیدگاه مکانیک کوانتومی مورد بررسی قرار داده‌ایم. زیرا دستگاه استوانه نیز یکی دیگر از حالات حدی دستگاه آشوبی استادیوم دوار است. جداول ارائه شده در فصل سه و چهار در طبقه بندی ترازهای انرژی دستگاه استادیوم از اهمیت زیادی برخوردارند.

در فصل پنجم با استفاده از روشی که به طور مختصر در ابتدای این دیباچه به آن اشاره شد به بررسی کوانتومی دستگاه آشوبی استادیوم دوار پرداخته شده است. در این فصل نتایج محاسبات با دستگاههای کره و استوانه مقایسه شده و آشوبی بودن دستگاه استادیوم دوار تحقیق شده است.

فصل اول

آشوب در مکانیک کلاسیک

مقدمه

پس از ارائه قوانین حاکم بر حرکت ذرات کلاسیکی توسط نیوتن، بررسی دستگاههای دینامیکی با حل معادلات دیفرانسیل آغاز شد. ولی به دلیل شباهت بیشتر مکانیک به هندسه نسبت به جبر، پوانکاره^۱ در اواخر قرن نوزدهم با تلفیق این دو نگرش به حل هندسی معادلات دیفرانسیل پرداخت [۱] و [۲] و [۳]. سپس بیرخوف^۲ [۴] و لیاپانوف^۳ [۵] و آندرونوف^۴ [۶] و [۷] و [۸] و [۹]، نیز این نگرش جدید را توسعه دادند. پوانکاره دریافت که اغلب دستگاههای دینامیکی به روش اختلال قابل حل نمی باشند. هر چند که توسعه این مطالعات تحت الشعاع نظریات نوین نسبیت و کوانتوم به ریاضیدانان محول گردید، ولی پس از بیان قضیه KAM^۵ در سال ۱۹۵۴ علاقه به مطالعه دستگاههایی که از این قضیه پیروی

^۱ Poincare

^۲ Birkhoff

^۳ Liapunov

^۴ Andronov

^۵ نام این قضیه برگرفته از حروف اول Arnold و Moser ، Kolmogoroff می باشد، جهت اطلاعات بیشتر به صفحه ۸ رجوع شود.

نمی‌کردند در فیزیکدانان مجدداً به وجود آمد، و آنان با استفاده از دستگاههای مجرد ریاضی تعریف شده توسط ریاضیدانان قبلی به توسعه بیش از پیش این مطالعات پرداختند.

۱-۱ دستگاههای انتگرال پذیر

مطالعه کلاسیکی یک دستگاه دینامیکی را می‌توان در چار چوب مکانیک هامیلتونی با نوشتن معادلات حرکت آغاز نمود. تابع $F(p, q)$ می‌تواند یک ثابت حرکت بشمار آید، مشروط بر آنکه تابع صریحی از زمان نبوده و شناسه‌های آن پاسخهای معادلات حرکت باشند. ثابت بودن این تابع در طول یک مسیر در فضای فاز ایجاب می‌کند که با هامیلتونی دستگاه به مفهوم زیر جابجا شود

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(p, q) &= 0 \\ &= \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial p} \\ &= [H, F] \end{aligned} \quad (1-1-1)$$

که در آن $[H, F]$ گروه پواسون این ثابت حرکت با هامیلتونی دستگاه در فضای فاز است.

تعبیر هندسی قید (۱-۱-۱) گویای مماس بودن میدانهای برداری $\left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right)$ و $\left(-\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial F}{\partial p}\right)$ به ترتیب بر سطوح $F(p, q) = Cte$ و $H(p, q) = Cte$ در فضای فاز است. بنابراین مسیر حرکت در فضای فاز منطبق بر فصل مشترک این سطوح می‌باشد.

کلیه ثابتهای حرکت یک دستگاه دینامیکی، $F_1, F_2, F_3, \dots$ ، علاوه بر ار ضاء قید (۱-۱-۱) مستقل از یکدیگر نیز می‌باشند، یعنی هیچیک را نمی‌توان بصورت تابعی از ثابتهای دیگر بدست آورد. پس مسیر حرکت منطبق بر فصل مشترک کلیه سطوح، $F_i(p, q) = Cte$ ، در فضای فاز خواهد بود.

لازم است توجه شود که قیود فوق الذکر همواره برای حل معادلات حرکت کافی نمی‌باشند. پس باید قیود دیگری علاوه بر قیود قبلی معرفی شوند تا دستگاه هامیلتونی مورد مطالعه با برابر شدن تعداد معادلات و مجهولات، قابل حل گردد. در صورت تحقق شرایطی که به آن خواهیم پرداخت می‌توان یک دستگاه مختصات در فضای فاز بنا نهاد که پایه‌های آن معروف به متغیرهای کنش-زاویه^۶ می‌باشند.

یک دستگاه دینامیکی با n درجه آزادی یک فضای فاز $2n$ بعدی را تشکیل می‌دهد. اگر k ثابت حرکت از جمله $H(p, q) = E$ برای یک دستگاه دینامیکی یافت شود، آنگاه مسیر حرکت محدود به یک زیر فضای $(2n-k)$ بعدی از فضای فاز خواهد شد.

با دنبال کردن میدان برداری اول یک منحنی همچون C_1 ساخته می‌شود که هر نقطه دلخواه آن می‌تواند نقطه شروعی برای ساخت منحنیهای C_2 در امتداد میدان برداری دوم محسوب گردند. عکس این عمل در میدانهای برداری سازگار^۷ با یکدیگر امکان پذیر است، یعنی منحنی C_2 در امتداد میدان برداری دوم بعنوان نقاط شروع رسم منحنیهای C_1 در امتداد میدان برداری اول در نظر گرفته شود. هر یک از مجموعه این منحنیها یک سطح دو بعدی را در فضای فاز پدید می‌آورند. قیدی که این امر وعکس آنرا توأماً امکان پذیر می‌سازد یعنی میدانهای برداری سازگار با یکدیگر را پدید می‌آورد، این است که گروه پواسون دو تابع F_2, F_1 بعنوان ثابتهای حرکت صفر شود. بنابراین در حالت کلی وجود k انتگرال حرکت سبب تبدیل منحنیهای $(2n-k)$ بعدی باقیمانده به یک ساختار داخلی ساده در فضای فاز نمی‌گردد، مگر آنکه گروه پواسون هر ثابت حرکت با ثابتهای حرکت دیگر صفر شوند. به این دسته از دستگاهها دینامیکی دستگاههای انتگرال پذیر گویند.

^۶ Action-Angle Variables

^۷ Compatible

۲-۱ چنبره های ناوردا و متغیرهای کنش_زاویه

بنا به تعریف دستگاههای انتگرال پذیر به دستگاههایی گفته می شود که به تعداد درجات آزادی خود ثابت حرکت دارند. بنابراین مسیر حرکت این دستگاههای آرمانی در فضای فاز به یک خم Π بعدی محدود می شود که توسط Π میدان برداری سازگار با یکدیگر پوشیده شده است. بنابر یک قضیه مهم در توپولوژی^۸ شکل چنین خمی در فضای فاز بصورت یک چنبره خواهد بود، مشروط بر آنکه هیچیک از میدانهای برداری روی خم صفر نشوند. این خم با یک دگرذیسی هموار^۹ قابل تبدیل به یک مکعب Π بعدی است، که نقاط روی سطوح مقابل آن با هم یگانه شوند. مسیرهای حرکت درون چنین چنبره ناوردانی^{۱۰} قرار می گیرند. شرط انتگرال پذیر بودن یک دستگاه هم ارز یافتن پاسخهای معادلات حرکت صریح آن دستگاه می باشد. قدم بعد در مطالعه چنین دستگاههایی ساخت متغیرهای کنش_زاویه است. تبدیل خم به مکعب Π بعدی می تواند سبب تعریف مختصه های جدید $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ که به آنها متغیرهای زاویه گفته می شود، گردد. این متغیرها را معمولا به صورتی تعریف می کنند که تغییرات آنها مانند زاویه به بازه $[0, 2\pi]$ محدود باشد. اگر Π میدان برداری سازگار بعنوان پایه های چنین دستگاه مختصاتی در نظر گرفته شوند، آنگاه میدان برداری $\left(-\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q}\right)$ مؤلفه هایی ثابت در امتداد خم خواهد داشت، و مسیرهای حرکت خطوطی راست خواهند شد. مجموعه بسامدهای ω یک دستگاه دینامیکی که با $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ نمایش داده می شوند، بستگی به مقادیر ثابتهای حرکت یا شکل چنبره ناوردای ویژه خود در فضای فاز دارند. در حالت کلی نسبت این بسامدها به یکدیگر برای یک چنبره خاص غیر گویا است، این نسبت فقط برای بعضی از ثابتهای خاص حرکت می تواند یک عدد گویا باشد. در دو بعد تغییر این نسبت از دستگاهی به دستگاه دیگر سبب تولید اشکال لیسازو متفاوت می شود. حل کامل یک دستگاه دینامیکی نیازمند برداشتن قدم دیگری است که در زیر به آن می پردازیم.

^۸ سیمونز، ج. ف.، نیکام، اسدا... (مترجم)، آشنایی با توپولوژی و آنالیز نوین، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ اول ۱۳۶۵.

^۹ Smooth Deformation

^{۱۰} Invariant Tori

مختصه های w را می توان بعنوان مختصه های تعمیم یافته در یک مجموعه جدید از مختصه های کانونی یا بعنوان نیمی از مختصه های همیوگ کانونی یک دستگاه، برای فضای کامل فاز در نظر گرفت. نیمه دیگر این مختصه ها را با $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ نمایش داده و برای اختصار آنها را با I نشان می دهیم. پس انتگرال کنش روی $p dq$ به انتگرالگیری روی $I dw$ تبدیل می شود، که در این صورت I را می توان بطور صریح بصورت زیر محاسبه نمود.

اگر فقط w_i تغییر کند و تغییرات آن به بازه $[0, 2\pi]$ محدود باشد، یک منحنی بسته C_i در مختصات اولیه (p, q) از فضای کامل فاز پدید خواهد آمد. انتگرال کنش باید در هر دو دستگاه مختصات یک جواب را بدست بدهد، بنابر این رابطه زیر را، که در واقع دو دستگاه مختصات جدید و قدیم را به یکدیگر مرتبط می کند، می توانیم بنویسیم.

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \int_{C_i} p dq \quad (1-2-1)$$

متغیر جدید I نقش اندازه حرکت را نسبت به متغیر مکان w بازی می کند، که به ترتیب آنها را متغیرهای کنش و متغیرهای زاویه می نامند، که با کامل کردن یکدیگر بعنوان مؤلفه های همیوگ هم متغیرهای کنش-زاویه را پدید می آورند.

اغلب مراجع مکانیک کلاسیک تبدیل یک دستگاه انتگرال پذیر از مختصات اولیه (p, q) به مختصات جدید (I, w) را با استفاده از نظریه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول ژاکوبی^{۱۱} مورد بررسی قرار می دهند [۱۰]. در مقابل، توصیف بالا بعنوان اولین قدم تکیه بر یافتن متغیرهای زاویه ای w دارد. چنبرهای ناوردا با استفاده از متغیرهای کنش-زاویه قابل تشخیص خواهند بود، ضمن آنکه عکس این تشخیص نیز امکان پذیر است. اگر مسیرهای حرکت را بتوان بر حسب متغیرهای زاویه ای، به تعداد درجات آزادی دستگاه، نوشت، آنگاه چنبره ناوردای دستگاه بطور صریح بدست خواهد آمد. اغلب

^{۱۱} Jacobi

تحقیقات اخیر در زمینه آشوب در مکانیک کلاسیک از یافتن چنبره های ناوردا آغاز می گردد، در حالیکه این تحقیقات با یافتن متغیرهای زاویه ای در مکانیک سماوی دنبال می شوند.

۳-۱ حرکتهایی با چند دوره تناوب

مهمترین نکته در مورد متغیرهای کنش_زاویه چگونگی تغییرات آنها با زمان است. معادلات حرکت بر حسب این متغیرها بصورت ساده زیر نوشته می شوند

$$\frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial w_i} = 0, \quad \frac{dw_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i \quad (1-3-1)$$

همانطور که ملاحظه می گردد، بسامدهای ω از مشتق گیری هامیلتونی نسبت به کنشهای I بدست می آیند، و همچنین هامیلتونی به زوایای w بستگی ندارد، زیرا کنشهای I ثابتهای حرکت هستند. هامیلتونی در دستگاه مختصات جدید را با $H(I_1, I_2, \dots, I_n)$ نمایش می دهند.

متغیرهای کنش_زاویه یک مجموعه کامل از معادلات حرکت را بدست می دهند. جواب عمومی (۱-۳-۱) با رابطه $w_i = \omega_i t + \varphi_i$ داده می شود، که در آن بسامدهای ω با انتخاب کنش I تعیین می گردند، و زاویه فاز φ یک ثابت اختیاری است. هر چند که تعداد زیادی از متغیرهای زاویه گونه را می توان برای یک مسأله خاص بدست آورد، ولی باید توجه نمود که تحول همه آنها با زمان خطی نیست، و در واقع اینها آن دسته از متغیرهای زاویه ای که به بحث پیرامون آنها پرداختیم نیستند، زیرا مشکل اصلی حل انتگرالهای حرکت است و هر دسته غیر خطی از متغیرهای زاویه ای چاره ساز نیستند.

وقتی که تبدیل معکوس از متغیرهای کنش_زاویه به مجموعه اولیه (p, q) صورت می‌گیرد، مشاهده می‌شود که آنها تناوبی با دوره 2π نسبت به هر یک از زوایای w هستند. بنابراین طبیعی است که ارتباط متغیرهای قدیم و جدید با یک بسط فوری به شکل صوری زیر تعیین شود

$$(p, q) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} (P, Q)_{k_1, k_2, \dots, k_n} \exp[i(k_1 w_1 + k_2 w_2 + \dots k_n w_n)] \quad (2-3-1)$$

که در آن هر ثابت صحیح k از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند. فرمول بالا شکل ساده‌ای از چنین بسطی برای هریک از مؤلفه‌های p و q است. ثابتهای بسط P و Q متعلق به مجموعه اعداد مختلط بوده و به مقادیر کنشهای I بستگی دارند، اما بین آنها رابطه ساده $P_{\{k\}}^* = P_{\{-k\}}$ وجود دارد، که در آن $*$ ، معرف مزدوج مختلط است. این رابطه سبب می‌گردد تا جمع روی اندیسهای چند گانه حقیقی $\{k\} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ بسته شود. هرگاه حرکت یک دستگاه هامیلتونی را بتوان بصورت معادله $(2-3-1)$ نوشت، آن را چند تناوبی نامند.

از دیدگاه اختلالی چه بر سر مختصه‌های کنش_زاویه می‌آید؟ در اغلب حالات اختلال بصورت یک انرژی پتانسیل وابسته به زمان تناوبی با بسامد ω_0 نسبت به زمان t ، بصورت $V(q, t)$ ظاهر می‌شود. این پتانسیل را از دیدگاه کنش_زاویه می‌توان بصورت سری فوری زیر نمایش داد.

$$V(q, t) = \sum_{k_0, k_1, \dots, k_n} V_{k_0, k_1, \dots, k_n} \exp[i(k_0 w_0 + k_1 w_1 + \dots k_n w_n)] \quad (3-3-1)$$

که در آن ضرایب مختلط $V_{k_0, k_1, \dots, k_n}$ توابعی از I می‌باشند. شرایط تقارنی مشابه با آنچه که بر ضرایب بسط $(2-3-1)$ تحمیل شد، در اینجا نیز سبب حقیقی شدن ضرایب بسط فوری پتانسیل می‌گردد. وابستگی زمانی و تناوبی پتانسیل $V(q, t)$ در بسط سری فوری خود به خود در نظر گرفته شده است به طوری که می‌توان نوشت: $w_0 = \omega_0 t + \varphi$.

۱-۲ آشوب نرم و قفیه KAM

رفتار آشوبی در یک دستگاه دینامیکی غالباً به راحتی با مطالعه شکستگی چنبره ناوردا تحت اختلال قابل درک است. قضیه KAM به بحث پیرامون چگونگی روند ایجاد این شکستگی می‌پردازد، و نشان می‌دهد که این روند تدریجی است. وضعیت نتایج در فضای فاز آشوب نرم^{۱۱} نامیده می‌شود. این نتایج نشان می‌دهند که مسیرهای حرکت در جاهایی که چنبره دست نخورده باقی مانده باشد هموار است، هر چند که لکه‌های بیشمار ناهمواری^{۱۲} که مربوط به تشدید یا قفل شدگی فازی^{۱۳} است نیز مشاهده می‌گردد.

قضیه اصلی KAM و اثبات آن برای اولین بار توسط کلموگروف^{۱۵} در سال ۱۹۵۴ پیشنهاد گردید [۱۱] و سپس در سال ۱۹۶۲ موزر^{۱۶} با فرضیات پر دامنه تر خود به نتایج مشابهی دست یافت [۱۲]، اما جزئیات آن در سال ۱۹۶۳ توسط آرنولد^{۱۷} بدست آمد [۱۳]. گروه بنتین^{۱۸} نیز در سال ۱۹۸۴ نمایشی برای اثبات قضیه اصلی کلموگروف ارائه دادند به طوری که آن را به یک قضیه خود شمول^{۱۹} تبدیل می‌کرد [۱۴]. موضوع اصلی تمامی این مطالعات بررسی تکینگیهای ناشی از اختلال در فضای فاز می‌باشد.

از قضیه KAM که اصل آن به نقل از کتاب آرنولد (۱۹۷۸) در پانوشست (۲۰) صفحه بعد آورده شده است، چنین بر می‌آید که^{۲۰}، ایجاد یک اختلال کوچک در هامیلتونی یک دستگاه نا تهگن، نمی‌تواند

^{۱۱} Soft Chaos

^{۱۲} Rough Spot

^{۱۳} Phase-Locking

^{۱۵} Kolmogoroff

^{۱۶} Moser

^{۱۷} Arnold

^{۱۸} Benettin

^{۱۹} منظور از کلمه خود شمول (Self-Contained) این است که گروه بنتین این قضیه را با استفاده از کلیه فعالیت‌های قبلی انجام شده به صورت یک قضیه کلی که همه مطالب را خود به طور مستقل در بر داشته باشد تبدیل نمودند.

مسیرهای حرکت آن را در فضای فاز خیلی نسبت به مسیرهای اولیه دور نمایند، یعنی با روش اختلال غیر تبهگن هنوز هم می‌توان مسیرهای حرکت در فضای فاز را پیش بینی نمود.

۵-۱ دستگاه‌های آنوسوف و آشوب سخت

اگر فضای فاز M علاوه بر اندازه گیر μ دارای یک فاصله باشد، آنگاه دستگاه‌های دینامیکی را می‌توان بیش از پیش مورد مطالعه قرارداد، که در این فضا نماد $\|\cdot\|$ معرف فاصله است. اهمیت این شکل جدید در فضاهایی که بتوان از توابع آن دیفرانسیل گرفت، و یکریختیهای^{۲۱} آن نیز دیفرانسیل پذیر باشند، بیشتر نمود می‌یابد. در چنین شرایطی می‌توان از یک مماس بر یک نقطه صحبت به میان آورد. یک خم ریمانی^{۲۲} مهمترین مثال چنین فضاهایی است. تعاریف زیر به راحتی از نگاشتهای گسسته ϕ به جریانهای پیوسته ϕ_t قابل تعمیم می‌باشند. نگاشت $\phi: M \rightarrow M$ نیز به نگاشت خطی $\phi^*: TM_q \rightarrow TM_q$ قابل تعمیم است، که در آن TM_q فضای مماس M در نقطه $q \in M$ است.

"If an undisturbed system is non-degenerate, then for sufficiently small conservative Hamiltonian perturbations, most non-resonant invariant tori do not vanish, but are only slightly deformed, so that in the phase space of the perturbed system, too, there are invariant tori densely filled with phase curves winding around them conditionally periodically, with a number of independent frequencies equal to the number of degrees of freedom. These invariant tori form the majority in the sense that the measure of the complement of their union is small when the perturbation is small." ²⁰

^{۲۱} Automorphisms

^{۲۲} Riemannian Manifold

دستگاههای آنوسوف^{۲۳} در شرایط زیر صدق می‌کنند: فضای مماس در هر نقطه را می‌توان بصورت $TM_q = X_q \oplus Y_q$ تجزیه کرد، به طوری که برای هر عدد صحیح و مثبت n ، ثابتهای λ, b, a مستقل از n و طولهای $\|\eta\|, \|\xi\|$ بردارهای مماس η, ξ وجود دارند، به طوری که

$$\|(\phi^n)^* \xi\| \geq ae^{n\lambda} \|\xi\|, \quad \|(\phi^{-n})^* \xi\| \leq be^{-n\lambda} \|\xi\|, \quad \xi \in X_q \quad (1-5-1)$$

$$\|(\phi^n)^* \eta\| \leq be^{-n\lambda} \|\eta\|, \quad \|(\phi^{-n})^* \eta\| \geq ae^{n\lambda} \|\eta\|, \quad \eta \in Y_q$$

X_q, Y_q به ترتیب زیر فضاهای خطی انبساط و انقباض^{۲۴} یافته TM_q نامیده می‌شوند. پس یک دستگاه آنوسوف را تا حدودی می‌توان شبیه یکرختی خطی چنبره ها دانست.

اگر این شرایط بر یک جریان پیوسته ϕ_t اعمال گردد، فضای مماس TM_q به سه زیر فضای خطی بصورت $TM_q = X_q \oplus Y_q \oplus Z_q$ تجزیه می‌شود، که Z_q در امتداد جهت جریان است. یک بردار $\xi \in Z_q$ از نظر اندازه طول ثابت باقی می‌ماند، در حالیکه اندازه بردارهای $\xi \in X_q$ با گذشت زمان t بطور نمایی افزایش می‌یابند، و اندازه بردارهای $\eta \in Y_q$ با گذشت زمان t بطور نمایی کاهش می‌یابند. ابعاد X_q و Y_q حداقل ۱ است، در حالیکه بعد Z_q همیشه ۱ است. بهترین مثال برای دستگاه های آنوسوف جریانهای ژئودزیک^{۲۵} روی سطوحی با انحنای منفی^{۲۶} است، که توسط آنوسوف در سال ۱۹۶۹ مورد بررسی قرار گرفته است [۱۵].

زیر فضاهای انبساطی و انقباضی در فضای مماس هر نقطه را می‌توان در زیر خمهای هموار فضای فاز M به یکدیگر گره زد، که به آنها زیر خمهای ناپایدار (انبساطی) و پایدار (انقباضی) می‌گویند. پس فضای فاز شامل چند خانواده است، زیر خم هائی که بطور موازی یکدیگر را ترک می‌کنند از انتقال یک زیر خم از یک خانواده به زیر خم های خانواده دیگر که آنها نیز در حال ترک کردن یکدیگر هستند،

^{۲۳} Anosov Systems

^{۲۴} Subspace Linear Expanding and Contracting

^{۲۵} Geodesic Flows

^{۲۶} Negative Curvature

بدست می‌آید. هر زیر خم از زیر خم های موازی زیر خم دیگر را یا در یک نقطه (یکریختیهای گسسته) و یا در یک خط (یکریختیهای پیوسته) قطع می‌کند. هر خانواده از زیر خم ها کاملاً خم M را به یک خانواده از زیر خمهای هموار نا متقاطع تجزیه می‌کند. یک مسیر حرکت را می‌توان با وصل کردن نقاط تقاطع دو زیر خم، از دو خانواده متفاوت، به یکدیگر مشاهده نمود. مسیرهای همسایه بطور نمائی به سمت یکدیگر در امتداد زیر خم های پایدار میل می‌کنند، و بطور نمائی در امتداد زیر خم های ناپایدار واگرا می‌شوند.

این ساختار از فضای فاز به همان اندازه که ساده و روشن است، به همان اندازه نیز قابل انطباق با چنبره‌های ناوردای دستگاه های انتگرال پذیر می‌باشد. در هر دو حالت بعد زیر خم هائی که در حال ترک کردن یکدیگر هستند مساوی درجه آزادی است. مسیرهای حرکت در دستگاه های انتگرال پذیر بر یک زیر خم از فقط یک خانواده از زیر خم های در حال ترک کردن یکدیگر واقع است، در حالیکه در دستگاه های آنوسوف هر مسیر حرکت متعلق به یک زیر خم از هر خانواده می‌باشد، که این زیر خم ها از اتصال نقاط تقاطع دو خم که در حال ترک کردن یکدیگر هستند بدست می‌آیند. ساختار اخیر اجازه وقوع احتمالات زیادی را می‌دهد، در حالیکه احتمالات بسیار کمی برای سازگاری با یک خانواده منفرد از چنبره‌های ناوردا وجود دارد. تجزیه یک دستگاه آنوسوف به گونه‌ای که در بالا بیان شد در اثر اختلالهای کوچک پایدار است، در حالیکه چنبره ناوردا به راحتی قربانی مخرجهای کوچک یا تکینگیهای یاد شده در قضیه KAM می‌شود.

طبق اصل اول دستگاههای اسمیل^{۲۷} (۱۹۶۷)، دستگاههای آنوسوفی و دستگاههای دینامیکی از یک طبیعت مشابه برخوردارند، طبیعتی که از دستگاههای انتگرال پذیر بسیار دور است، که به آن آشوب سخت^{۲۸} می‌گویند.

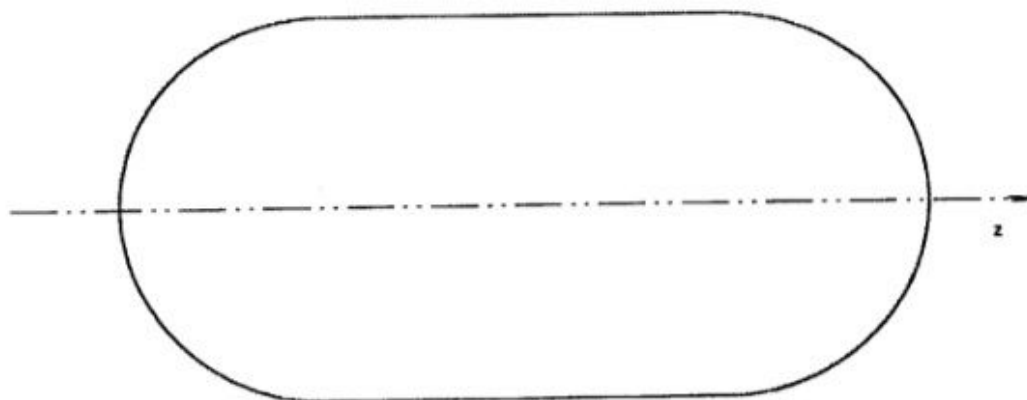
^{۲۷} Axiom-A of Smale

^{۲۸} Hard Chaos

۱-۶ بیلارد استادیوم و دستگاه استادیوم دوار

بیلارد یک چاه پتانسیل بینهایت، معمولاً با دو درجه آزادی، است. اگر بردار اندازه حرکت یک ذره کلاسیکی محبوس در یک بیلارد پس از برخورد به دیواره های آن تغییر علامت دهد آن را بیلارد آندریف^{۱۹} [۱۶]، و اگر این تغییر علامت مطابق قوانین حاکم بر انعکاس نور هندسی بدون اتلاف انرژی صورت پذیرد آن را بیلارد معمولی^{۲۰} می نامند. سینائی^{۲۱} در سال ۱۹۷۰ و بونیموویچ^{۲۲} در سال ۱۹۷۴ ضمن تعریف دو بیلارد متفاوت آشوبی بودن رفتار یک ذره کلاسیکی در آنها را مورد بررسی قرار دادند [۱۷] و [۱۸]. در اینجا توجه خود را به بیلارد بونیموویچ که بصورت زیر تعریف می گردد معطوف می کنیم

مکان هندسی نقاطی از صفحه محدود به دو نیم دایره هم شعاع که لبه های آنها با دو پاره خط موازی به هم مطابق شکل زیر وصل شده باشد را بیلارد بونیموویچ گویند.



شکل (۱-۱)

^{۱۹} Andreev Billiard

^{۲۰} Conventional Billiard

^{۲۱} Sinai

^{۲۲} Bunimovich

شکل هندسی این بیلارد شبیه دستگاه ایجاد شده توسط مرز حاشیه زمین فوتبال است که به همین دلیل معمولاً به آن استادیوم^{۳۳} نیز می‌گویند. نسبت طول پاره خطهای تعریف شده به شعاع یک نیم دایره از دستگاه استادیوم پارامتر دگردیسی η نامیده می‌شود، اگر $\eta = 1$ باشد، دستگاه استادیوم را استاندارد گویند. دوران دستگاه استادیوم حول محور تقارن Z ، که در شکل (۱-۱) نشان داده شده است، موجب پدید آمدن دستگاه دیگری با سه درجه آزادی می‌شود، که به آن دستگاه استادیوم دوار^{۳۴} می‌گوئیم. این دستگاه دوار در واقع استوانه ای است که مقاطع آن با دو نیم کره جایگزین شده باشند، به طوری که انحنای آنها نسبت به استوانه مثبت باشد [۱۹].

^{۳۳} Stadium

^{۳۴} Revolving Stadium

فصل دوم

آشوب در مکانیک کوانتومی

مقدمه

همانطور که در فصل قبل ملاحظه شد با توجه به مفاهیم ریاضی و فیزیکی آشوب در مکانیک کلاسیک، می توان دستگاههای آشوبی را بطور دقیق تعریف کرد. اما در گذار از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی ظاهراً آشوب جایگاه خود را حفظ نخواهد کرد. چون مسیرهای حرکت این دستگاهها در فضای فاز و حتی فضای مکان بصورت نمائی از یکدیگر جدا می شوند، بنابراین با معکوس کردن زمان نمی توان پی به مسیر واقعی حرکت آنها برد، و این همان مفهوم فیزیکی آشوب از دیدگاه مکانیک کلاسیک است. پس عدم حفظ جایگاه هنگام گذار امری طبیعی است، زیرا در اینجا به ذره کلاسیکی بسته موج نسبت داده می شود و بنابراین تعیین یک نقطه از فضای فاز به دلیل اصل عدم قطعیت غیر ممکن می گردد و باید بجای تعیین مسیر حرکت از احتمال حضور سخن به میان آورد.

علی‌رغم تمام مطالب بیان شده مطالعه کوانتومی یک دستگاه که از دیدگاه مکانیک کلاسیک آشوبی بشمار می‌آید و مقایسه نتایج آن با دستگاههای انتگرال پذیر را نمی‌توان نادیده گرفت، به طوری که، این مطالعات پیامدهای قابل توجهی را نیز علی‌رغم عمر کوتاهشان که بیش از دو دهه نیست به دنبال داشته است، که در این فصل به ذکر چند نمونه از آنها پرداخته خواهد شد. از این پس بنا به دلایل ذکر شده هرگاه از دستگاه آشوبی نام برده شود، منظور دستگاههایی هستند که مطالعات کلاسیکی وجود پدیده آشوب در آنها را به اثبات رسانیده باشد.

۲-۱ توابع موج در دستگاههای آشوبی

حالت یک دستگاه کوانتومی بطور منحصر به فردی در هر لحظه از زمان با تابع موج مختلط آن که با $\Psi(q, t)$ نمایش داده می‌شود، تعیین می‌گردد، که در آن q نیمه همیوگ کانونی بردار (p, q) در فضای فاز دستگاه است. این تابع موج باید مجدداً انتگرال پذیر بوده و در شرایط مرزی دستگاه صدق کند، ضمن آنکه تحول زمانی آن باید طبق معادله شرودینگر با چاه پتانسیل حقیقی تعریف شده $V(q, t)$ صورت پذیرد.

بنابراین هر گونه نشانه‌ای از آشوب را باید در $\Psi(q, t)$ جستجو کرد، اما با توجه به جداسازی بخش زمانی توابع موج با یک بسامد معین $\omega = \frac{E}{\hbar}$ ، بصورت $\Psi(q, t) = \phi(q) \exp(-i\omega t)$ ، انتظار می‌رود که ظهور پدیده آشوب در چارچوب مکانیک کوانتومی در ویژه توابع $\phi(q)$ حاصل از حل معادله مستقل از زمان شرودینگر نهفته باشد.

چگونگی ظهور پدیده آشوب کاملاً روشن نیست، زیرا ویژه توابع $\phi(q)$ هموار بوده و از دیدگاه ریاضی بصورت یک سری همگرا بر حسب مختصه‌های q قابل بسط می‌باشند. به همین دلیل حالت‌های با انرژی پائین مورد توجه نمی‌باشند، چون ویژگی‌هایی از قبیل کمینه یا بیشینه آنها به راحتی قابل تشخیص است.

فراز زیر به خلاصه ای از نظرات گاتزویلر^۱ (۱۹۹۰) در این مورد اشاره دارد [۲۰]

"اگر قرار باشد که آشوب در مکانیک کوانتومی در ویژه حالتها مشاهده شود، تنها زمانی می توان آنها را دید که دستگاه در ترازهای برانگیخته بسیار بالا قرار داشته باشد. چون در حالت کلی بررسی توابع موج دشوار است، و محاسبه ترازهای برانگیخته آنها نیز سخت است، پس پیش بینی نتایج قبل از انجام هر گونه محاسبه کار مشکلی است. روشهای بسیار زیادی تا کنون مورد بررسی قرار گرفته، اما تا کنون قوانین منسجمی ارائه نشده است. نتایج عددی و تعبیرشان معیار ساده ای برای حضور آشوب یا عدم آن به دست نداده اند، هر چند که اطلاعات مفیدی را از بررسی توابع موج ارائه کرده اند. در این راستا نقطه نظرات کوانتوم مکانیکی متفاوت اکارت^۲ [۲۱]، بسیار ارزشمند می تواند باشد."

۲-۲ ویژه توابع یک دستگاه انتگرال پذیر

چون عملگر هامیلتونی H_{op} در رابطه زیر

$$(E - H_{op}(p'', q''))G(q''q'E) = \delta(q'' - q') \quad (1-2-2)$$

که در آن $G(q''q'E)$ تابع گرین مربوط به یک هندسه دلخواه است، در غیاب میدان مغناطیسی هم خطی و هم حقیقی است، ویژه توابع آن را همواره می توان حقیقی اختیار کرد که در این صورت بدون هیچ مشکلی قابل رسم خواهد بود. آیا می توان از روی شکل توابع موج، انتگرال پذیر بودن یا نبودن یک دستگاه را تعیین کرد؟ پیکاکس^۳ در سال ۱۹۷۲ طرحی را به این منظور پیشنهاد داد [۲۲]، که به کارهای

^۱ Gutzwiller

^۲ Eckhardt

^۳ Pechukas

قبلی میلر^۲ و گود^۵ در سال ۱۹۵۳ بر می گردد [۲۳]. همانطور که در بالا اشاره شد چنین محکمانی لزوماً محدود به حالت‌های برانگیخته بسیار بالا می باشند.

ویژه توابع یک دستگاه کوانتومی را احتمالاً می توان با استفاده از بعضی از روشهای حل دستگاههای انتگرال پذیر کلاسیکی نیز بدست آورد، که می توان به تبدیلات کانونی قبل از همه روشهای دیگر اشاره کرد، به ویژه که بیرکوف^۶ طرح بهنجار سازی آن را نیز ارائه کرده است [۲۴]. ابتدا توماس^۷ در سال ۱۹۴۲ [۲۵]، سپس اکارت در سال ۱۹۸۶ [۲۶]، در این جهت فعالیت‌هایی را انجام داده اند، که تعمیم تمامی این تلاشها به مکانیک کوانتومی با موفقیت توام بوده است.

۲-۳ طرح خطوط صفر توابع موج

کورانت^۸ و هیلبرت^۹ در سال ۱۹۵۳، توابع موج یک مربع واحد^{۱۰} را به صورت زیر در نظر گرفتند

$$\phi_1 = \sin(k\pi x) \sin(l\pi y) \quad , \quad \phi_2 = \sin(l\pi x) \sin(k\pi y) \quad (1-3-2)$$

که در آن $0 < k < l$ ، و با اعمال شرایط مرزی دریکله $\phi = 0$ بطور جداگانه بر هریک از توابع موج فوق، مشاهده کردند که طرح خطوط صفر هر دوی آنها شبیه به یکدیگر و به مانند طرح ساده تخت شطرنج است. ولی با در نظر گرفتن ترکیب زیر

$$\phi_1 + (1 + \varepsilon)\phi_2 \quad , \quad \varepsilon \neq 0 \quad (2-3-2)$$

^۲Miller

^۵Good

^۶Birkhoff

^۷Thomas

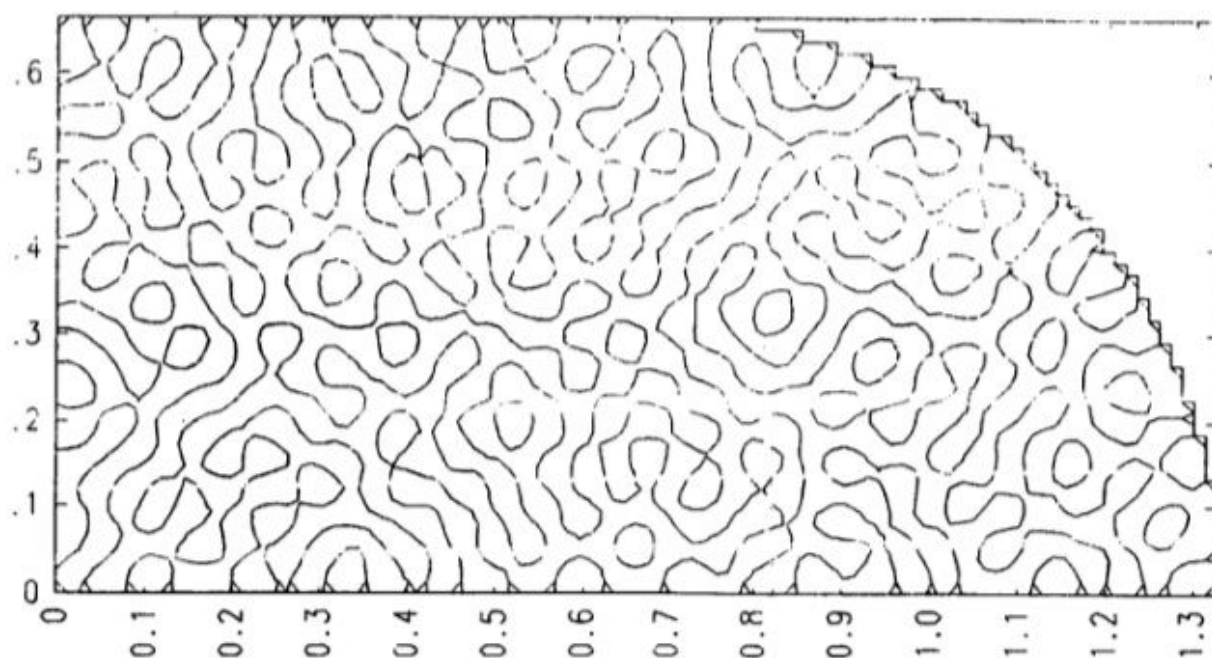
^۸Courant

^۹Hilbert

^{۱۰} منظور از مربع واحد (Unit-Square) مربعی است که مساحت آن یک باشد.

در یافتند که خطوط صفر توابع موج یکدیگر را قطع نکرده و طرح ساده تخته شطرنج بر هم خورده است.

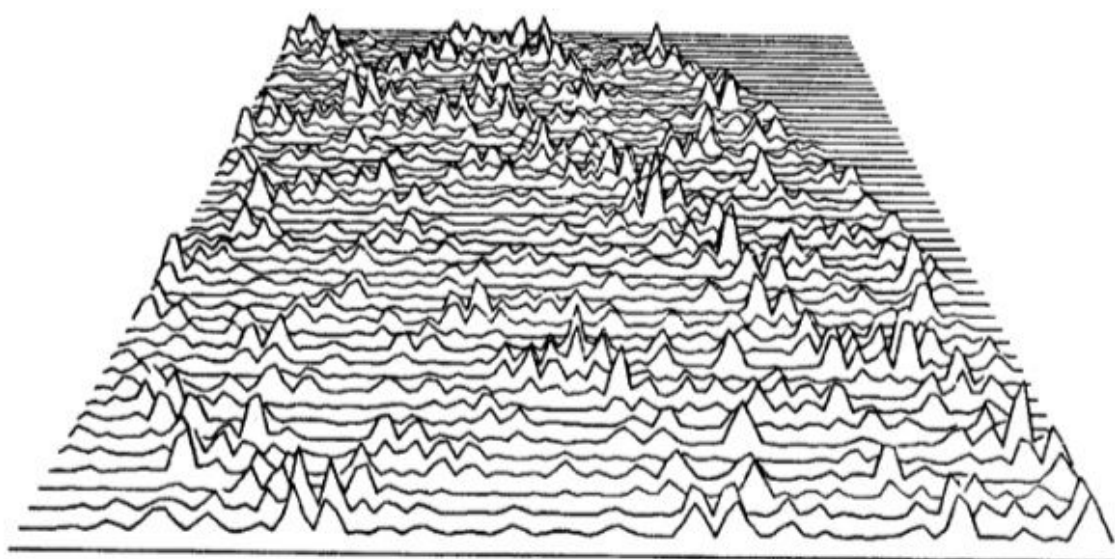
بررسیهای مشابهی روی دستگاه استادیوم، که آشوبی بودن آن بعنوان یک دستگاه هامیلتونی قبلاً توسط بنیمویچ در سالهای ۱۹۷۴ و ۱۹۷۹ همانطور که در فصل قبل به آن اشاره کردیم به اثبات رسیده است، توسط مکدونالد و کافمن^{۱۱} صورت گرفته است^{۱۲}. آنها ابتدا در سال ۱۹۷۹ یک طرح پیشنهادی برای محاسبه ویژه توابع استادیوم و ترسیم نقش صفرهای آنها ارائه کردند [۲۷]. شکل (۱-۲) تصویری از صفرهای توابع موج آشفته و نامنظم را نشان می دهد که به هیچ وجه قابل پیش بینی نیستند. در سال ۱۹۸۸ گروه مکدونالد نهایتاً طرح پیشنهادی خود را تکمیل نمود [۲۸]، که در آن نمایشهای کیفی زیادی از توابع موج، که یک نمونه از آن در شکل (۲-۲) نشان داده شده است، وجود دارد.



شکل (۱-۲) خطوط صفر در دستگاه استادیومی که مساحت آن به π بهنجار شده است، این خطوط با استفاده از یک ویژه حالت با پارینه فرد خرد و با انرژی ۱۰۰/۲۹۷ رسم شده اند (مکدونالد (۱۹۸۳)).

^{۱۱}McDonald and Kaufmann

^{۱۲}قنبری نیز در سال ۹۸ دستگاه استادیوم را تحت راهنمایی استاد دکتر مهدی بارزی، بصورت کوانتومی مورد مطالعه قرار داده است [۲۹].



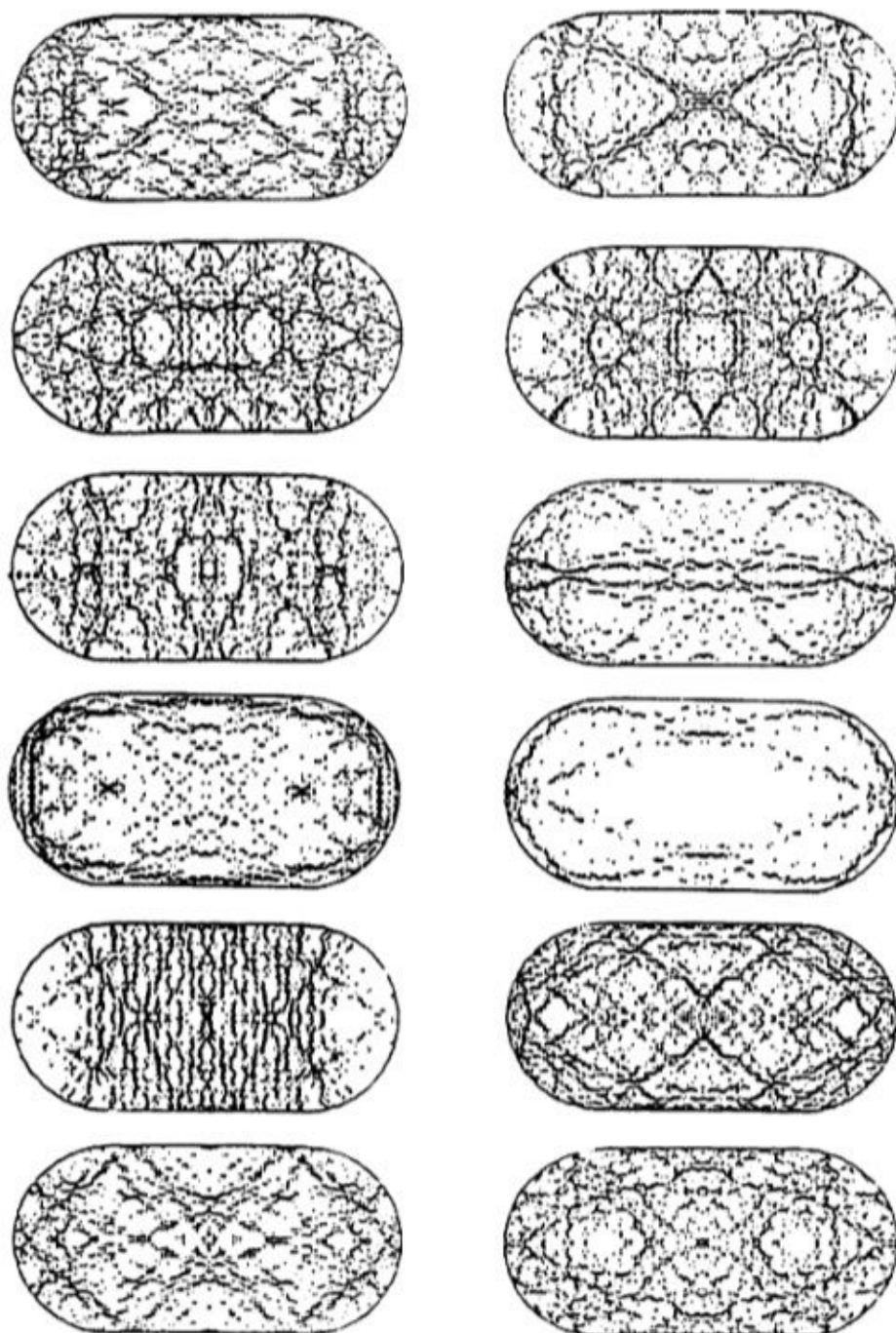
شکل (۲-۲) توزیع صوری شدت مناظر با حالت شکل (۱-۲) (مکدونالد (۱۹۸۳)).

۲-۴ زخمهای کوانتومی

هالر و همکارانش^{۱۳} نیز در سال ۱۹۸۹ سعی کردند با جزئیات بیشتری به مطالعه ویژه توابع دستگاه استادیوم بپردازند [۲۹]. آنها ترازهای برانگیخته زیادی را محاسبه کرده و رفتار توابع موج دستگاه استادیوم را در ترازهای بسیار بالا (تراز ده هزارم) مورد بررسی قرار دادند. شکل (۳-۲) صفرهای مجذور چند ویژه تابع را نشان می دهد، که بیش از صد نقطه صفر در هر جهت از فضای مکان وجود دارد.

^{۱۳}Heller, O'Connor, and Gehlen (1989)

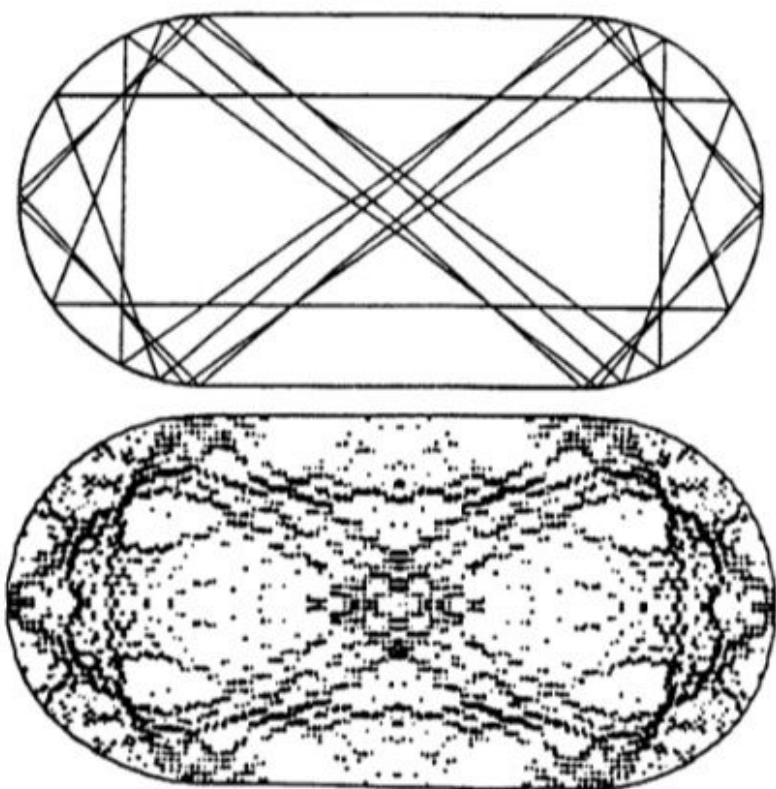
نتایج مشاهده شده در شکل (۳-۲) نشان می دهد که الگوی شدتها حاصل از صفر شدن مجذور توابع موج^{۱۴} در دستگاه استادیوم متفاوت می باشد.



شکل (۳-۲) چند نمونه از ویژه توابع دستگاه استادیوم با پارینتۀ فرد-خرد، که تقریباً از تراز ۸۳۹۰ به بعد شروع شده اند. (گروه هلر (۱۹۸۹)).

^{۱۴} منظور از الگوی شدت (Intensity Pattern) در واقع تراکم نقاط صفر مجذور ویژه توابع در دستگاه استادیوم است. که چون وقتی این تراکم در جانی نسبت به جاهای دیگر از حدی بیشتر شود، مانند زخمی عمیق و در حال التیام روی صورت خواهد بود، اصطلاح Scars را برای آن بکار برده اند.

همانطور که ملاحظه می شود در بعضی از نواحی این شدت یا تراکم صفرها بیشتر از نواحی دیگر به چشم می خورد، که هلر آنها را زخمهای کوانتومی^{۱۵} نامیده است. این زخمها حاصل نوسانات شدید ویژه توابع در بعضی نواحی نسبت به نواحی دیگر است، که سبب می گردد آن نواحی دستگاه بصورت خطهائی باریک از نواحی دیگر جدا شوند، که اگر به آنها دقت شود رفتارهای منظم و تناوبی کلاسیکی را می توان در آنها مشاهده کرد. در شکل (۲-۳) تعدادی از آنها که رفتار تناوبی یک ذره کلاسیکی را تداعی می کنند، نشان داده شده است. برای انجام مقایسه بهتر می توان به شکل (۲-۴) مراجعه کرد، که در آن رفتار کلاسیکی و کوانتومی یک ذره در استادیوم بطور جداگانه نشان داده شده است.



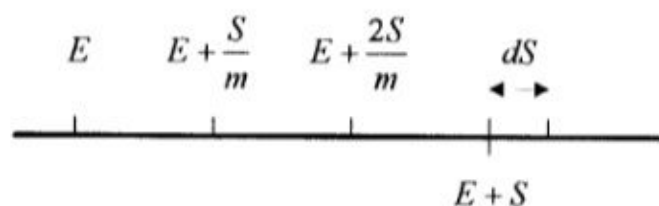
شکل (۲-۴) شکل بالا یک مدار تناوبی ناپایدار را در دستگاه استادیوم نشان می دهد، و هم ارز کوانتومی آن در ترازهای برانگیخته بسیار بالا نیز در زیر آن به منظور مقایسه نشان داده شده است (گروه هلر (۱۹۸۹)).

^{۱۵} به پا نوشت ۱۴ مراجعه شود.

۵-۲ تعریف یک تابع مناسب برای مطالعه همبستگی تراز

ابتدا توزیع جدائیها^{۱۶} را به منظور تمایز بین احتمالات مختلف تعریف می کنیم. فرض کنید $E_1, E_2, \dots, E_n$ ترازهای متوالی در بازه $\delta E(E_1 \leq E_2 \leq \dots)$ و $S_1, S_2, \dots, S_n$ جدائی بین آنها، $S_i = E_{i+1} - E_i$ باشند. مقدار میانگین S_i ها جدائی میانگین D است. جدائیهای نسبی را نیز بصورت $t_i = \frac{S_i}{D}$ تعریف می کنیم. تابع چگالی احتمال $P(t)$ به این صورت تعریف می شود که، $P(t)dt$ احتمال آن است که هر t_i مقداری بین t و $t + dt$ داشته باشد.

در یک حالت ساده که در آن ترازهای انرژی همبستگی^{۱۷} نداشته باشند احتمال آنکه هر E_i بین E و $E + dE$ قرارگیرد مستقل از E است و بصورت ساده $p dE$ می باشد، که در آن $p = D^{-1}$ تعداد متوسط ترازها در یک بازه واحد انرژی است. احتمال یک جدائی S یعنی احتمال آنکه به ازای تراز داده شده E ، هیچ تراز دیگری در بازه $(E, E + S)$ وجود نداشته باشد و فقط یک تراز در $E + S$ تا $E + S + dS$ وجود داشته باشد. برای این منظور بازه S را به m قسمت مساوی تقسیم می کنیم.



چون ترازها مستقل از یکدیگر فرض شده اند احتمال عدم قرارگیری در بازه $(E, E + S)$ برابر با حاصل ضرب کلیه احتمالات عدم قرارگیری در هر قسمت m می باشد. اگر m خیلی بزرگ، و بنابراین $\frac{S}{m}$ خیلی کوچک باشد، این احتمال را می توان بصورت زیر نوشت.

^{۱۶}Distribution of Spacings

^{۱۷} منظور از همبستگی (Correlation) بین ترازها در واقع نظم بین ترازها است، پس ترازهای همبسته ترازهایی هستند که بتوان بین آنها ارتباط برقرار کرد مانند ترازهای انرژی دستگاههای انتگرال پذیر، و ترازهای غیر همبسته برعکس ترازهای همبسته می باشند مانند دستگاههای آشوبی.

$$\left(1 - \rho \frac{S}{m}\right)^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} e^{-\rho S} \quad (1-5-2)$$

بعلاوه، احتمال وجود یک تراز در $E + S$ تا $E + S + dS$ برابر ρdS می باشد. بنابراین احتمال اینکه به ازای انرژی داده شده E از یک طرف هیچ ترازى در بازه $(E, E + S)$ وجود نداشته باشد و از طرف دیگر فقط یک تراز در $E + S$ تا $E + S + dS$ وجود داشته باشد را می توان بصورت زیر بدست آورد

$$e^{-\rho S} \rho dS \quad (2-5-2)$$

رابطه فوق را بر حسب متغیر $t = \frac{S}{D} = \rho S$ می توان بصورت زیر نوشت

$$p(t)dt = e^{-t} dt \quad (3-5-2)$$

رابطه فوق را بعنوان توزیع پواسون می شناسند.

۶-۲ حدسهای ویگنر

وقتی که نتایج تجربی از قطعیت لازم بر خوردار نباشند، قوانین زیر را می توان برای توزیع جدائی مورد استفاده قرار داد [۳۰].

(۱) دنباله ای از ترازها را که از نظر اسپین و پاریته یکسان باشند یک دنباله ساده^{۱۸} نامند، و تابع چگالی چنین دنباله هائی را به ازای یک جدائی داده شده می توان بصورت زیر بدست آورد

$$p_w(t) = \frac{\pi}{2} t \exp\left(-\frac{\pi}{4} t^2\right), \quad t = \frac{S}{D} \quad (1-6-2)$$

^{۱۸}Simple Sequence

(۲) ترازهای با اسپین و پاریته متفاوت غیر همبسته هستند.

دو استدلال ساده که به قاعده (۱) منجر می شوند، توسط ویگنر^{۱۹} [۳۱]، و لاندائو و اسموردنسکی^{۲۰} [۳۲]، ارائه شده است. این توقع منطقی به نظر می رسد، که در یک تراز داده شده E ، احتمال یافتن تراز دیگری حول $E + S$ متناسب با S باشد، البته برای S های خیلی کوچک. حال اگر این را به تمام S ها تعمیم دهیم و بعلاوه با فرض احتمال بدست آوردن بازه های متفاوت طولی $\frac{S}{m}$ با تقسیم S بر m و اینکه قسمتهای مساوی هنوز هم مستقلند، به رابطه زیر می رسیم

$$p(t)dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{r=0}^{m-1} \left(1 - \frac{tr}{m} \frac{1}{m} a \right) at dt$$

$$= ate^{-(1/2)at^2} dt \quad (2-6-2)$$

ثابت a را می توان از شرط بهنجارش زیر بدست آورد

$$\int_0^{\infty} tp(t)dt = 1 \quad (3-6-2)$$

نکته دیگری که توجه به آن ضروری است این است که توزیع جدایی بین ترازهاییکه در n نقطه همبسته اند رفتاری خطی دارند [۳۲].

^{۱۹}Wigner

^{۲۰}Landau and Smorodinsky

فصل سوم

بررسی کوانتومی یک ذره در کره

مقدمه

یکی از مباحثی را که می توانیم در سه بعد بصورت تحلیلی مورد مطالعه قرار دهیم، بررسی کوانتومی یک ذره محبوس در چاه پتانسیل کروی با دیواره بینهایت است، مراد از دیواره بینهایت این است که تابع موج ذره قادر به نشت از دیواره کروی آن نیست، که به آن در این شرایط کره سخت نیز می گویند بحث فوق سنگ بنای مدل لایه ای در هسته ها و پراکندگی نوکلئونهای غیر یکسان از یکدیگر می باشد [۳۳]. البته فیزیکدانان هسته ای باتوجه به اطلاعات تجربی موجود در ارتباط با نیروهای هسته؛ پتانسیل های نرم مناسبتی جایگزین این پتانسیل سخت می کنند [۳۴]، بگونه ای که نتایج محاسبه با نتایج تجربی سازگارتر باشد.

اما آنچه که سبب علاقه مابه بررسی جامع یک ذره کوانتومی در کره سخت شده است، این است که کره را می توان حالت حدی استادیوم دوار وقتی که طول استادیوم دوار درمقابل شعاع دو نیم کره انتهائی آن بسیار ناچیز باشد، تلقی نمود. پس اگر می خواهیم به نتایج محاسبات عددی خود در مورد استادیوم دوار اعتماد کنیم، بایستی نتایج در این حالت حدی بر پاسخهای تحلیلی کاملاً منطبق باشد. در معادله $j_l(k_{nl}a) = 0$ ، $j_l(k_{nl}a)$ تابع بسل کروی، a شعاع کره، l معرف اندازه حرکت زاویه ای، n شماره تراز انرژی به ازای یک l معین و k_{nl} معرف انرژی ذره در حالت $|n, l\rangle$ ، است که البته حل چنین معادله ساده ای نیازمند کار محاسباتی چندان مفصلی نیست، و پاسخهای آن براحتی قابل حصول می باشند، از طرف دیگر طبقه بندی ترازهای انرژی یک ذره کوانتومی در کره به ما این امکان را خواهد داد تا در آینده بتوانیم نحوه توزیع انرژی دستگاه استادیوم دوار را با آن مقایسه کنیم و ظهور آشوب از دیدگاه مکانیک کوانتومی را بهتر دریابیم.

۳-۱ حل تحلیلی یک ذره کوانتومی در کره

تابع پتانسیل را در این حالت بصورت زیر تعریف می کنیم

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \infty & r \geq a \end{cases} \quad (1-1-3)$$

بدین گونه این ذره در پوسته ای کروی به شعاع a ، محبوس است. چنانکه می دانیم در خارج از پوسته کروی نفوذ ناپذیر تابع موج ذره صفر است. معادله شرودینگر در داخل پوسته را بصورت زیر می نویسیم

$$\left[\frac{1}{r^2} \left(r \frac{d}{dr} \right) \left(r \frac{d}{dr} \right) + r \frac{d}{dr} - \frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2 \right] \Psi(r, \theta, \varphi) + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (2-1-3)$$

با توجه به تقارن کروی مساله می توانیم معادله (۳-۱-۲) را با استفاده از روش جدا سازی متغیرها حل کنیم اما با توجه به شناختی که از ویژگی‌ها توابع و ویژگی‌ها مقادیر عملگر L^2 بصورت زیر

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3-1-3)$$

داریم، کافی است که فقط متغیر r را از متغیرهای θ, φ با انتخاب تابع موج به شکل زیر جدا کنیم

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4-1-3)$$

در این صورت معادله (۳-۱-۲) به معادله شعاعی زیر تبدیل می شود

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (5-1-3)$$

که در آن $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ می باشد. پاسخ کلی معادله (۳-۱-۵) بصورت زیر می باشد

$$R(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_{nl} j_l(k_{nl}r) + B_{nl} n_l(k_{nl}r) \right) \quad (6-1-3)$$

که در آن $j_l(k_{nl}r)$ ، $n_l(k_{nl}r)$ به ترتیب توابع نیومن و بسل کروی و A_{nl} ، B_{nl} ضرایب بسط می باشند. تابع $n_l(k_{nl}r)$ در $r=0$ ، تحلیلی نیست، و این متناقض با احتمال متناهی حضور ذره می باشد. پس برای بدست آوردن تابع موج ذره در داخل کره باید کلیه ضرایب B_{nl} را مساوی صفر قرار دهیم، در این صورت خواهیم داشت

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_l \sum_n \sum_{m=-l}^l A_{nlm} j_l(k_{nl}r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (7-1-3)$$

برای یک وجه خاص تابع موج (۷-۱-۳) را بصورت زیر نمایش می‌دهیم

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) \propto j_l(k_{nl}r)Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (۸-۱-۳)$$

ضریب تناسب را می‌توان با استفاده از شرط بهنجارش تعیین نمود که در نحوه استفاده ما از توابع موج از اهمیت چندانی برخوردار نیست.

۳-۲ معادله ویژه مقدار

برای محاسبه ویژه مقادیر یک ذره کوانتومی در کره سخت کافی است که شرایط مرزی پتانسیل کروی را بر ویژه توابع (۸-۱-۳) که گویای یک حالت معین $|n, l, m\rangle$ ، با سه عدد کوانتومی است، بصورت زیر تحمیل کنیم

$$\Psi_{nlm}(a, \theta, \varphi) \propto j_l(k_{nl}a)Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0 \quad (۱-۲-۳)$$

آن دسته از k_{nl} هایی که رابطه (۱-۲-۳) را برآورده سازند ویژه مقادیر انرژی $E_{nl} = \frac{\hbar^2 k_{nl}^2}{2m}$ ، بدست خواهند داد.

همانطور که ملاحظه می‌گردد ویژه مقادیر انرژی به کوانتس روی زاویه سمتی بستگی ندارند و فقط به ویژه مقدار اندازه حرکت زاویه ای کل l وابسته اند. m ها تنها شکل تابع موج یا احتمال حضور ذره در جهت‌های مختلف را تغییر می‌دهند بدون آنکه در ارضا شرایط مرزی نقشی ایفا کنند. نکته مهم دیگری که در ارتباط با ویژه مقادیر مولفه سوم اندازه حرکت زاویه ای توجه به آن ضروری به نظر می‌رسد این است که به ازای یک ویژه مقدار معین اندازه حرکت زاویه ای کل ذره مجبوس در کره، ویژه مقادیر مولفه

سوم اندازه حرکت زاویه‌ای می‌توانند مقادیری بین $-l$ تا l را به خود اختصاص دهند یعنی:

$$-l \leq m \leq l. \text{ پس } m \text{ ها باعث تبهگنی ویژه توابع از مرتبه } 2l + 1 \text{ خواهند شد.}$$

تغییر m در هماهنگهای کروی یعنی $y_{lm}(\theta, \varphi)$ ها به ازای یک l ثابت بدون آنکه انرژی دستگاه را تغییر دهند سبب می‌شوند که نحوه توزیع ابر ذره‌ای در کره اشکال مختلفی را به خود بگیرد، که همانا احتمال حضور ذره در مناطق مختلف کره خواهد بود. مثلاً اگر $l = 0$ باشد m تنها مقداری را که می‌تواند به خود اختصاص دهد صفر است. در این حالت توزیع احتمال ذره‌ای بصورت کاملاً کروی خواهد بود. این امر بیانگر آن است که احتمال حضور ذره به زاویه سمتی و زاویه قطبی بستگی ندارد، ولی چون تابع بسل کروی در این حالت بصورت یک تابع نوسانی میرا عمل می‌کند، احتمال حضور با دوری از مرکز و نزدیک شدن به دیواره‌ها کاهش می‌یابد. اگر $n = 1$ باشد احتمال حضور ذره از مرکز کره که مقدار آن ماکزیمم است تا روی مرز بطور پیوسته کاهش می‌یابد. اما اگر $n = 2$ باشد با توجه به اینکه تابع بسل کروی و در نتیجه تابع موج یکبار دیگر قبل از مرز یعنی درون کره، به دلیل انرژی بیشتر، ذره نیز صفر می‌شود احتمال حضور ذره از مرکز که ماکزیمم است رو به کاهش گذاشته تا به صفر برسد، سپس افزایش یافته تا به یک مقدار ماکزیمم کمتر از ماکزیمم اولی برسد، و سپس تا مرز کروی بطور پیوسته کاهش می‌یابد. توصیف احتمال حضور ذره به ازای l های بزرگتر از صفر پیچیده‌تر است بنابراین در فرصت مناسب (۳-۴)، آنها را با محاسبه و ترسیم شکل نمایش خواهیم داد. برای محاسبه k_{nl} ها از رابطه (۳-۲-۱) نتیجه می‌گیریم که باید معادله $j_l(k_{nl}a) = 0$ را حل کنیم. اگر شعاع کره را واحد فرض کنیم کافی است که صفرهای تابع بسل کروی $j_l(k_{nl})$ را بدست آوریم. اما معادله $j_{nl}(k_{nl}) = 0$ ، را می‌توان به شکل زیر نوشت، [۳۵]

$$j_l(x) = x^l \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l j_0(x) = 0 \quad (۳-۲-۲)$$

که فقط در حالت خاص $l = 0$ به معادله ساده $j_0(x) = \frac{\sin x}{x} = 0$ تبدیل می‌شود. حتی حالت $l = 1$ که ساده‌ترین حالت بعد از $l = 0$ بشمار می‌رود معادله (۳-۲-۲) را به معادله $\tan x = x$ تبدیل می‌کند، که به راحتی قابل حل نیست. پس باید روش مناسبی برای حل آن ارائه دهیم.

۳-۳ حل معادله $j_l(x) = 0$

برای تحقیق در مورد آشوبی بودن یک دستگاه نیاز به تعیین توزیع ترازهای انرژی است. و لذا می‌بایست تعداد متنابهی از این ترازها تعیین شود، این امر مستلزم محاسبه صفرهای تابع بسل بوده و لذا در پایین یک طریق عملی آن را ارائه کنیم.

برای حل معادله $j_l(x) = 0$ از شکل انتگرالی تابع بسل کروی بصورت زیر استفاده می‌کنیم، [۳۵]

$$j_l(x) = \frac{x^l}{2^{l+1} l!} \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) (\sin \theta)^{2l+1} d\theta \quad (1-3-3)$$

رابطه فوق را به صورت زیر گسسته می‌کنیم.

$$j_l(x) = \frac{x^l}{2^{l+1} l!} \sum_{i=1}^N \cos(x \cos(i\Delta\theta)) (\sin(i\Delta\theta))^{2l+1} \Delta\theta \quad (2-3-3)$$

که در آن بازه $[0, \pi]$ را به N قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم $(\Delta\theta = \frac{\pi}{N})$.

بنابراین برای یافتن صفرهای تابع بسل کروی کافی است که معادله زیر را حل کنیم

$$j_l(x) = \frac{x^l}{2^{l+1} l!} \sum_{i=1}^N \cos(x \cos(i \frac{\pi}{N})) (\sin(i \frac{\pi}{N}))^{2l+1} = 0 \quad (3-3-3)$$

معادله (۳-۳-۳) به ازای هر l غیر صفر جواب بدیهی $x = 0$ را دارد و جوابهای دیگر آن از حل معادل

$$\sum_{i=1}^N \cos(x \cos(i \frac{\pi}{N})) (\sin(i \frac{\pi}{N}))^{2l+1} = 0 \quad (4-3-3)$$

بدست خواهند آمد. پس هر x که مجموع فوق را به سمت صفر میل دهد جواب مساله خواهد بود. طبیعی است که هر چه میزان گسسته سازی یعنی N افزایش یابد دقت ما نیز بیشتر خواهد شد. بنابر تجربه اگر $N=10000$ ، با شد محاسبات ما حداقل تا پنج رقم اعشار دقت خواهند داشت.

طبقه بندی ترازهای انرژی بر حسب ویژه مقادیر مختلف اندازه حرکت زاویه ای کل ذره محبوس در کره یعنی l ، نقش حیاتی برای ادامه کار ما دارد. به همین دلیل جدول (۳-۱) بر اساس حل معادله (۳-۳-۴) به منظور گردآوری اندازه بردارهای موج ذره برای ویژه مقادیر مختلف اندازه حرکت زاویه ای کل متناظر با ویژه مقادیر انرژی ذره محبوس در کره تنظیم شده است.

در این جدول اندازه های بردار موج ذره از $l=0$ تا $l=80$ درج شده است. به ازای هر l معین شماره ترازها n ، تا وقتی ادامه یافته است که k_{nl} آنها از ۱۰۰ تجاوز نکرده باشد. همانطور که ملا حظه می گردد با افزایش l تعداد ترازها با قید فوق الذکر کاهش می یابد. بطوریکه در $l=0$ تعداد آنها $n=30$ ، در $l=10$ تعداد آنها $n=25$ و در $l=71$ تعداد آنها به $n=9$ می رسد.

جدول (۳-۱) صفرها و مقادیر وابسته توابع بسیل کروی ($0 \leq l \leq 16$ و $0 \leq n \leq 16$)

l	n	k_{nl}	l	n	k_{nl}	l	n	k_{nl}	l	n	k_{nl}	l	n	k_{nl}	l	n	k_{nl}
00	01	03.141592	02	16	53.350845	05	05	22.904661	07	24	83.040489	10	17	68.308364	13	18	75.764877
00	02	06.283185	02	17	56.495567	05	06	26.127750	07	25	86.068290	10	18	71.485939	13	19	78.955398
00	03	09.424777	02	18	59.639957	05	07	29.332543	07	26	89.221397	10	19	74.666400	13	20	82.141883
00	04	09.424777	02	19	62.784069	05	08	32.824661	07	27	92.373718	10	20	77.832183	13	21	85.164886
00	05	09.424777	02	20	65.927940	05	09	35.707577	07	28	95.525329	10	21	81.001510	13	22	88.164741
00	06	09.424777	02	21	69.071601	05	10	38.883632	08	01	12.790782	10	22	84.168746	13	23	91.164741
00	07	09.424777	02	22	72.215087	05	11	42.054416	08	02	16.641003	10	23	87.334106	13	24	92.052688
00	08	09.424777	02	23	75.358413	05	12	45.221065	08	03	20.182471	10	24	90.497795	13	25	95.052864
00	09	09.424777	02	24	78.501602	05	13	48.384403	08	04	23.591275	10	25	93.659965	14	01	19.447702
00	10	31.415925	02	25	81.644660	05	14	51.545051	08	05	26.927041	11	01	16.144742	14	02	23.693208
00	11	34.557818	02	26	84.787620	05	15	54.703483	08	06	30.217263	11	02	20.303943	14	03	27.568752
00	12	37.699111	02	27	87.930473	05	16	57.860961	08	07	33.476881	11	03	23.886529	14	04	31.120620
00	13	40.840795	02	28	91.073249	05	17	61.015083	08	08	36.714529	11	04	27.401258	14	05	34.621124
00	14	43.982295	02	29	94.215354	05	18	64.168777	08	09	39.926128	11	05	30.820793	14	06	38.047245
00	15	47.122089	03	01	96.987932	05	19	67.321354	08	10	43.145423	11	06	34.179473	14	07	41.173805
00	16	50.265483	03	02	10.417119	05	20	70.472900	08	11	46.345104	11	07	37.496273	14	08	45.052680
00	17	53.407073	03	03	13.698023	05	21	73.623611	08	12	49.537117	11	08	40.782745	14	09	48.064434
00	18	56.548667	03	04	16.923621	05	22	76.773574	08	13	52.722900	11	09	44.046424	14	10	51.348762
00	19	59.690261	03	05	20.121806	05	23	79.922874	08	14	55.903564	11	10	47.173805	14	11	54.614948
00	20	62.831851	03	06	23.304247	05	24	83.071586	08	15	59.079952	11	11	50.173805	14	12	57.866363
00	21	65.973449	03	07	26.470764	05	25	86.163810	08	16	62.173805	11	12	54.063680	14	13	61.105575
00	22	69.115036	03	08	29.642685	05	26	89.163810	08	17	65.264900	11	13	57.052680	14	14	64.334536
00	23	72.256629	03	09	32.803732	05	27	92.516908	08	18	68.164901	11	14	60.100785	14	15	67.544908
00	24	75.398223	03	10	35.961406	05	28	95.661735	08	19	71.164901	11	15	63.358207	14	16	70.767807
00	25	78.539817	03	11	39.116470	05	29	10.512835	08	20	74.052680	11	16	66.550140	14	17	73.974388
00	26	81.681411	03	12	42.269515	06	02	14.207392	08	21	75.052680	11	17	69.737365	14	18	77.164901
00	27	84.823005	03	13	45.420963	06	03	17.647975	08	22	78.078323	11	18	72.920532	14	19	80.164764
00	28	87.964591	03	14	48.571128	06	04	20.983463	08	23	81.237892	11	19	76.100158	14	20	83.164756
00	29	91.106185	03	15	51.720249	06	05	24.262768	08	24	84.396110	11	20	79.276687	14	21	86.164886
00	30	94.247779	03	16	54.868499	06	06	27.507868	08	25	87.553123	11	21	82.450477	14	22	87.053260
01	01	04.493409	03	17	58.016429	06	07	30.730381	08	26	90.709045	11	22	85.621856	14	23	90.054359
01	02	07.725251	03	18	61.162944	06	08	33.937108	08	27	93.864006	11	23	88.791091	14	24	93.120903
01	03	10.904122	03	19	64.309341	06	09	37.132332	08	28	97.018823	11	24	91.958374	14	25	96.461229
01	04	14.066194	03	20	67.455284	06	10	40.318893	08	29	100.188643	11	25	95.123924	14	26	100.054359
01	05	17.228788	03	21	70.608637	06	11	43.498756	08	30	103.364487	11	26	98.298453	14	27	103.120903
01	06	20.371303	03	22	73.746063	06	12	46.673332	08	31	106.549324	11	27	101.473971	14	28	106.188643
01	07	23.519452	03	23	76.890983	06	13	49.843654	08	32	109.734134	11	28	104.649795	14	29	109.253260
01	08	26.666054	03	24	79.999053	06	14	53.010501	08	33	112.928897	11	29	107.825326	14	30	112.312090
01	09	29.811599	03	25	83.180068	06	15	56.174476	08	34	116.134134	11	30	110.996448	14	31	115.364756
01	10	32.956390	03	26	86.324287	06	16	59.336040	08	35	119.348897	11	31	114.169795	14	32	118.418643
01	11	36.100624	03	27	89.468322	06	17	62.496671	08	36	122.563681	11	32	117.348897	14	33	121.469795
01	12	39.244430	03	28	92.612198	06	18	65.653348	08	37	125.778413	11	33	120.528897	14	34	124.520903
01	13	42.387912	03	29	95.755912	06	19	68.809644	08	38	128.993146	11	34	123.588897	14	35	127.571494
01	14	45.531135	04	01	98.902861	06	20	71.964653	08	39	132.207897	11	35	126.648897	14	36	130.622594
01	15	48.674144	04	02	102.054907	06	21	75.118515	08	40	135.422648	11	36	129.708897	14	37	133.673703
01	16	51.816982	04	03	105.207965	06	22	78.272717	08	41	138.637397	11	37	132.768897	14	38	136.724803
01	17	54.959678	04	04	108.361256	06	23	81.427217	08	42	141.852146	11	38	135.828897	14	39	139.775903
01	18	58.102252	04	05	111.514518	06	24	84.581717	08	43	145.066896	11	39	138.888897	14	40	142.827003
01	19	61.244731	04	06	114.667566	06	25	87.736217	08	44	148.281645	11	40	141.948897	14	41	145.878103
01	20	64.387123	04	07	117.820576	06	26	90.890489	08	45	151.496394	11	41	145.008897	14	42	148.929203
01	21	67.529434	04	08	120.973593	06	27	94.044489	08	46	154.711143	11	42	148.068897	14	43	151.980303
01	22	70.671684	04	09	124.126619	06	28	97.198489	08	47	157.925892	11	43	151.128897	14	44	155.031403
01	23	73.813880	04	10	127.279645	06	29	100.352489	08	48	161.140641	11	44	154.188897	14	45	158.082503
01	24	76.956024	04	11	130.432671	06	30	103.505489	08	49	164.355390	11	45	157.248897	14	46	161.133603
01	25	80.098129	04	12	133.585697	06	31	106.658489	08	50	167.570139	11	46	160.308897	14	47	164.184703
01	26	83.240196	04	13	136.738723	06	32	109.811489	08	51	170.784888	11	47	163.368897	14	48	167.235803
01	27	86.382225	04	14	139.891749	06	33	112.964489	08	52	174.000637	11	48	166.428897	14	49	170.286903
01	28	89.524223	04	15	143.044775	06	34	116.117489	08	53	177.215386	11	49	169.488897	14	50	173.338003
01	29	92.666191	04	16	146.197801	06	35	119.270489	08	54	180.430135	11	50	172.548897	14	51	176.389103
01	30	95.808135	04	17	149.350827	06	36	122.423489	08	55	183.644884	11	51	175.608897	14	52	179.440203
02	01	05.763469	04	18	152.503853	06	37	125.576489	08	56	186.859633	11	52	178.668897	14	53	182.491303
02	02	08.905011	04	19	155.656879	06	38	128.729489	08	57	190.074382	11	53	181.728897	14	54	185.542403
02	03	12.046553	04	20	158.809905	06	39	131.882489	08	58	193.289131	11	54	184.788897	14	55	188.593503
02	04	15.188095	04	21	161.962931	06	40	135.035489	08	59	196.503880	11	55	187.848897	14	56	191.644603
02	05	18.329637	04	22	165.115957	06	41	138.188489	08	60	199.718629	11	56	190.908897	14	57	194.695703
02	06	21.471179	04	23	168.268983	06	42	141.341489	08	61	202.933378	11	57	194.068897	14	58	197.746803
02	07	24.612721	04	24	171.422009	06	43	144.494489	08	62	206.148127	11	58	197.128897	14	59	200.797903
02	08	27.754263	04	25	174.575035	06	44	147.647489	08	63	209.362876	11	59	200.188897	14	60	203.849003
02	09	30.895805	04	26	177.728061	06	45	150.800489	08	64	212.577625	11	60	2			

جدول (۳-۱) صفرها و مقادیر وابسته توابع بسلی کروی ($0 \leq k_n \leq 40$ و $0 \leq n \leq 40$)

l	n	k_n	l	n	k_n	l	n	k_n	l	n	k_n	l	n	k_n	l	n	k_n
16	20	83.184242	20	03	54.579461	23	14	73.134757	27	08	57.271619	31	09	66.180213	35	18	98.698838
16	21	86.385191	20	04	38.173805	23	15	76.364844	27	09	61.364778	31	10	69.713827	36	01	42.966945
16	22	89.578269	20	05	41.052600	23	16	79.947914	27	10	64.756195	31	11	73.112701	36	02	46.161613
16	23	92.782981	20	06	45.678841	23	17	82.785682	27	11	68.208908	31	12	77.215972	36	03	48.218735
16	24	95.946228	20	07	49.962179	23	18	85.003257	27	12	71.623664	31	13	81.052001	36	04	52.161633
17	01	22.715002	20	08	52.495971	23	19	88.457778	27	13	75.057548	31	14	84.564384	36	05	56.966945
17	02	27.129398	20	09	55.889682	23	20	91.546600	27	14	78.185958	31	15	86.512519	36	06	60.967086
17	03	31.062368	20	10	59.173751	23	21	93.435684	27	15	80.862258	31	16	90.564208	36	07	65.043792
17	04	34.771732	20	11	62.173622	24	01	30.244991	27	16	82.690734	31	17	93.739608	36	08	68.603576
17	05	38.173805	20	12	65.164291	24	02	35.004016	27	17	85.596321	32	01	38.745548	36	09	72.076705
17	06	41.052600	20	13	66.453375	24	03	39.172714	27	18	89.127920	32	02	43.839187	36	10	75.302413
17	07	45.272883	20	14	69.198211	24	04	43.099330	27	19	92.353688	32	03	48.273567	36	11	77.794212
17	08	48.657386	20	15	72.484466	24	05	46.845756	27	20	96.432496	32	04	52.389236	36	12	80.225791
17	09	52.907930	20	16	75.750526	24	06	50.481890	28	01	34.506286	32	05	56.171592	36	13	84.334808
17	10	55.331854	20	17	79.007164	24	07	54.038482	28	02	39.439029	32	06	60.095195	36	14	86.720306
17	11	58.632125	20	18	82.283493	24	08	57.172626	28	03	43.271625	32	07	63.791297	36	15	90.945419
17	12	61.915016	20	19	85.433135	24	09	61.051898	28	04	47.768486	32	08	67.389862	36	16	92.192756
17	13	65.164894	20	20	88.631065	24	10	64.398155	28	05	51.603885	32	09	70.962776	36	17	96.490165
17	14	68.164794	20	21	91.755729	24	11	67.774551	28	06	55.271614	32	10	74.087242	37	01	44.019874
17	15	71.164810	20	22	94.969055	24	12	71.125343	28	07	59.150630	32	11	76.486610	37	02	47.161613
17	16	72.952947	21	01	27.931061	24	13	74.492850	28	08	62.499439	32	12	79.779647	37	03	49.399743
17	17	75.953698	21	02	31.649608	24	14	77.885948	28	09	66.013893	32	13	83.107070	37	04	54.040496
17	18	78.145721	21	03	35.730789	24	15	80.943344	28	10	69.481941	32	14	85.972183	37	05	58.105922
17	19	81.365297	21	04	39.173405	24	16	83.095512	28	11	73.002471	32	15	87.827361	37	06	62.125041
17	20	84.581594	21	05	42.234515	24	17	86.244812	28	12	75.718849	32	16	91.410575	37	07	66.047210
17	21	87.785079	21	06	46.810253	24	18	89.429878	28	13	79.004325	32	17	93.742759	37	08	69.708213
17	22	90.979644	21	07	50.313899	24	19	93.001525	28	14	80.398910	33	01	39.802440	37	09	73.588981
17	23	94.184005	21	08	53.763633	24	20	94.134246	28	15	84.822608	33	02	44.934520	37	10	76.189804
18	01	23.797849	21	09	57.171550	25	01	31.312667	28	16	86.875427	33	03	49.397945	37	11	81.550201
18	02	28.265329	21	10	60.173782	25	02	36.116474	28	17	90.637222	33	04	53.536479	37	12	85.507392
18	03	32.236579	21	11	63.173542	25	03	40.172714	28	18	92.365432	33	05	57.171520	37	13	88.420730
18	04	36.976272	21	12	64.054679	25	04	44.271816	29	01	33.567981	33	06	61.282634	37	14	90.676826
18	05	39.173805	21	13	67.220376	25	05	48.040943	29	02	40.642045	33	07	64.987686	37	15	94.835090
18	06	43.092525	21	14	70.528306	25	06	51.896636	29	03	45.050502	33	08	68.617881	37	16	97.946806
18	07	46.541622	21	15	73.825408	25	07	55.173687	29	04	48.927684	33	09	72.152267	38	01	45.871922
18	08	49.943191	21	16	77.054016	25	08	59.051624	29	05	52.784595	33	10	74.990173	38	02	48.161613
18	09	53.308181	21	17	80.387496	25	09	62.246753	29	06	56.171573	33	11	77.758666	38	03	50.387325
18	10	56.644248	21	18	83.473320	25	10	65.671218	29	07	60.158096	33	12	80.331230	38	04	55.040493
18	11	59.956981	21	19	86.766746	25	11	69.058296	29	08	63.734035	33	13	85.460105	38	05	59.242866
18	12	63.173774	21	20	89.450134	25	12	72.399147	29	09	67.244369	33	14	88.675704	38	06	63.160873
18	13	66.164894	21	21	92.036064	25	13	75.866346	29	10	70.671483	33	15	92.408653	38	07	66.149153
18	14	69.164991	21	22	94.182853	25	14	78.914042	29	11	73.922592	33	16	95.743675	38	08	67.164825
18	15	70.052772	22	01	24.104312	25	15	81.977760	29	12	76.926399	34	01	40.858272	38	09	70.922729
18	16	73.053402	22	02	32.770767	25	16	84.065582	29	13	79.616050	34	02	46.028190	38	10	74.557518
18	17	76.288383	22	03	36.887088	25	17	87.908493	29	14	82.892532	34	03	50.530198	38	11	76.847640
18	18	79.518768	22	04	40.172714	25	18	90.332305	29	15	85.695991	34	04	54.682292	38	12	79.737693
18	19	82.738899	22	05	44.442836	25	19	93.644950	29	16	87.340454	34	05	58.171440	38	13	83.368316
18	20	85.961669	22	06	48.038848	25	20	95.322776	29	17	91.492286	34	06	62.464694	38	14	86.104362
18	21	89.224525	22	07	51.560337	26	01	32.378711	29	18	94.369171	34	07	66.166641	38	15	88.740638
18	22	92.463592	22	08	55.025890	26	02	37.226367	30	01	36.628379	34	08	69.762710	38	16	92.457366
18	23	95.547698	22	09	58.172634	26	03	41.372714	30	02	41.643009	34	09	73.154510	38	17	94.992736
19	01	24.878083	22	10	62.051704	26	04	44.172714	30	03	46.950502	34	10	75.330093	38	18	98.587875
19	02	29.397142	22	11	65.195465	26	05	48.440715	30	04	50.983963	34	11	78.879737	39	01	44.123119
19	03	33.405830	22	12	68.533355	26	06	49.232231	30	05	53.962097	34	12	80.598579	39	02	49.161613
19	04	37.173405	22	13	71.841331	26	07	52.907360	30	06	57.171607	34	13	83.443260	39	03	51.473537
19	05	41.052680	22	14	75.152130	26	08	56.172679	30	07	61.370826	34	14	87.774307	39	04	55.161613
19	06	44.337413	22	15	78.395645	26	09	60.051933	30	08	64.963516	34	15	90.184867	39	05	56.102512
19	07	47.804862	22	16	81.485580	26	10	63.506233	30	09	68.500030	34	16	92.772369	39	06	60.377983
19	08	51.222599	22	17	85.052581	26	11	66.944969	30	10	72.029022	35	01	41.913089	39	07	64.151992
19	09	54.601978	22	18	87.081756	26	12	70.360733	30	11	75.095092	35	02	45.161613	39	08	68.321304
19	10	57.950650	22	19	89.191940	26	13	73.726882	30	12	77.779495	35	03	47.130239	39	09	72.425323
19	11	61.173702	22	20	93.365722	26	14	76.992683	30	13	80.380744	35	04	51.161613	39	10	75.422533
19	12	64.164718	23	01	29.175579	26	15	80.118637	30	14	83.544709	35	05	55.825744	39	11	77.783279
19	13	67.164344	23	02	33.888839	26	16	82.085080	30	15	85.177864	35	06	59.806503	39	12	80.974113
19	14	69.053024	23	03	38.039608	26	17	84.976318	30	16	89.801391	35	07	63.160415	39	13	84.992437
19	15	71.138946	23	04	41.172714	26	18	88.546180	30	17	92.854469	35	08	67.388862	39	14	86.310501
19	16	74.395843	23	05	42.051593	26	19	90.613914	30	18	94.367996	35	09	70.990501	39	15	90.107757
19	17	77.658796	23	06	45.646465	26	20	93.914962	31	01	37.687549	35	10	74.769454	39	16	93.587394
19	18	80.876869	23	07	49.262611	27	01	33.443222	31	02	42.742012	35	11	76.129226	39	17	96.247146
19	19	84.110420	23	08	52.801757	27	02	38.333839	31	03	47.14696						

جدول (۳-۱) ضرایب و مقادیر وابسته توابع بسط کروی $(k_{nl}) = 0$ & $40 \leq l \leq 80$

l	n	k_{nl}	l	n	k_{nl}	l	n	k_{nl}	l	n	k_{nl}	l	n	k_{nl}	l	n	k_{nl}
40	07	69.498876	45	05	67.151153	50	07	77.496895	55	06	78.924436	60	09	89.855735	70	02	78.143601
40	08	71.289700	45	06	71.315775	50	08	80.272514	55	07	80.929389	60	10	92.384517	70	03	81.141723
40	09	75.639556	45	07	75.680633	50	09	84.559765	55	08	84.259346	60	11	96.998077	70	04	84.138229
40	10	78.173004	45	08	79.026718	50	10	89.701484	55	09	87.771896	60	12	100.142700	70	05	86.991882
40	11	82.603581	45	09	81.194473	50	11	92.784095	55	10	89.992630	60	13	111.42084	70	06	89.063116
40	12	85.729408	45	10	83.506973	50	12	96.134796	55	11	92.390472	60	14	122.7412593	70	07	91.825897
40	13	88.773696	45	11	88.017868	51	01	56.151603	56	12	96.282020	63	04	77.139778	70	08	95.017875
40	14	91.591156	45	12	90.652824	51	02	58.681854	57	01	62.151603	63	05	80.128311	70	09	97.924911
40	15	94.498168	45	13	92.342674	51	03	62.151603	57	02	64.930206	63	06	82.380302	71	01	76.142700
40	16	96.246177	45	14	95.054534	51	04	64.417762	57	03	68.142700	63	07	85.143447	71	02	79.142478
41	01	48.161613	46	15	98.771064	51	05	69.341796	57	04	70.839416	63	08	88.08386	71	03	82.142005
41	02	51.161613	46	16	101.161613	51	06	73.853369	57	05	75.870898	63	09	91.851809	71	04	85.132431
41	03	53.642059	46	17	104.161613	51	07	76.980606	57	06	79.803965	63	10	94.636689	71	05	87.861938
41	04	56.323288	46	18	107.042735	51	08	78.382947	57	07	81.891166	63	11	97.387611	71	06	90.653159
41	05	59.042735	46	19	110.042735	51	09	81.360809	57	08	85.809208	64	01	69.142700	71	07	93.816878
41	06	61.642735	46	20	113.042735	51	10	85.021873	57	09	87.697288	64	02	72.142684	71	08	95.614524
41	07	64.242735	46	21	116.042735	51	11	87.898559	57	10	90.162254	64	03	75.142547	71	09	99.704284
41	08	67.242735	46	22	119.042735	51	12	90.241264	57	11	93.721321	64	04	78.140983	72	01	77.142700
41	09	70.242735	46	23	122.042735	51	13	93.713302	57	12	97.964164	64	05	81.137977	72	02	80.142478
41	10	73.242735	46	24	125.042735	51	14	96.838859	58	01	63.151603	64	06	83.244239	72	03	83.141113
41	11	76.242735	46	25	128.042735	52	01	57.151603	58	02	65.969963	64	07	87.890042	72	04	86.136894
41	12	79.242735	46	26	131.042735	52	02	59.724483	58	03	69.143692	64	08	89.383424	72	05	87.213890
41	13	82.242735	46	27	134.042735	52	03	63.151599	58	04	71.906990	64	09	92.963227	72	06	91.870879
41	14	85.242735	46	28	137.042735	52	04	65.490028	58	05	76.908437	64	10	94.924856	72	07	93.756683
41	15	88.242735	46	29	140.042735	52	05	70.433624	58	06	81.049575	64	11	98.791404	72	08	96.304191
41	16	91.242735	46	30	143.042735	52	06	75.023071	58	07	83.564231	65	01	70.142700	73	01	70.142700
42	01	49.161613	47	02	57.161613	52	07	79.691436	58	08	85.767456	65	02	73.142669	73	02	81.142639
42	02	52.161613	47	03	60.119655	52	08	82.170980	58	09	89.978767	65	03	76.142395	73	03	84.141799
42	03	54.724464	47	04	64.949989	52	09	85.907279	58	10	92.567634	65	04	79.142494	73	04	87.129791
42	04	57.431339	47	05	69.141357	52	10	89.726325	58	11	94.921432	65	05	82.101692	73	05	88.194328
42	05	60.141339	47	06	73.585784	52	11	92.940734	58	12	98.130592	65	06	84.995796	73	06	92.367874
42	06	62.841339	47	07	77.430778	52	12	94.256446	59	01	64.142700	65	07	86.948974	73	07	94.365112
42	07	65.541339	47	08	80.400695	52	13	96.409782	59	02	67.009284	65	08	90.051994	73	08	97.385396
42	08	68.241339	47	09	83.567466	53	01	58.151603	59	03	70.142700	65	09	92.672569	74	01	79.142692
42	09	70.941339	47	10	86.180259	53	02	60.766601	59	04	72.972918	65	10	94.807834	74	02	82.142578
42	10	73.641339	47	11	88.149269	53	03	64.142692	59	05	76.141624	65	11	99.769592	74	03	85.139404
42	11	76.341339	47	12	93.028877	53	04	66.561401	59	06	78.076927	66	01	71.142700	74	04	88.130348
42	12	79.041339	47	13	95.701202	53	05	71.531036	59	07	81.789482	66	02	74.142639	74	05	90.961074
42	13	81.741339	47	14	97.548454	53	06	75.994522	59	08	83.545631	66	03	77.142395	74	06	93.619110
42	14	84.441339	47	15	100.548454	53	07	78.467666	59	09	86.601753	66	04	80.138336	74	07	96.015434
42	15	87.141339	47	16	103.548454	53	08	81.229072	59	10	91.108940	66	05	83.125885	75	01	80.142692
43	01	50.161613	48	03	59.151603	53	09	84.195518	59	11	92.956077	66	06	85.229576	75	02	83.142456
43	02	53.161613	48	04	61.196594	53	10	89.766899	59	12	96.783699	66	07	87.814796	75	03	86.141487
43	03	56.161613	48	05	64.049987	53	11	93.058780	60	01	65.142700	66	08	91.392295	75	04	89.117858
43	04	59.161613	48	06	66.806210	53	12	96.972404	60	02	68.048187	66	09	93.687142	75	05	90.151779
43	05	62.161613	48	07	70.125495	54	01	59.151603	60	03	71.142471	66	10	96.292297	75	06	94.28016
43	06	65.161613	48	08	73.878311	54	02	61.808219	60	04	74.038810	67	01	72.142700	75	07	96.960517
43	07	68.161613	48	09	77.234199	54	03	65.142677	60	05	77.132804	67	02	75.142684	76	01	81.142692
43	08	71.161613	48	10	80.302680	54	04	67.632011	60	06	79.172195	67	03	78.142333	76	02	84.142547
43	09	74.161613	48	11	83.179183	54	05	72.621086	60	07	82.983932	67	04	81.140480	76	03	87.125556
43	10	77.161613	48	12	86.114110	54	06	77.123176	60	08	85.960556	67	05	84.122573	76	04	89.983780
43	11	80.161613	48	13	89.046531	54	07	81.161514	60	09	87.389388	67	06	86.646016	76	05	91.413391
43	12	83.161613	48	14	92.003846	54	08	85.418037	60	10	91.084660	67	07	89.968238	76	06	94.836151
43	13	86.161613	48	15	95.035462	54	09	87.209626	60	11	94.507769	67	08	91.970016	76	07	98.813247
43	14	89.161613	48	16	98.151603	54	10	90.985786	60	12	96.274559	67	09	95.141845	77	01	82.142692
43	15	92.161613	48	17	101.151603	54	11	93.191642	61	01	66.142700	67	10	97.829948	77	02	85.141609
44	01	51.161613	49	03	60.151599	54	12	97.678382	61	02	69.086685	68	01	73.142700	77	03	88.140151
44	02	54.161613	49	04	62.270595	55	01	60.151603	61	03	72.142631	68	02	76.142662	77	04	91.107177
44	03	57.161613	49	05	64.142677	55	02	62.849349	61	04	75.104316	68	03	79.142379	77	05	92.334182
44	04	60.161613	49	06	67.148849	55	03	66.142700	61	05	78.132011	68	04	82.138488	77	06	95.668258
44	05	63.161613	49	07	70.192293	55	04	69.791836	61	06	80.376382	68	05	85.129333	77	07	99.166503
44	06	66.161613	49	08	73.221260	55	05	73.709000	61	07	84.077735	68	06	87.113059	78	01	83.142691
44	07	69.161613	49	09	76.226981	55	06	77.998136	61	08	86.193939	68	07	90.221475	78	02	86.142173
44	08	72.161613	49	10	79.266597	55	07	80.416259	61	09	88.132209	68	08	92.736480	78	03	89.124786
44	09	75.161613	49	11	82.297744	55	08	83.064399	61	10	91.460769	68	09	97.818326	78	04	92.135765
44	10	78.161613	49	12	85.291900	55	09	85.430862	61	11	94.197113	69	01	74.142700	78	05	93.168647
44	11	81.161613	49	13	88.291900	55	10	88.776908	61	12	98.257179	69	02	77.142669	78	06	96.878707
44	12	84.161613	49	14	91.291900	55	11	91.483093	62	01	67.142700	69	03	80.142700	79	01	84.142654
44	13	87.161613	49	15	94.291900	55	12	94.406036	62	02	70.124771	69	04	83.131652	79	02	87.141464
44	14	90.161613	49	16	97.291900	55	13	98.702758									

اطلاعات مندرج در جدول (۱-۳) در صورتیکه قصد نداشته باشیم ترازهای انرژی را بر حسب l ، طبقه بندی کنیم، برای یک بحث آماری کافی به نظر می رسد. اما همانطور که در انتهای همین بخش نشان خواهیم داد در یک دستگاه انتگرال پذیر طبقه بندی بر حسب هر یک از کوانتسهای ایجاد شده اجتناب ناپذیر است. دستگاههای انتگرال پذیر دارای متغیرهای قابل جدا شدن از یکدیگر هستند و این بدان معنی است که به راحتی می توانیم فقط با تغییر ویژه مقادیر یک عملگر و ثابت نگاه داشتن بقیه ویژه مقادیر عملگرهای آن دستگاه به بررسی کوانتومی آن پردازیم. در حالیکه در مورد دستگاههای آشوبی چنین کاری امکان پذیر نیست و اساساً دلیل مشکل بودن مطالعه کوانتومی آنها در همین نکته نهفته است. پس حال که یک دستگاه انتگرال پذیر مانند کره را مورد مطالعه قرار می دهیم شایسته نیست از امکانی که این دستگاه در اختیار ما قرار داده است استفاده نکنیم.

از طرفی می دانیم که مطالعه کوانتومی یک دستگاه تحقق نخواهد یافت مگر در سایه تجزیه و تحلیل آماری اطلاعاتی که ممکن است بصورت تجربی یا در اینجا بصورت محاسباتی حاصل شده باشند. این امر از طبیعت مکانیک کوانتومی برای دستگاههای مقید ناشی می شود، زیرا چنین دستگاههایی اجازه داشتن هر ویژه مقدار دلخواهی را برای عملگرهای مشاهده پذیرشان ندارند. همین امر یعنی گسستگی انرژی طیف ویژه مقادیر عملگرهای مشاهده پذیر هر دستگاه مقید، مطالعه آماری و در نتیجه حجم اطلاعات زیاد را به منظور کاهش هر چه بیشتر افت و خیز از یک طرف و افزایش دقت از طرف دیگر طلب می کند، چه در غیر اینصورت بحث آماری مفهوم خود را از دست خواهد داد.

اگر عملگر مشاهده پذیر دستگاه مورد مطالعه را هامیلتونی دستگاه فرض کنیم ویژه مقادیر ترازهای انرژی دستگاه را مشخص خواهند کرد، که ادعا می کنیم نحوه توزیع آنها احتمالاً اطلاعاتی در مورد انتگرال پذیر بودن یا آشوبی بودن دستگاه ارائه دهند.

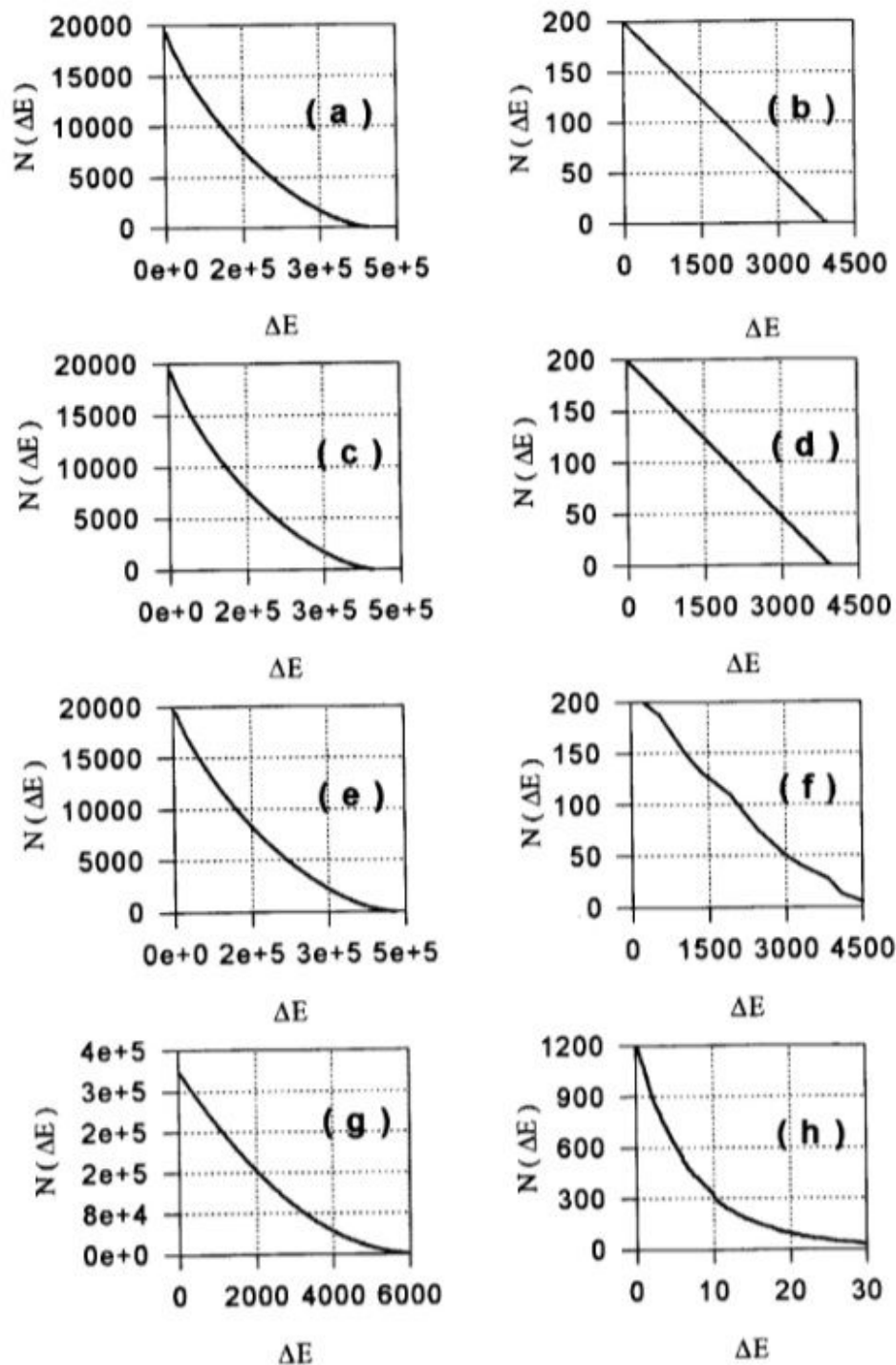
بدین منظور جدول (۲-۳) بر اساس حل معادله (۳-۳-۴) برای سه ویژه مقدار اندازه حرکت زاویه ای کل ($l=0$ ، $l=1$ ، $l=50$) بطور جداگانه تنظیم شده است. در هر مورد تعداد ۲۰۰ تراز جمعا ۶۰۰ تراز محاسبه شده است.

جدول (۲-۳) صفرهای توابع بسل کروی ($j_l(k_{nl}) = 0$ & $l = 0$ & $1 \leq n \leq 200$)

n	k_{n0}	n	k_{n0}	n	k_{n0}	n	k_{n0}	n	k_{n0}	n	k_{n0}	n	k_{n0}	n	k_{n0}
006	18.84955	031	97.38937	056	175.9291	081	254.4690	106	333.0088	131	411.5486	156	490.0884	181	568.6282
007	21.99114	032	100.5309	057	179.0707	082	257.6105	107	336.1504	132	414.6902	157	493.2300	182	571.7698
008	25.13274	033	103.6725	058	182.2123	083	260.7521	108	339.2920	133	417.8318	158	496.3716	183	574.9114
009	28.27433	034	106.8141	059	185.3539	084	263.8937	109	342.4335	134	420.9734	159	499.5132	184	578.0530
010	31.41592	035	109.9557	060	188.4955	085	267.0353	110	345.5751	135	424.1150	160	502.6548	185	581.1946
016	50.26548	041	128.8052	066	207.3451	091	285.8849	116	364.4247	141	442.9645	166	521.5043	191	600.0441
017	53.40707	042	131.9468	067	210.4867	092	289.0265	117	367.5663	142	446.1061	167	524.6459	192	603.1857
018	56.54866	043	135.0884	068	213.6282	093	292.1681	118	370.7079	143	449.2477	168	527.7875	193	606.3273
019	59.69026	044	138.2300	069	216.7698	094	295.3097	119	373.8495	144	452.3893	169	530.9291	194	609.4689
020	62.83185	045	141.3716	070	219.9114	095	298.4512	120	376.9911	145	455.5309	170	534.0707	195	612.6105

جدول (۲-۳) صفرهای توابع بسل کروی ($j_l(k_{nl}) = 0$ & $l = 1$ & $1 \leq n \leq 200$)

n	k_{n1}	n	k_{n1}	n	k_{n1}	n	k_{n1}	n	k_{n1}	n	k_{n1}	n	k_{n1}	n	k_{n1}
006	20.37130	031	98.95006	056	177.4943	081	256.0358	106	334.5766	131	413.1170	156	491.6572	181	570.1973
007	23.51945	032	102.0919	057	180.6360	082	259.1775	107	337.7182	132	416.2586	157	494.7988	182	573.3389
008	26.66605	033	105.2338	058	183.7777	083	262.3191	108	340.8598	133	419.4002	158	497.9404	183	576.4805
009	29.81159	034	108.3757	059	186.9194	084	265.4608	109	344.0014	134	422.5418	159	501.0820	184	579.6221
010	32.95639	035	111.5175	060	190.0610	085	268.6024	110	347.1430	135	425.6834	160	504.2236	185	582.7637
016	51.81698	041	130.3684	066	208.9111	091	287.4522	116	365.9927	141	444.5331	166	523.0732	191	601.6133
017	54.95967	042	133.5101	067	212.0527	092	290.5938	117	369.1344	142	447.6747	167	526.2148	192	604.7549
018	58.10225	043	136.6519	068	215.1944	093	293.7355	118	372.2760	143	450.8163	168	529.3564	193	607.8965
019	61.24473	044	139.7937	069	218.3361	094	296.8771	119	375.4176	144	453.9579	169	532.4980	194	611.0381
020	64.38712	045	142.9354	070	221.4777	095	300.0187	120	378.5592	145	457.0995	170	535.6397	195	614.1797



شکل (۳-۱) نمودارهای فراوانی جدائی ترازهای انرژی یک ذره کوانتمی در چاه پتانسیل کره سخت. شکل‌های سمت راست تنها نزدیکترین همسایگیها را شامل می شود در حالیکه شکل‌های سمت چپ با در نظر گرفتن تمام همسایگیها رسم شده اند. تمایزهای دیگر اشکال فوق در مقادیر ویژه اندازه حرکت زاویه ای ذره به صورت زیر می باشد:

$$\forall l \in N \ \& \ 0 \leq l \leq 94 \ (g, h), \ l = 50 \ (e, f), \ l = 1 \ (c, d), \ l = 0 \ (a, b)$$

۳-۵ نحوه توزیع احتمال ذره

همانطور که در قسمت (۳-۲) اشاره کردیم توصیف نحوه توزیع احتمال یک ذره در دستگاه کره که همانا احتمال حضور ذره را مشخص خواهد نمود به ازای ویژه مقادیر اندازه حرکت زاویه ای کل غیر صفر کار خیلی ساده ای نیست و بهتر است که از طریق ترسیم آن را نشان دهیم، تا به این ترتیب نحوه توزیع احتمال حضور یک ذره در یک دستگاه انتگرال پذیر را مشاهده نموده و در فصل پنجم آن را با نحوه توزیع احتمال حضور یک ذره در یک دستگاه آشوبی مقایسه کنیم.

برای این منظور کافی است که با استفاده از معادله (۳-۱-۸) و شکل انتگرالی تابع بسط کروی یعنی معادله (۳-۳-۱) به ازای یک حالت معین $|n, l, m\rangle$ در یک زاویه سمتی خاص φ اقدام به تعیین نقاط خاصی از صفحه که احتمال حضور ذره در آنها صفر یا مکمل آن غیر صفر است کنیم. در این رهیافت نیازمند اطلاع از چگونگی تغییر هماهنگهای کروی بر حسب θ نیز هستیم، برای این منظور با استفاده از ارتباطی که بین هماهنگهای کروی و توابع لژاندر وابسته مطابق رابطه زیر وجود دارد، [۴۰]

$$y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (۳-۵-۱)$$

با در نظر گرفتن قسمت حقیقی را بطة فوق و به کمک شکل انتگرالی توابع لژاندر وابسته بصورت زیر، [۳۵]

$$P_v^\mu(z) = \frac{2^{-v} (z^2 - 1)^{\frac{-1}{2}\mu}}{\Gamma(-v-\mu)\Gamma(v+1)} \int_0^\infty (z + \cosh t)^{\mu-v-1} (\cosh t)^{2v+1} dt \quad (۳-۵-۲)$$

تغییرات هماهنگهای کروی بر حسب θ را محاسبه می کنیم. البته راه دیگری نیز بر اساس حل معادله دیفرانسیل زیر وجود دارد، [۴۰]

$$\begin{cases} {}^0P_l^m = \xi_1 \\ \frac{{}^2P_l^m - {}^0P_l^m}{2\Delta} = \xi_2 \end{cases} \Rightarrow {}^2P_l^m = 2\Delta\xi_2 + \xi_1 \quad (7-5-3)$$

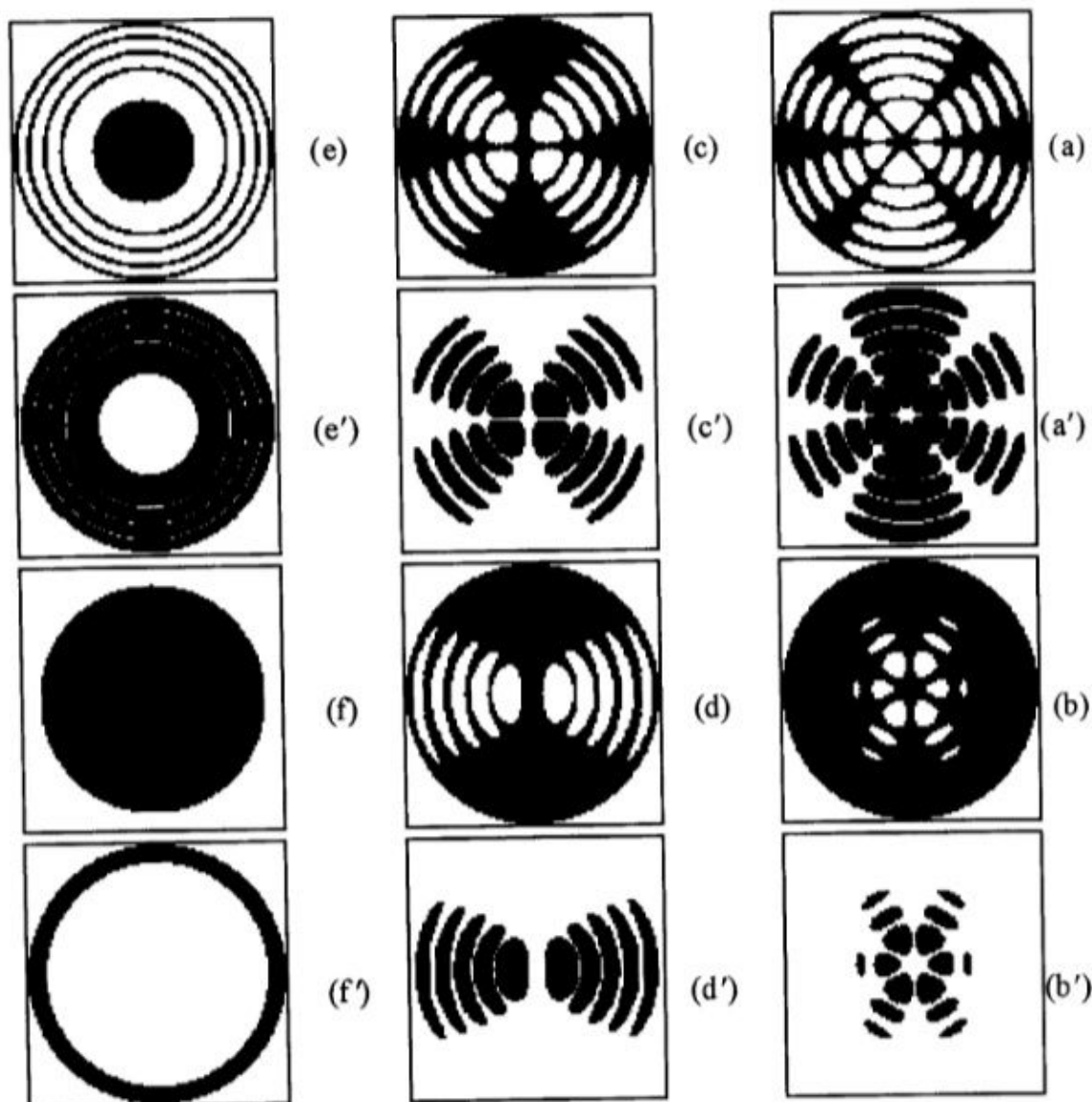
اکنون با داشتن ${}^0P_l^m$ ، ${}^2P_l^m$ و رابطه (۵-۵-۳) حاصل از گسسته سازی معادله دیفرانسیل لژاندر، سایر ${}^iP_l^m$ به ازای هر i ، دیگری قابل محاسبه خواهند بود. استفاده از روابط بازگشتی، که معمولاً از تابع مولد توابع لژاندر همپا بدست می‌آیند، را نیز می‌توان بعنوان روشی دیگر برای محاسبه هماهنگهای کروی نام برد، روش اخیر از دقت و سادگی بیشتری برخوردار است و در اکثر منابع محاسبات عددی از این روش استفاده می‌شود.

صحت هر یک از روشهای فوق توسط روابط تحلیلی زیر، [۴۰]

$$l=1 \quad \begin{cases} y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \cos\varphi \\ y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \end{cases} \quad (8-5-3)$$

برای نحوه تغییرات هماهنگهای کروی به ازای $l=0$ و $\varphi = 3\pi/2$ مورد تأیید قرار گرفته است.

در شکل (۲-۳) نحوه توزیع احتمال دستگاه کره به منظور نمایش احتمال وعدم احتمال حضور ذره بطور جداگانه بعنوان مکمل یکدیگر نمایش داده شده است. منظور از مکمل در اینجا این است که اگر دو شکل نمایش دهنده احتمال وعدم احتمال حضور ذره را بر یکدیگر منطبق کنیم یک کره کامل بدست خواهیم آورد. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌گردد تغییر m در هماهنگهای کروی فقط نحوه توزیع زاویه ای احتمال حضور را تغییر می‌دهند بدون آنکه در تغییر انرژی ذره نقشی داشته باشند. نکته ای که در این شکل مشاهده می‌شود این است که با افزایش مقدار ویژه اندازه حرکت زاویه ای کل ذره از مرکز به طرف دیواره کروی رانده می‌شود. این همان نکته ای است که قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه ای در مکانیک تحلیلی ایجاب می‌کند.



شکل (۲-۳) نمایش توزیع احتمال یک ذره محبوس در کره‌ای به شعاع واحد در صفحه $\varphi = \frac{3\pi}{5}$ ، به ازای اندازه حرکت‌های زاویه ای و انرژی‌های گوناگون. شکل‌های پریم دار مکمل شکل‌های بدون پریم می باشند و معرف عدم احتمال حضور ذره هستند، بگونه ای که انطباق آنها بر یکدیگر یک کره کامل را به دست خواهد داد. در شکل‌های a تا d اعم از پریم دار یا بدون پریم انرژی $(k = 20/608121)$ و اندازه حرکت زاویه ای کل $(l = 3)$ ذره یکسان در نظر گرفته شده است و تفاوت آنها در مولفه سوم اندازه حرکت زاویه ای است. در شکل‌های e تا f اعم از پریم دار یا بدون پریم مولفه سوم اندازه حرکت زاویه ای ذره $(m = 0)$ یکسان در نظر گرفته شده است و تفاوت آنها در انرژی و اندازه حرکت زاویه ای کل است.

$$l = 50, k = 55.1516 (f, f'); k = 33.561, l = 16 (e, e'); m = 3 (d, d'); m = 2 (c, c'); m = 1 (b, b'); m = 0 (a, a')$$

۳-۶ حل عددی

پس از بررسی تحلیلی یک ذره کوانتومی در کره زمان آن فرا رسیده است که خود را برای روبرو شدن با دستگاهی همچون استادیوم دوار که حل تحلیلی آن همانطور که بعداً نشان خواهیم داد میسر نیست تجهیز کنیم. برای این منظور ناچاریم که یک روش حل عددی مناسب ارائه دهیم، ولی قبلاً باید صحت آن مورد آزمایش قرار گیرد. شاید یکی از بهترین آزمایشهای لازم، بررسی عددی یکی از حالات حدی آن یعنی دستگاه کره باشد. برای این منظور ابتدا دستگاه دایره را حل می‌کنیم و سپس با دوران آن حول یکی از محورهای تقارنش پاسخهای کره را بدست می‌آوریم با این امید که با حل دستگاه استادیوم و سپس دوران آن حول محور تقارن طولیش به پاسخهای دستگاه استادیوم دوار برسیم. در کلیه محاسبات عددی با انتخاب یکایی که در آن، $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$ ، کمیت‌های فیزیکی بدون بعد شده‌اند.

۳-۶-۱ دستگاه دایره با پایه مستطیل

می‌دانیم که حل معادله شرودینگر برای دستگاه دایره پس از جدا سازی متغیرها و اعمال شرایط مرزی، به تابع موج زیر برای ذره محبوس در آن منجر می‌شود، [۴۰]

$$\begin{cases} \Psi(r, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{nl} \cos(l\varphi) + B_{nl} \sin(l\varphi)) J_l(k_{nl}r) \\ E_{nl} = \frac{\hbar^2 k_{nl}^2}{2m} \end{cases} \quad (۳-۶-۱)$$

که در آن $J_l(k_{nl}r)$ تابع بسل استوانه‌ای، E_{nl} انرژی، m جرم ذره و A_{nl} ، B_{nl} ضرایب ثابت بسط می‌باشند.

ابتدا توجه خود را به حالتی که ذره اندازه حرکت زاویه‌ای نداشته باشد معطوف می‌کنیم، یعنی حالتی که $l=0$ باشد. در این حالت تابع موج جزیی ذره یعنی یک وجه خاص از تابع موج، مستقل از ضریب بهنجارش بصورت زیر است

$$\Psi_{n0} = J_0(k_{n0}r) \quad (2-6-3)$$

پس برای تعیین ترازهای انرژی این حالت با توجه به یکتایی پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم بر حالات فیزیکی ذره یعنی معادله شرودینگر مربوطه، کافی است که شرایط مرزی دستگاه دایره را بر تابع موج ذره یعنی معادله (۲-۶-۳) تحمیل نماییم. بدیهی است که با توجه به یکتایی پاسخ تنها دسته‌ای از k_{n0} ها را به دست خواهیم آورد که متناظر با انرژیهای مجاز ذره باشند. انرژی حالت زمینه دستگاه متناظر با کمترین k_{n0} ، یعنی k_{10} ، خواهد بود. اعمال شرایط مرزی دایره بر تابع موج (۲-۶-۳) ما را به معادله زیر رهنمون می‌کند

$$J_0(k_{n0}a) = 0 \quad (3-6-3)$$

حل معادله فوق همانند حل معادله (۳-۳-۴) می‌باشد و در مبحث مربوط به حل تحلیلی دستگاه استوانه (۱-۴) به آن خواهیم پرداخت. ولی این روش قابل تعمیم به هردستگاهی نیست.

روشی که در اینجا برای حل معادله (۳-۶-۳) مورد استفاده قرار می‌دهیم مبتنی بر مفاهیم فیزیکی ما از توابع موج و خصوصیات عام آنها است. ابتدا فرض می‌کنیم که تنها قادر به حل تحلیلی دستگاه مستطیل هستیم، سپس چنین استدلال می‌کنیم که تابع موج دستگاه دایره یا هر دستگاه دو بعدی دیگر را می‌توان بصورت یک ترکیب خطی از حل‌های خاص دستگاه مستطیل نوشت مشروط بر آنکه انرژی کل دستگاه به گونه‌ای اختیار شود که منطبق بر یکی از مقادیر مجاز باشد، پس به این ترتیب بطور همزمان به ترازهای انرژی و همچنین توابع موج متناظرشان دست خواهیم یافت.

می دانیم که تابع موج یک ذره محبوس در چاه پتانسیل مستطیل شکل به طول $2a$ و عرض $2b$ که مرکز آن بر مبدا مختصات منطبق باشد مستقل از ضریب بهنجارش می تواند به هریک از صورتهای زیر باشد

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} \cos(k_x x) \cos(k_y y) & \& \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ \cos(k_x x) \sin(k_y y) & \& \sin(k_x x) \sin(k_y y) \end{cases} \quad (3-6-4)$$

چنان که دیده می شود هامیلتونی دستگاه مستطیل تحت تبدیلهای $x \rightarrow -x$ و $y \rightarrow -y$ جداگانه تقارن دارد. بنابراین حالتهای فیزیکی این دستگاه تحت هر یک از دو تبدیل فوق جداگانه دارای پاریته معین است. در حالت زمینه دستگاه کمترین مقدار انرژی را دارد پس تابع موج باید کمترین نوسانات را داشته باشد و این متناظر با متقارن ترین تابع موج از بین توابع موج (3-6-4) است یعنی تابع موجی که پاریته آن زوج-زوج باشد. ویژه مقادیر انرژی و ویژه مقادیر حالتهای دستگاه را فقط برای حالتهای زوج-زوج به قرار زیر است.

$$\begin{cases} k^2 = k_x^2 + k_y^2 \\ k_x = (2n_x - 1) \frac{\pi}{2a}, \quad k_y = (2n_y - 1) \frac{\pi}{2b} \\ E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left((2n_x - 1) \frac{\pi}{2a} \right)^2 + \left((2n_y - 1) \frac{\pi}{2b} \right)^2 \right\} \end{cases} \quad (3-6-5)$$

$$\Psi(x, y) = \cos(k_x x) \cos(k_y y) \quad (3-6-6)$$

پس ویژه مقادیر انرژی حالت زمینه دستگاه مستطیل عبارت است از

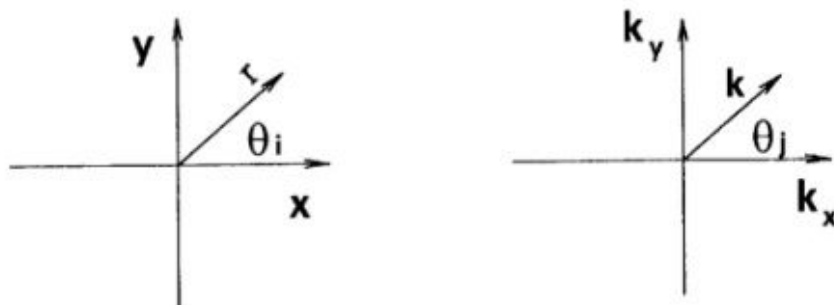
$$E_{11} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (3-6-7)$$

حال سعی می‌کنیم تابع موج یک دستگاه دو بعدی متقارن دیگر را بر حسب ویژه حالت‌های دستگاه مستطیل بسط دهیم و با اعمال شرایط مرزی، به انرژی مناسب دستگاه دست یابیم. برای این منظور ابتدا جهت سهولت، فقط حالت‌های زوج-زوج دستگاه مستطیل را در نظر می‌گیریم. در این صورت یک تابع موج دلخواه را پس از گسسته‌سازی به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\Psi(r_i, \theta_i) = \sum_{j=1}^N x_j \cos(kr_i \cos \theta_i \cos \theta_j) \cos(kr_i \sin \theta_i \sin \theta_j) \quad (۸-۶-۳)$$

$$= \sum_{j=1}^N x_j (RB)_{ij}$$

که در آن x_j ضرایب ثابت بسط می‌باشند، و جمع در فضای تکانه روی تمام جهات بردار موج $\vec{k}$ ، بسته شده است و θ_i و θ_j به ترتیب زوایایی هستند که بردارهای $\vec{k}$ و $\vec{r}$ به ترتیب در فضاهای مکان و تکانه با مؤلفه‌های افقی خود مطابق شکل (۳-۳) می‌سازند، و $(RB)_{ij}$ به منظور سادگی جهت نمایش پایه مستطیلی معرفی شده است.



شکل (۳-۳) نمایش فضا‌های مکان و تکانه در دو بعد و زوایای گسسته سازی این دو فضا، که با استفاده از آنها و روابط زیر معادله (۸-۶-۳) گسسته سازی شده است.

$$\begin{cases} x_i = r_i \cos \theta_i & \& k_x = k \cos \theta_j \\ y_i = r_i \sin \theta_i & \& k_y = k \sin \theta_j \end{cases}$$

اگر ترکیب خطی (۳-۶-۸) از توابع موج مستطیل با پاریتته زوج-زوج قرار است که توابع موج یک دستگاه دو بعدی دیگر با همین ویژگی را بدست دهد، ابتدا باید قادر به تولید تابع موج خود مستطیل باشد. این کار را با اعمال شرایط مرزی دستگاه مستطیل مطابق شکل (۳-۳) انجام می دهیم، دستگاه دایره را نیز به دلایل سادگی و مشابهت می توانیم بطور همزمان مورد بررسی قرار دهیم. در این شکل دستگاههای مستطیل و دایره را در فضای مکان به کمک زاویه θ_i ، گسسته سازی نموده ایم، که در آن $\theta_i = \frac{\pi}{N}$ و N نمایانگر تعداد نقاط گسسته سازی یا به عبارتی تعداد نقاطی است که شرایط مرزی بر آنها تحمیل می گردد.

شرایط مرزی مستطیل در فضای مکان بصورت

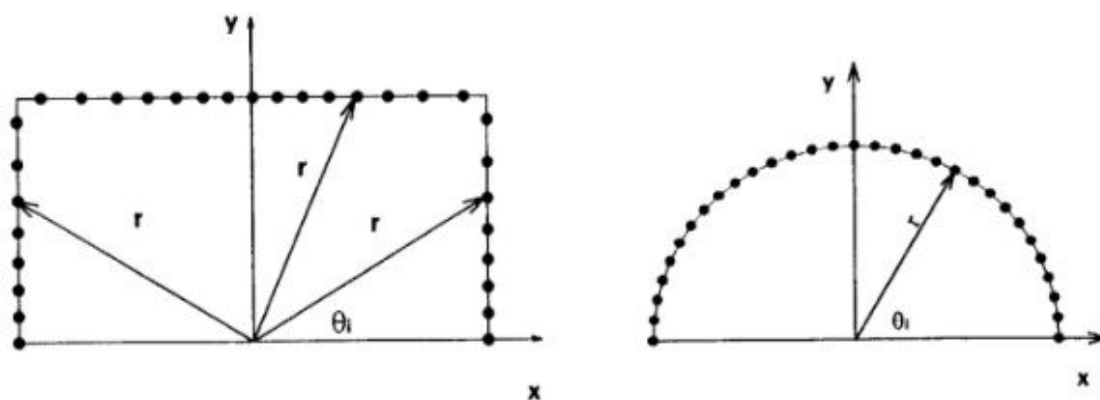
$$r_i = \begin{cases} \frac{a}{\cos \theta_i} & 0 \leq \theta_i \leq \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \\ \frac{b}{\sin \theta_i} & \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) < \theta_i \leq \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \\ \frac{a}{|\cos \theta_i|} & \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) < \theta_i \leq \pi \end{cases} \quad (۳-۶-۹)$$

در حالیکه شرایط مرزی دایره به شکل ساده زیر

$$r_i = a \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi \quad (۳-۶-۱۰)$$

بر ترکیب خطی (۳-۶-۸) تحمیل می گردد^۲.

^۲ یکی از جنبه های فیزیکی مطالعات کوانتومی دستگاههای یک بعدی و دوبعدی متقارن را علاوه بر جنبه های یاد شده دیگر که مد نظر ما است، می توان به دلیل شباهت زیاد، در محاسبه وجوه طبیعی یک ریسمان مرتعش [۳۶]، و پبلهائی با پوسته های متقارن مستطیلی و دایروی شکل [۳۷] ملاحظه نمود.



شکل (۳-۴) نمایش گسسته سازی دستگاههای مستطیل و دایره. بنا به تقارن دستگاهها، گسسته سازی نیمی از آنها کافی است، به طوری که گسسته سازی نیمه دوم آنها تنها سبب افزایش حجم محاسبات می گردد بدون آنکه در افزایش دقت نقشی ایفا کند، به بیانی دیگر جملات تکراری در بسط (۳-۶-۸) ظاهر میشود. همانطور که ملا حظه می گردد نقاط گسسته سازی روی دستگاه دایره بصورت کاملاً متقارن توزیع شده است در حالیکه این تقارن در مورد دستگاه مستطیل دیده نمی شود، زیرا دایره نسبت به زاویه قطبی متقارن ولی مستطیل نسبت آن نامتقارن است. برای آنکه به یک توزیع متقارن از نقاط روی مستطیل دست یابیم کافی است که آن را بر حسب طول خود مستطیل بجای طول قوس دایره محیطی آن پارامتری کنیم.

با اعمال هر یک از شرایط مرزی مثلاً مستطیل (۳-۶-۹) یا دایره (۳-۶-۱۰) بر ترکیب خطی (۳-۶-۸) به دسته ای از معادلات خطی مانند آنچه که در زیر نمایش داده شده است

$$\begin{pmatrix} (RB)_{11} & (RB)_{12} & (RB)_{13} & \dots & (RB)_{1N} \\ (RB)_{21} & (RB)_{22} & (RB)_{23} & \dots & \cdot \\ (RB)_{31} & (RB)_{32} & (RB)_{33} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (RB)_{N1} & \cdot & \cdot & \dots & (RB)_{NN} \end{pmatrix}_{N \times N} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_N \end{pmatrix}_{N \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}_{N \times 1}$$

(۳-۶-۱۱)

A

$\vec{X} = \vec{b}$

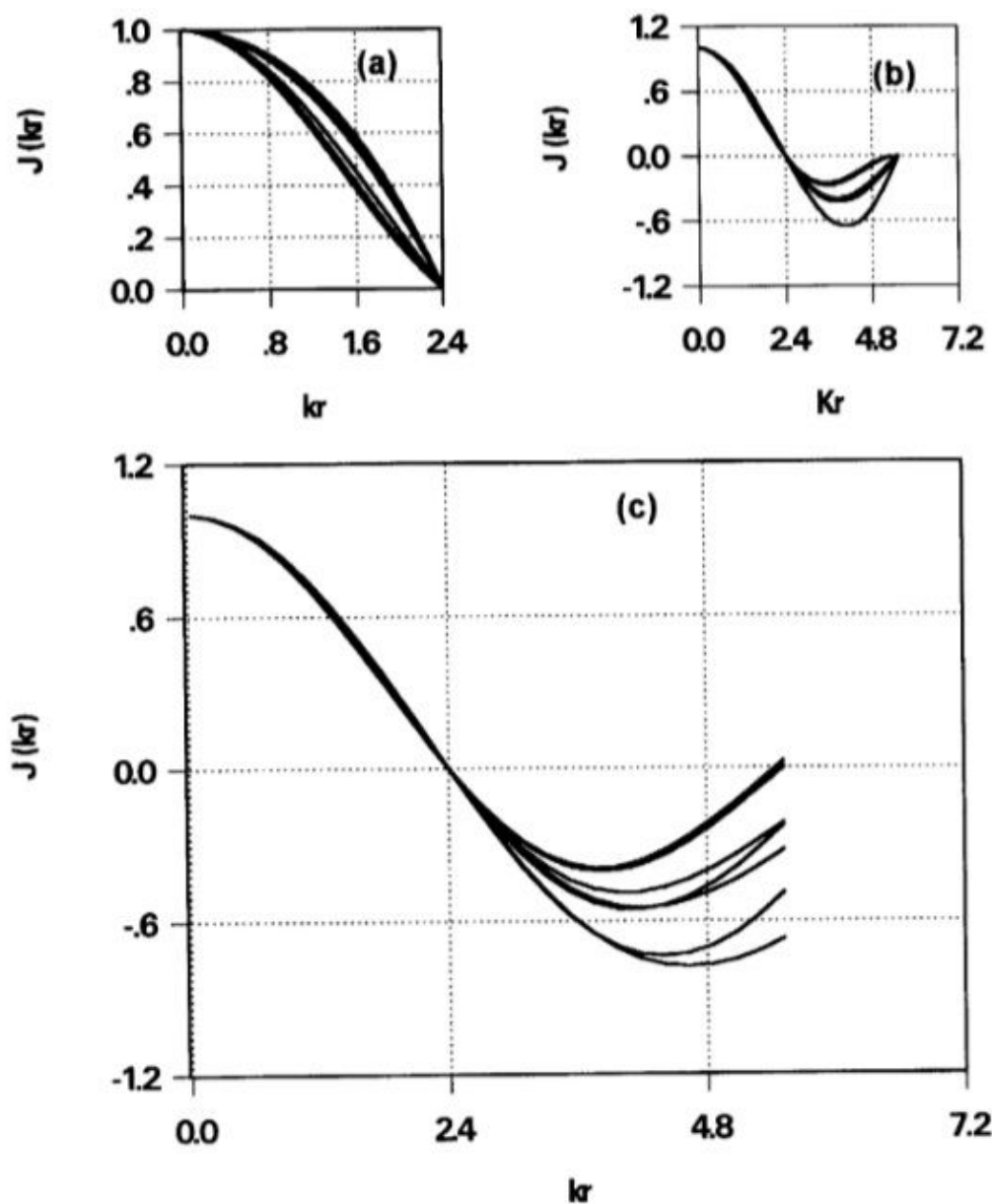
دست می یابیم، که شرایط مرزی در عناصر ماتریسی $(RB)_{ij}$ ، نهفته است یعنی از یک شرط مرزی به شرط مرزی دیگر تنها این عناصر ماتریسی هستند که تغییر می کنند. پس برای هر دستگاه با محاسبه عناصر ماتریس ضرایب A و حل معادلات (۳-۶-۱۱) به تعیین ضرایب مجهول $\vec{X}$ می پردازیم. در اینجا دسته معادلات (۳-۶-۱۱) را به روش SVD^2 ، حل کرده [۳۸ و ۳۹]، سپس این ضرایب را در معادله (۳-۶-۸) قرار می دهیم و $\Psi(x,y)$ بدست آمده را محک زده تا ببینیم که خصوصیات فیزیکی یک تابع موج خوب را برآورده می سازد یا خیر. در صورت منفی بودن پاسخ در می یابیم که از ابتدا انرژی دستگاه را جهت تعیین ماتریس ضرایب در ست اختیار نکرده ایم. پس باید آنقدر انرژی دستگاه مورد مطالعه را تغییر دهیم تا بریکی از ترازهای انرژی آن منطبق شود در این شرایط انتظار داریم که تابع موج حاصل علاوه بر ارضای شرایط مرزی، رفتار معقولی را از خود نشان دهد، و در این صورت است که می توانیم به محاسبات خود اعتماد کنیم. اگر توجه خود را به محاسبه تراز زمینه یک دستگاه معطوف سازیم به طوری که بتوانیم آن را با دقت قابل قبولی تعیین کنیم، می توانیم امیدوار باشیم که ترازهای برانگیخته بعدی را با استفاده از شرط تعامد توابع موج به دست آوریم، زیرا می دانیم که تابع موج هر تراز انرژی یک دستگاه بر توابع موج ترازهای دیگر انرژی آن دستگاه عمود است. اساساً شرط تعامد یکی از خواص عام توابع موج هر دستگاه فیزیکی است و محک مناسبی برای تائید صحت محاسبات ما است. دقت در تعیین تراز زمینه ضروری است زیرا اگر بخواهیم از شرط تعامد جهت تعیین ترازهای برانگیخته بعدی استفاده کنیم دقت محاسبات با افزایش ترازها بتدریج کاهش می یابد، و همواره باید از دقت کار خود با محکهای لازم مطلع باشیم. البته غیر از شرط تعامد توابع موج روشهای دیگری نیز برای تعیین ترازهای برانگیخته وجود دارد که بدون اطلاع از تراز زمینه می توان مستقیماً به محاسبه تراز برانگیخته پرداخت، در این صورت دیگر مسأله کاهش تدریجی دقت نیز مطرح نیست، اما حتی در این شرایط نیز باید تعامد توابع موج ترازها به منظور تائید صحت محاسبات تحقیق شود.

مبنای کار برای آنچه که تا کنون بعنوان روش حل عددی بیان داشته ایم بسیار روشن است اما ذکر یک نکته در مورد آن شاید ما در به دست آوردن جوابهای صحیح امیدوارتر سازد، و آن این که معادله شرودینگر در فضای آزاد، یعنی جائیکه پتانسیل صفر باشد را به راحتی در هر دستگاه مختصاتی

² Singular Value Decomposition

می‌توان حل کرد، اما اگر این فضا توسط مرزی که دیوارهای آن بینهایت است احاطه شود، برای حل تحلیلی مساله با توجه به هندسهٔ مرز باید دستگاه مختصات مناسب آن را اختیار نمود. هر چند که گاهی اوقات با اختیار دستگاه مختصات غیر تقارنی مساله هم می‌توان آن را به زحمت حل نمود، اما در حالت کلی توفیق در حل تحلیلی همیشه امکان پذیر نیست، در حالی که این کار از نظر عددی همیشه امکان پذیر است. یعنی می‌توانیم معادلهٔ شرودینگر را در دستگاه مختصاتی که برایمان امکان پذیر و ساده است حل کنیم و سپس شرایط مرزی هندسهٔ مسالهٔ اصلی را، که برای آن دستگاه مختصات مناسبی نیافته ایم، بر آن تحمیل نمائیم. مثلاً در اینجا مسالهٔ ساده و قابل حل را مستطیل و مسالهٔ مشکل و غیر قابل حل بصورت تحلیلی را دایره فرض کرده ایم و می‌خواهیم صحت گفتار خود را بیازمائیم. اکنون این سوال پیش می‌آید که آیا همیشه می‌توان دستگاه مستطیل را به عنوان مسالهٔ ساده انگاشت، یا به عبارت دیگر آیا هر مسالهٔ غیر قابل حل به صورت تحلیلی را می‌توان با پایهٔ مستطیلی حل کرد و آیا پایهٔ دیگری نمی‌توان یافت بگونه ای که حجم ودقت محاسبات افزایش یابد. پاسخ این سوالها را به جای دیگری در ادامه همین بخش موکول می‌کنیم.

بدین ترتیب حل عددی مستطیل با نتایج رضایت بخشی انجام می‌شود، و البته دور از انتظار هم نیست، زیرا پایهٔ مستطیل مبنای کار قرار گرفته بود. اما نتایج دایره که در شکل (۳-۵) آورده شده است با توجه به دقت مورد علاقهٔ ما قابل قبول نیستند.



شکل (۳-۵) قسمت شعاعی تابع موج دستگاه دایره بر حسب فاصله از مرکز آن در چند امتداد دلخواه. ویژه مقدار اندازه حرکت زاویه ای کل ذره در اشکال (a) تا (c) صفر ($l = 0$)، در شکل (a) سعی در محاسبه تراز زمینه ($n = 1$) حالت مورد نظر با l مربوط به آن، و در اشکال (b) و (c) قصد محاسبه اولین تراز برانگیخته ($n = 2$) آن را داشته ایم. همانطور که ملا حظه می شود در هیچیک از موارد فوقینی کامل حاصل نشده است.

شکل (۵-۳) نمایشی از تغییرات شعاعی تابع موج حالت‌های ($l = 0$) ذره ای محبوس در چاه پتانسیلی به شکل دایره به شعاع واحد در چند جهت دلخواه است. در ترسیم هر شاخه از تابع موج در یک جهت دلخواه، انرژی دستگاه را دانسته فرض کرده و آن را با حداکثر دقت در معادله (۸-۶-۳) قرار داده و ضرایب مجهول بسط را با حل دستگاه (۱۱-۶-۳) بدست آورده ایم. سپس ضرایب بدست آمده را در معادله (۸-۶-۳) قرار داده ایم، به این ترتیب تابع موج دستگاه را به ازای θ_i های مختلف رسم کرده ایم. می دانیم که دایره یک دستگاه متقارن است، بنا بر این با توجه به حل تحلیلی (۱-۶-۳) انتظار داریم که در جهات مختلف قسمت شعاعی تابع موج یعنی $J_0(k_{n0}r)$ ، رفتاری یکسان از خود بروز دهد به عبارتی در هریک از اشکال (۵-۳) باید کلیه شاخه‌های تابع موج در جهات مختلف بر یکدیگر منطبق باشند. اما همانطور که مشاهده می‌شود این انطباق وجود ندارد و با افزایش ترازها عدم انطباق نمایان تر می‌شود. عدم انطباق در جهات مختلف در شکل (۵-۳-a) موجب پدید آمدن سطحی شده است که توابع موج بصورت ریسمانهایی این سطح را پر کرده اند. دو سر ابتدایی این ریسما نها به یکدیگر و دو سر انتهایی آنها نیز به هم گره خورده اند. این گره‌ها ناشی از اعمال شرایط مرزی اند و گواهی می‌دهند که این شرایط برآورده شده اند. اکنون سوالی را که می‌توان مطرح کرد این است که، اگر شرایط مرزی برآورده شده است چرا با توجه به یکتایی پاسخ معادله شرودینگر توابع موج بر یکدیگر منطبق نیستند. قبل از آن‌که پاسخ این سوال را به دقت بیابیم سعی کردیم که با نگاه کردن به امتداد تابع موج همانطور که در شکل (۵-۳-c) نشان داده شده است به اولین تراز برانگیخته حالت $l = 0$ ، این دستگاه برسیم ولی ملاحظه می‌گردد که این تلاش بی‌نتیجه بوده است، زیرا دسته توابع موج رسم شده بجای تمرکز در یک نقطه که متناظر با صفر تابع موج دستگاه است از یکدیگر دور شده اند. برای ایجاد گره در برانگیخته اول باز هم فرض کردیم که این تراز انرژی را نیز به دقت حداکثر می‌دانیم سپس دستگاه معادلات را مجدداً حل کرده و توابع موج را رسم کردیم. این توابع در شکل (۵-۳-b) نشان داده شده‌اند. در این حالت هر چند که کلاف توابع موج در برانگیخته اول به هم گره خورده اند که باز هم تاییدی بر حل صحیح دستگاه معادلات است، لکن در بین دو تراز از هم گسیختگی کلاف باز هم مشاهده می‌شود. از تلاش خود دست برداشته و با علم به اینکه پاسخ تحلیلی را می‌دانستیم در چندین نقطه دیگر بین ترازها از مقدار دقیق تابع موج استفاده کرده و آنها را بصورت شرایط مرزی بر دستگاه معادلات تحمیل کردیم. ولی هر بار از هم گسیختگی توابع موج تنها از ناحیه‌ای به ناحیه دیگر تغییر مکان می‌داد. سرانجام پاسخ را این گونه یافتیم که، شرایط مرزی با دقتی بیشتر از آنچه که ما انرژی دستگاه را وارد کرده ایم نیست. در این صورت سوال دیگر این است علت را در کجا باید جستجو کرد. پاسخ این سوال در نحوه انتخاب پایه بسط می‌باشد. پایه مستطیلی $(RB)_{ij}$ ، پایه مناسبی برای دستگاه دایره نیست زیرا مستطیل خود نسبت به زاویه تقارن ندارد. برای تصحیح این پایه بصورت زیر عمل می‌کنیم.

۳-۶-۲ دستگاه دایره با پایه مستطیل تصحیح شده

جهت مقارن کردن پایه $(RB)_{ij}$ بگونه‌ای که برای دستگاه مقارن دایره مورد استفاده قرار گیرد، کافی است که تابع موج مستطیل با پاریته فرد_فرد را که پس از گسسته سازی می‌توانیم آن را بصورت زیر

$$\sin(kr_i \cos\theta_i \cos\theta_j) \sin(kr_i \sin\theta_i \sin\theta_j) \quad (12-6-3)$$

نمایش دهیم از پایه $(RB)_{ij}$ کم نمائیم، در این صورت خواهیم داشت

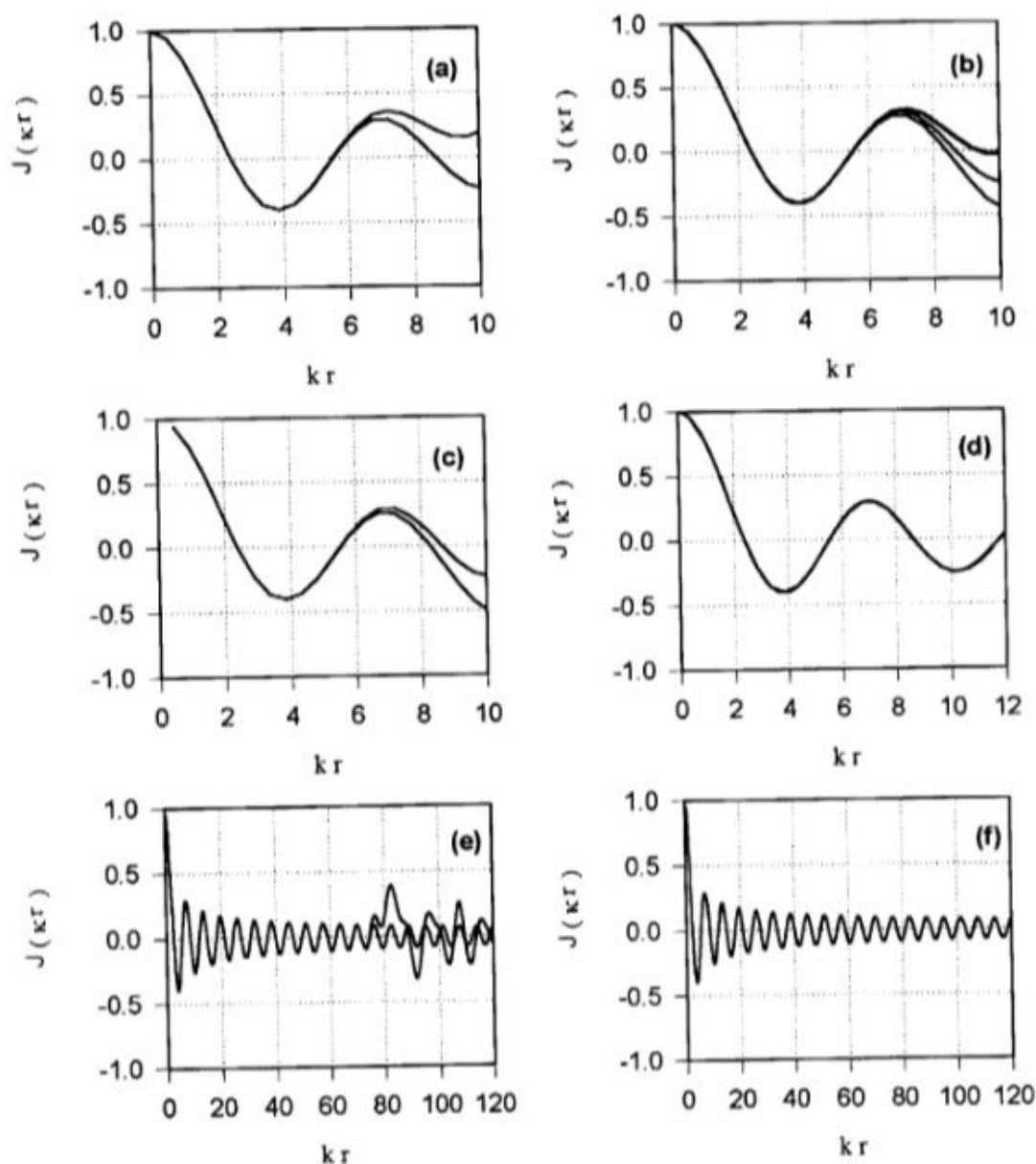
$$\begin{aligned} & \cos(kr_i \cos\theta_i \cos\theta_j) \cos(kr_i \sin\theta_i \sin\theta_j) - \sin(kr_i \cos\theta_i \cos\theta_j) \sin(kr_i \sin\theta_i \sin\theta_j) \\ &= \cos(kr_i \cos\theta_i \cos\theta_j + kr_i \sin\theta_i \sin\theta_j) \\ &= \cos(kr_i \cos(\theta_i - \theta_j)) \end{aligned} \quad (13-6-3)$$

پایه تصحیح شده فوق را از این پس برای سادگی بصورت زیر نمایش می‌دهیم

$$(CB)_{ij} = \cos(kr_i \cos(\theta_i - \theta_j)) \quad (14-6-3)$$

یک توجیه مناسبتر برای پایه $(CB)_{ij}$ ^۴، می‌تواند با در نظر گرفتن موج تخت $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \cos(kr_i \cos(\theta_i - \theta_j)) + i \sin(kr_i \cos(\theta_i - \theta_j))$ برای یک دستگاه دوبعدی، ارائه شود. به این ترتیب می‌بینیم که توابع $\cos(kr_i \cos(\theta_i - \theta_j))$ و $\sin(kr_i \cos(\theta_i - \theta_j))$ می‌توانند برای بسط هر تابع موج دلخواه در داخل دایره به‌کار روند. ولی با توجه به تقارن توابع موج مربوط به $l=0$ فقط کافی است که از تابع $\cos(kr_i \cos(\theta_i - \theta_j))$ استفاده کنیم. به همین ترتیب توابع موج مربوط به $l=1$ و بالاتر را نیز با استفاده از پایه $\sin(kr_i \cos(\theta_i - \theta_j))$ می‌توان ساخت، ولی برای حالت‌های بالاتر لازم است که از شرط تعامد توابع موج نیز استفاده کرد. نتایج حاصل از این پایه تصحیح شده در شکل (۳-۶) نمایش داده شده است.

^۴ Circular Basis



شکل (۳-۶) نمایش تغییرات قسمتهای شعاعی توابع موج دایره ای به شعاع واحد $(J_1(k_{H1}r) - J_0(k_{H1}r))$ بر حسب فاصله از مرکز آن. در هر یک از اشکال فوق پاسخهای دقیق با نقطه چین از پاسخهای عددی تفکیک شده اند. در شکلهای (a) و (b) تعداد نقاطی که شرایط مرزی بر آنها تحمیل شده است $N=40$ می باشد. این تعداد در مورد شکل (b) $N=10$ و در مورد شکل (f) $N=80$ است. انرژی دستگاه در حالت زمینه تا دقت چهار رقم اعشار $(2/4048)$ است. در (a) و (b) عدم انطباق به ترتیب به دلیل حدس انرژی کمتر $(2/4047)$ و حدس انرژی بیشتر $(2/4049)$ نسبت به انرژی دقیق صورت گرفته است. در (b) هر چند که انرژی دقیق دستگاه وارد شده است ولی به دلیل کمی تعداد نقاط اعمال شرایط مرزی انطباق کامل صورت نگرفته است. شکل (d) گویای انطباق کامل تا تراز برانگیخته سوم است. شکل (e) علارغم وارد کردن انرژی دقیق و ارائه تعداد نقاط کافی برای ترازهای انرژی پائینتر، نشان دهنده اهمیت تعداد نقاط اعمال شرایط مرزی برای بدست آوردن ترازهای انرژی بالاتر است. بطوریکه در شکل (f) انطباق کامل تا تراز سی و هشتم با هشتاد نقطه و انرژی دقیق کاملاً مشاهده می شود. در کلیه حالات ذره فاقد اندازه حرکت زاویه ای است.

شکل (۶-۳) علاوه بر آنکه استفاده از پایه $(CB)_j$ ، را برای دستگاه دایره مورد تائید قرار می دهد، در عین حال گویای روشی برای محاسبه ترازهای برانگیخته بالاتر نیز هست. مقایسه شکل‌های (۶-۳-a) و (۶-۳-c) نشان می دهند که انتخاب انرژی کمتر سبب افزایش تابع موج و انتخاب انرژی بیشتر سبب کاهش آن نسبت به تابع موج دقیق دستگاه خواهد شد. این امر از آنجاکه در ترازهای برانگیخته بالاتر نیز به وقوع می پیوندد اتفاقی نبوده و حتی افزایش تعداد نقاط اعمال شرایط مرزی نیز باعث به هم خوردن این امر نمی شود. لذا از آن می توان به عنوان یک قاعده برای یافتن ترازهای انرژی دستگاه و همچنین بالا بردن دقت محاسبات استفاده کرد. لازم به ذکر است که تا قبل از این مرحله ما تنها قادر به تائید صحت یک انرژی از پیش دانسته شده بودیم و نمی توانستیم خود به تعیین یک تراز انرژی مجهول بپردازیم. این امر در مورد دستگاهانی که ترازهای انرژی آنها برای ما معلوم نیست کار ساز خواهد بود. شکل (۶-۳-b) نشان می دهد که حتی با تعداد نقاط کم هم می توانیم ترازهای اول و دوم را محاسبه کنیم و خطای حاصل از کمی تعداد نقاط در تراز سوم به بعد خود را نشان می دهد البته این در صورتی است که انرژی دقیق دستگاه را وارد کرده باشیم. شکل (۶-۳-d) تعداد چهل نقطه جهت اعمال شرایط مرزی روی دستگاه دایره را برای محاسبه تراز سوم کافی می داند. در حالیکه شکل‌های (۶-۳-e) و (۶-۳-f) حداقل تعداد هشتاد نقطه مرزی را لازم می دانند.

۳-۶-۳ دستگاه کره با پایه دایره دوران یافته

در این بخش می خواهیم تابع موج کره را به دست آوریم. هدف از این کار دستیابی به پایه ای است که نهایتاً برای حل معادله شرودینگر با شرایط مرزی استادیوم دوار به کار رود. در ابتدا سعی کردیم پایه کروی، که آنرا پایه $(SB)_j^5$ می نامیم را با ایجاد تغییراتی در پایه $(CB)_j$ به دست آوریم. به این دلیل ابتدا پایه $(CB)_j \sin \theta$ را امتحان کردیم. پایه ذکر شده نتایج رضایت بخشی را به دنبال نداشت. ولی بعداً تلاش محاسباتی ما نشان داد که پایه زیر

$$(SB)_j = (CB)_j \sin |\theta_i - \theta_j| \quad (15-6-3)$$

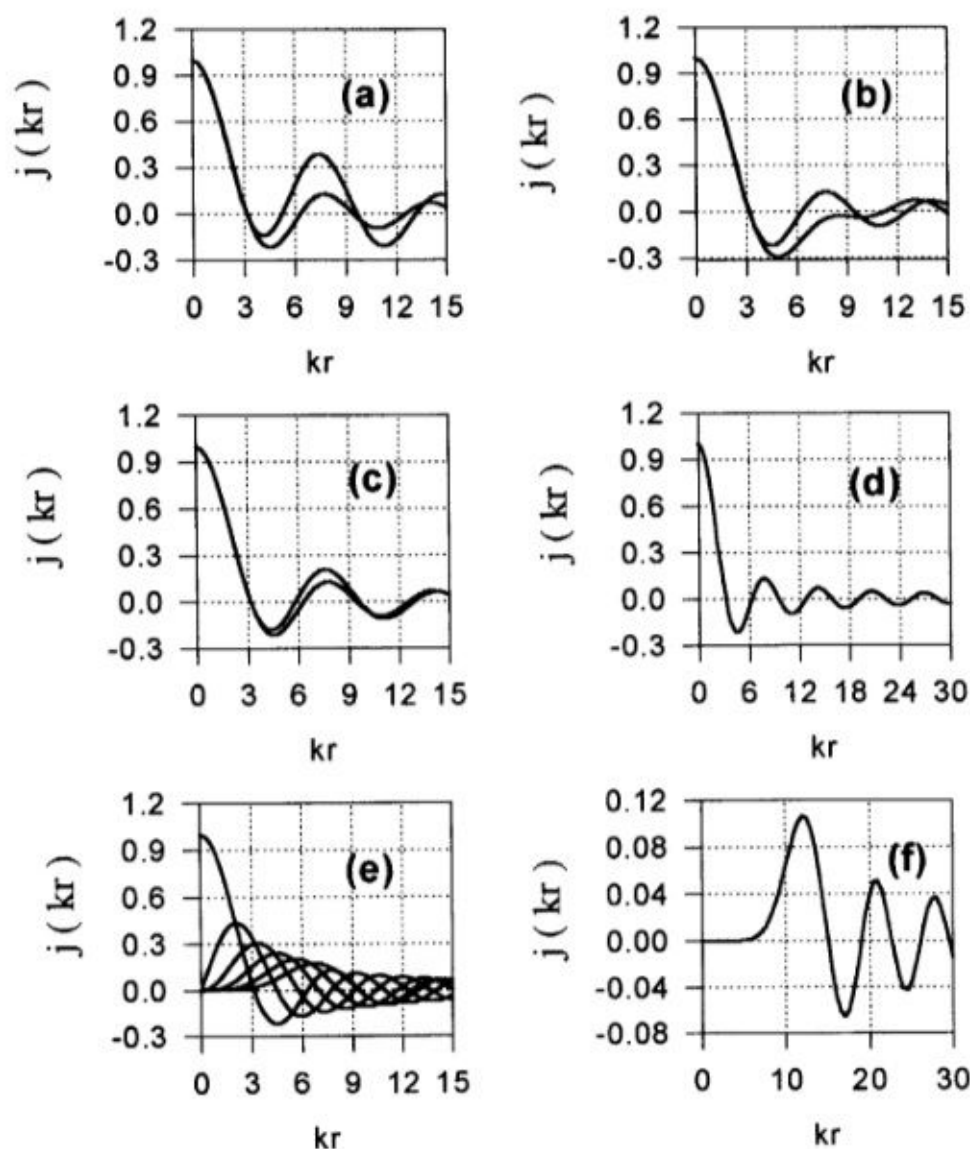
حداقل برای حالت‌های $l=0$ ، کره مناسب است. نتایج مربوط به این پایه در شکل (۷-۳) ارائه شده است. اما پیش از آن توجه به یک نکته ریاضی می‌تواند علت موفق بودن نتایج محاسبات کره با پایه (۳-۶-۳) $(SB)_y$ را توجیه کند. اگر رابطه (۱-۳-۳) را برای حالت $l=0$ به کار ببریم، تابع موج کره برای حالت‌های ذکر شده به صورت زیر به دست می‌آید

$$j_0(kr) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(kr \cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (۱۶-۶-۳)$$

حال اگر رابطه (۱۶-۶-۳) را با جایگزینی $\theta = \theta_i - \theta_r$ با بسط گسسته

$$\Psi(kr) = \sum_j x_j (SB)_y \quad (۱۷-۶-۳)$$

مقایسه کنیم، نتیجه آن است که با انتخاب یکسان همه x_j ها بسط (۱۷-۶-۳) به تابع $j_0(kr)$ منجر می‌شود. نهایتاً می‌توان مقادیر مختلف k را چنان انتخاب کرد که شرط مرزی صفر شدن تابع موج در $r=a$ برقرار شود و به این طریق انرژی حالت‌های E_{0n} را به دست آورد. ما به این طریق توانستیم با تغییر آهسته k ، سطوح انرژی کره برای حالت‌های $l=0$ را با دقت دلخواه به دست آوریم. در تمام این موارد جواب x_j ها از حل معادله (۱۱-۶-۳) دقیقاً مساوی به دست آمد، که مؤید گفتار فوق است. در فصل پنجم نتایج استفاده از این پایه برای حل مسئله استادیوم دوار را بررسی خواهیم کرد.



شکل (۷-۳) نمایش تغییرات قسمتهای شعاعی توابع موج کره ای به شعاع واحد $(j_l(k_{ln}r) - j_l)$ بر حسب فاصله از مرکز آن.

(a) خطای حاصل از کم بودن تعداد نقاط اعمال شرایط مرزی روی تابع موج ذره $(N = 20)$ ، (b) خطای حاصل از زیاد بودن انرژی انتخابی ذره نسبت به مقدار واقعی آن $k_{05} = 15.71 > 15.70$ & $N = 100$ (c) خطای حاصل از کوچک بودن انرژی انتخابی ذره $k_{05} = 15.69 < 15.70$ & $N = 100$ (d) انطباق کامل حل عددی بر پاسخ تحلیلی $k_{08} = 25.13$ & $N = 100$ (e) کا هش ماکزیمم توابع موج با افزایش مقدار ویژه اندازه حرکت زاویه ای l از $l = 0$ به $l = 5$ (f) عدم احتمال حضور ذره با اندازه حرکت زیاد $(l = 10)$ در نزدیکیهای مرکز کره.

۵۶

شکلهای (۷-۳-a,b,c,d) برای دستگاه کره همانند شکلهای (۶-۳-a,b,c,d) برای دستگاه دایره تائیدی دیگر بر صحت محاسبات و قاعده تعیین انرژی است. در شکلهای (۷-۳- e,f) از پایه کره استفاده نشده است زیرا در آنها از اندازه حرکت‌های غیر صفر هم استفاده شده است، در این اشکال با افزایش اندازه حرکت زاویه ای شاهد کاهش قله موج و احتمال حضور ذره در حوالی مرکز هستیم که نکته تازه ای نیست و فقط صحت روش را تائید می کنند.

فصل چهارم

بررسی کوانتومی یک ذره در استوانه

مقدمه

یکی دیگر از مباحثی را که می توانیم در سه بعد بصورت تحلیلی مورد مطالعه قرار دهیم، بررسی کوانتومی یک ذره محبوس در چاه پتانسیل استوانه ای با پوسته بینهایت است. بحث فوق را می توان به دلیل شباهت بسیار زیاد با محاسبه وجه های طبیعی قابل تشدید در یک تشدید کننده لیزری با کاواک استوانه ای، سنگ بنای طراحی این گونه از تشدید کننده ها دانست [۴۰]. هر چند که گزینش ماده فعال درون یک تشدید کننده لیزری تعیین کننده بسامد قابل تشدید در آن می باشد ولی بدون طراحی دقیق کاواک آن این امر میسر نخواهد شد. یکی از پارامترهای اساسی طراحی یک تشدید کننده استوانه ای محاسبه نسبت طول به شعاع آن می باشد چرا که بسامد قابل تشدید در آن شدیداً به این پارامتر بستگی دارد. البته طراحی یک لیزر بسته به کار روی نا حیه دلخواهی از طول موج و بنابراین انتخاب روش مناسب دمش در آن ناحیه به پارامترهای بیشتری بستگی دارد که غالباً بصورت تجربی تعیین می گردند.

اما آنچه که سبب علاقه مابه بررسی یک ذره کوانتومی در استوانه شده است، این است که استوانه را می توان حالت حدی استادیوم دوار وقتی که طول استادیوم دوار درمقابل شعاع دو نیم کره انتهایی آن بسیار بزرگ باشد، تلقی نمود. پس اگر می خواهیم به نتایج محاسبات عددی خود در مورد استادیوم دوار اعتماد کنیم، بایستی نتایج ما در این حالت حدی بر پاسخهای تحلیلی کاملاً منطبق باشد. در اینجا لازم است متذکر شویم که حتی در این حالت حدی نیز ترازهای انرژی کاملاً بصورت تحلیلی بدست نمی آیند، زیرا نهایتاً باید معادله $J_m(k_{nmp}a) = 0$ را برای محاسبه ترازهای انرژی ذره کوانتومی در استوانه حل کنیم، که معنی این معادله این است که تابع موج ذره روی سطح جانبی استوانه باید صفر باشد.

در این معادله، $J_m(k_{nmp}a)$ تابع بسل استوانه ای، a شعاع استوانه، m مقدار ویژه مولفه سوم اندازه حرکت زاویه ای، n شماره ترازهای انرژی به ازای یک m, p معین در راستای شعاع استوانه، p شماره ترازهای انرژی به ازای یک m, n معین در راستای محور طولی استوانه و k_{nmp} اندازه بردار موج ذره در حالت (n, m, p) است، که البته حل چنین معادله ساده ای نیازمند کار محاسباتی چندان مفصلی نیست، و پاسخهای آن براحتی قابل حصول می باشند، از طرف دیگر طبقه بندی ترازهای انرژی یک ذره کوانتومی در استوانه به ما این امکان را خواهد داد تا در آینده بتوانیم نحوه توزیع انرژی دستگاه استادیوم دوار را با آن مقایسه کنیم و ظهور آشوب از دیدگاه مکانیک کوانتومی را بهتر دریابیم.

۴-۱ حل تحلیلی یک ذره کوانتومی در استوانه

تابع پتانسیل را در این حالت به صورت زیر تعریف می کنیم

$$V(\bar{X}) = \begin{cases} 0 & \text{درون استوانه} \\ \infty & \text{خارج و روی مرز استوانه} \end{cases} \quad (۴-۱-۱)$$

بدین گونه این ذره در استوانه‌ای به شعاع a و طول $2L$ ، محبوس است. در خارج از استوانه نفوذ ناپذیر، تابع موج ذره صفر است. معادله شرودینگر در داخل پوسته را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi(\rho, \varphi, z) + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(\rho, \varphi, z) = 0 \quad (2-1-4)$$

با توجه به تقارن استوانه‌ای مساله به کمک روش جدا سازی متغیرها معادله (۲-۱-۴) به راحتی قابل حل می باشد و پاسخ نهائی آن را می توان بصورت زیر نوشت

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi(\rho, \varphi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left[A_{nm} J_m(k_{nm}^{\rho} \rho) + B_{nm} N_m(k_{nm}^{\rho} \rho) \right] \left[C_p \cos(k_p^z z) + D_p \sin(k_p^z z) \right] e^{im\varphi} \\ E_{nmp} &= \frac{\hbar^2 k_{nmp}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ k_{nm}^{\rho 2} + k_p^z 2 \right\} \end{aligned} \right. \quad (3-1-4)$$

که در آن $J_m(k_{nm}^{\rho} \rho)$ ، $N_m(k_{nm}^{\rho} \rho)$ به ترتیب توابع نیومن و بسل استوانه‌ای، A_{nm} ، B_{nm} ، C_p ، D_p ضرایب بسط، و E_{nmp} نیز انرژی کل دستگاه در حالت $|n, m, p\rangle$ می باشند. تابع $N_m(k_{nm}^{\rho} \rho)$ در $\rho = 0$ ، تحلیلی نیست، و این متناقض با احتمال منتهای حضور ذره می باشد. پس برای به دست آوردن تابع موج ذره در داخل استوانه باید کلیه ضرایب B_{nm} ، را مساوی صفر قرار دهیم، از طرفی اگر توجه خود را فقط به توابع موج با پاریته زوج-زوج معطوف کنیم باید کلیه ضرایب D_p ، را هم مساوی صفر قرار دهیم، در این صورت خواهیم داشت

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{nmp} J_m(k_{nm}^{\rho} \rho) \cos(k_p^z z) e^{im\varphi} \quad (4-1-4)$$

برای یک وجه خاص تابع موج (۴-۱-۴) را مستقل از ضریب بهنجارش بصورت زیر نمایش می دهیم

$$\Psi_{nmp}(\rho, \varphi, z) = J_m(k_{nm}^{\rho} \rho) \cos(k_p^z z) e^{im\varphi} \quad (5-1-4)$$

۴-۲ معادله ویژه مقدار

برای محاسبه ویژه مقادیر یک ذره کوانتومی در استوانه کافی است که شرایط مرزی پتانسیل استوانه ای را بر ویژه توابع (۴-۱-۵) که گویای یک حالت معین $|n, m, p\rangle$ ، با سه عدد کوانتومی است، بصورت زیر تحمیل نمائیم

$$\begin{cases} \Psi_{nmp}(r, \varphi, \pm L) = 0 \\ \Psi_{nmp}(a, \varphi, z) = 0 \end{cases} \quad (۱-۲-۴)$$

از معادله فوق نتیجه می شود که

$$\cos(k_p^z(\pm L)) = 0 \Rightarrow k_p^z = (2p-1)\frac{\pi}{2}, \quad p \in N \quad (۲-۲-۴)$$

یا

$$J_m(k_{nm}^p a) = 0 \quad (۳-۲-۴)$$

k_p^z های تعریف شده در رابطه (۲-۲-۴) و آن دسته از k_{nm}^p -هاییکه رابطه (۳-۲-۴) را برآورده سازند ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر به دست خواهند داد.

$$E_{nmp} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_{nm}^p{}^2 + \left(\frac{(2p-1)\frac{\pi}{2}}{L} \right)^2 \right) \quad (۴-۲-۴)$$

همانطور که ملاحظه می گردد بر خلاف دستگاه کره ویژه مقادیر انرژی به کوانتش روی زاویه سمتی بستگی دارند. در دستگاه کره قانون پایستگی هم در مورد اندازه حرکت زاویه ای کل و هم در مورد

مؤلفه سوم آن صادق بود، در حالیکه در دستگاه استوانه فقط می توانیم از قانون پایستگی مؤلفه سوم اندازه حرکت زاویه‌ای سخن به میان آوریم.

برای محاسبه k_{nm}^p ها باید معادله (۳-۲-۴) را حل کنیم. اگر شعاع استوانه را واحد فرض کنیم کافی است که صفرهای تابع بسل استوانه ای $J_m(k_{nm}^p)$ را بدست آوریم. اما معادله $J_m(x) = 0$ ، یک معادله غیر خطی است، و باید روش مناسبی برای حل آن ارائه دهیم.

۳-۴ حل معادله $J_m(x) = 0$

برای حل معادله $J_m(x) = 0$ از شکل انتگرالی تابع بسل استوانه‌ای بصورت زیر استفاده می کنیم، [۳۵]

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (۱-۳-۴)$$

رابطه فوق را بصورت زیر گسسته می کنیم.

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \cos(ni\Delta\theta - x \sin(i\Delta\theta)) \Delta\theta \quad (۲-۳-۴)$$

که در آن بازه $[0, \pi]$ را به N قسمت مساوی تقسیم کرده ایم $(\Delta\theta = \frac{\pi}{N})$.

بنابراین برای یافتن صفرهای تابع بسل استوانه‌ای کافی است که معادله زیر را حل نمایم

$$J_m(x) = \sum_{i=1}^N \cos(ni\Delta\theta - x \sin(i\Delta\theta)) = 0 \quad (۳-۳-۴)$$

هر x ی که مجموع فوق را به سمت صفر میل دهد جواب مساله است. طبیعی است که هر چه میزان گسسته سازی یعنی N افزایش یابد دقت ما نیز بیشتر خواهد شد. بنابر تجربه اگر $N=50000$ باشد، که در قیاس با تابع بسل کروی پنج برابر بیشتر است، محاسبات ما حداقل تا پنج رقم اعشار دقت خواهند داشت.

طبقه‌بندی ترازهای انرژی بر حسب ویژه مقادیر مختلف مؤلفه سوم اندازه حرکت زاویه ای یک ذره محبوس در استوانه، از اهمیت زیادی برخوردار است. به همین دلیل جدول (۴-۱) را بر اساس حل معادله (۴-۳) به منظور گردآوری اندازه بردارهای موج ذره برای ویژه مقادیر مختلف مؤلفه سوم اندازه حرکت زاویه‌ای متناظر با ویژه مقادیر انرژی ذره محبوس در استوانه تنظیم شده است.

در این جدول اندازه‌های بردار موج ذره از $m=0$ تا $m=84$ درج شده است. به ازای هر m معین شماره ترازها n ، تا وقتی ادامه یافته است که k_{nm} آنها از ۱۰۰ تجاوز نکرده باشد. همانطور که ملاحظه می‌گردد با افزایش m تعداد ترازها با قید فوق الذکر کاهش می‌یابد. بطوریکه در $m=0$ تعداد آنها $n=30$ ، در $l=10$ تعداد آنها $n=25$ و در $l=71$ تعداد آنها به $n=4$ می‌رسد.

جدول (۴-۱) صفرها و مقادیر وابسته توابع بسل استوانه ای ($J_m(k_{nm}) = 0$ & $1 \leq m \leq 14$)

m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}
00	01	02.404825	02	05	08.417243	04	10	36.699001	06	18	64.912513	09	02	17.241333	11	15	62.651016
00	02	05.520078	02	06	08.417243	04	11	39.857627	06	19	68.066886	09	03	20.806927	11	16	65.840011
00	03	08.653727	02	07	08.417243	04	12	43.013736	06	20	71.220130	09	04	24.234013	11	17	69.023765
00	04	08.653727	02	08	08.417243	04	13	46.167854	06	21	74.372375	09	05	27.583614	11	18	72.204528
00	05	08.653727	02	09	08.417243	04	14	49.320362	06	22	77.523750	09	06	30.885521	11	19	75.381118
00	06	08.653727	02	10	33.716518	04	15	52.471549	06	23	80.674354	09	07	34.154229	11	20	78.555679
00	07	08.653727	02	11	36.862857	04	16	55.621650	06	24	83.824287	09	08	37.400256	11	21	81.726776
00	08	08.653727	02	12	40.008445	04	17	58.770835	06	25	86.973609	09	09	40.628392	11	22	84.896522
00	09	08.653727	02	13	43.153453	04	18	61.919246	06	26	90.122383	09	10	43.843967	11	23	88.063323
00	10	30.634607	02	14	46.297996	04	19	65.066993	06	27	93.270683	09	11	47.048526	11	24	91.229263
00	11	33.775821	02	15	49.442165	04	20	68.214172	07	01	11.086276	09	12	50.245506	11	25	94.392631
00	12	36.917098	02	16	52.586025	04	21	71.360862	07	02	14.821371	09	13	53.435043	12	01	16.698249
00	13	40.058425	02	17	55.729625	04	22	74.507118	07	03	18.287471	09	14	56.619770	12	02	20.789905
00	14	43.199790	02	18	58.873016	04	23	77.652992	07	04	21.641661	09	15	59.799106	12	03	24.494884
00	15	46.341186	02	19	62.016223	04	24	80.798530	07	05	24.934800	09	16	62.975315	12	04	28.026710
00	16	49.482608	02	20	65.159271	04	25	83.943778	07	06	28.191324	09	17	66.147392	12	05	31.459960
00	17	52.624050	02	21	68.302192	04	26	87.088760	07	07	31.422652	09	18	69.317420	12	06	34.829986
00	18	55.765510	02	22	71.444992	04	27	90.233505	07	08	34.937238	09	19	72.484138	12	07	38.156375
00	19	58.906982	02	23	74.587684	04	28	93.378036	07	09	37.838562	09	20	75.649543	12	08	41.451091
00	20	62.048469	02	24	77.730293	05	01	08.771402	07	10	41.030937	09	21	78.812187	12	09	44.721942
00	21	65.189964	02	25	80.872825	05	02	08.771402	07	11	44.215240	09	22	81.974044	12	10	47.974292
00	22	68.331466	02	26	84.015289	05	03	08.771402	07	12	47.394340	09	23	85.133506	12	11	51.211967
00	23	71.472984	02	27	87.157684	05	04	08.771402	07	13	50.568004	09	24	88.292572	12	12	54.437778
00	24	74.614501	02	28	90.300025	05	05	08.771402	07	14	53.738510	09	25	91.449516	12	13	57.653842
00	25	77.756027	02	29	93.442314	05	06	08.771402	07	15	56.905059	09	26	94.606353	12	14	60.861804
00	26	80.897552	02	30	96.584564	05	07	08.771402	07	16	60.069671	10	01	14.475501	12	15	64.062934
00	27	84.039093	03	01	06.379826	05	08	08.771402	07	17	63.231220	10	02	18.433464	12	16	67.258262
00	28	87.180633	03	02	09.761424	05	09	08.771402	07	18	66.391609	10	03	22.046985	12	17	70.448608
00	29	90.322174	03	03	09.761424	05	10	38.160022	07	19	69.549499	10	04	25.509450	12	18	73.634643
00	30	93.463722	03	04	09.761424	05	11	41.326221	07	20	72.706764	10	05	28.887374	12	19	76.816917
01	01	03.831457	03	05	09.761424	05	12	44.489486	07	21	75.861900	10	06	32.211856	12	20	79.995903
01	02	07.015919	03	06	09.761424	05	13	47.649227	07	22	79.016784	10	07	35.499908	12	21	83.171989
01	03	07.015919	03	07	09.761424	05	14	50.807342	07	23	82.169784	10	08	38.761806	12	22	86.345497
01	04	07.015919	03	08	09.761424	05	15	53.962841	07	24	85.322814	10	09	42.004188	12	23	89.516708
01	05	07.015919	03	09	09.761424	05	16	57.117492	07	25	88.474128	10	10	45.231575	12	24	92.685874
01	06	07.015919	03	10	35.218818	05	17	60.270050	07	26	91.625686	10	11	48.447151	12	25	95.853187
01	07	07.015919	03	11	38.370315	05	18	63.422252	07	27	94.775642	10	12	51.653251	13	01	17.801307
01	08	07.015919	03	12	41.520881	05	19	66.572685	08	01	12.225092	10	13	54.851619	13	02	21.956375
01	09	07.015919	03	13	44.669574	05	20	69.723098	08	02	16.037774	10	14	58.043586	13	03	25.704965
01	10	32.190391	03	14	47.817958	05	21	72.871948	08	03	19.554536	10	15	61.230197	13	04	29.270772
01	11	35.331562	03	15	50.964851	05	22	76.021011	08	04	22.945173	10	16	64.412269	13	05	32.730903
01	12	38.475543	03	16	54.111801	05	23	79.168640	08	05	26.266815	10	17	67.590469	13	06	36.123813
01	13	41.616287	03	17	57.257461	05	24	82.316665	08	06	29.545659	10	18	70.765335	13	07	39.469043
01	14	44.760158	03	18	60.403419	05	25	85.463340	08	07	32.795800	10	19	73.937301	13	08	42.780605
01	15	47.900592	03	19	63.548202	05	26	88.610542	08	08	36.025615	10	20	77.106735	13	09	46.065536
01	16	51.044429	03	20	66.693443	05	27	91.756454	08	09	39.240448	10	21	80.273948	13	10	49.330959
01	17	54.184631	03	21	69.837577	05	28	94.902999	08	10	42.443888	10	22	83.439186	13	11	52.579586
01	18	57.328475	03	22	72.982292	06	01	09.936109	08	11	45.638444	10	23	86.602691	13	12	55.815910
01	19	60.468482	03	23	76.125930	06	02	09.936109	08	12	48.825930	10	24	89.764625	13	13	59.040737
01	20	63.612358	03	24	79.270248	06	03	09.936109	08	13	52.007690	10	25	92.925170	13	14	62.257389
01	21	66.752204	03	25	82.413490	06	04	09.936109	08	14	55.184749	11	01	15.589731	13	15	65.465675
01	22	69.896118	03	26	85.557495	06	05	09.936109	08	15	58.357887	11	02	19.616088	13	16	68.668342
01	23	73.035827	03	27	88.700431	06	06	09.936109	08	16	61.527736	11	03	23.275724	13	17	71.864624
01	24	76.179794	03	28	91.844192	06	07	09.936109	08	17	64.694778	11	04	26.773458	13	18	75.056961
01	25	79.319374	03	29	94.986869	06	08	09.936109	08	18	67.859428	11	05	30.178918	13	19	78.244232
01	26	82.463401	04	01	07.588342	06	09	09.936109	08	19	71.021995	11	06	33.526512	13	20	81.428718
01	27	85.602859	04	02	07.588342	06	10	39.603240	08	20	74.182769	11	07	36.833415	13	21	84.609039
01	28	88.746948	04	03	07.588342	06	11	42.778480	08	21	77.341957	11	08	40.111984	13	22	87.787399
01	29	91.886209	04	04	07.588342	06	12	45.949016	08	22	80.499755	11	09	43.368194	13	23	90.962234
01	30	95.030456	04	05	07.588342	06	13	49.115772	08	23	83.656318	11	10	46.608306	13	24	94.135726
02	01	05.135622	04	06	07.588342	06	14	52.279453	08	24	86.811790	11	11	49.834472	14	01	18.899997
02	02	08.417243	04	07	07.588342	06	15	55.440593	08	25	89.966278	11	12	53.050682	14	02	23.115777
02	03	08.417243	04	08	07.588342	06	16	58.599605	08	26	93.119888	11	13	56.257415	14	03	26.907369
02	04	08.417243	04	09	07.588342	06	17	61.756824	09	01	13.354194	11	14	59.457653	14	04	30.505950

جدول (۴-۱) صفرها و مقادیر وابسته توابع بسط استوانه ای ($J_m(k_{nm}) = 0$ & $14 \leq m \leq 33$)

m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}
14	05	33.993183	16	22	92.070053	19	19	86.541984	22	20	94.019599	26	05	48.637062	29	15	87.014366
14	06	37.408184	16	23	95.258468	19	20	89.997787	23	01	28.640012	26	06	52.302505	29	16	90.339202
14	07	40.772827	17	01	22.099306	19	21	92.966392	23	02	33.330345	26	07	55.885059	29	17	93.649055
14	08	44.100589	17	02	26.633535	20	01	25.417140	23	03	33.330345	26	08	59.405006	30	01	36.098335
14	09	47.400348	17	03	30.397413	20	02	29.961603	23	04	37.463634	26	09	62.876056	30	02	41.092777
14	10	50.678237	17	04	34.246059	20	03	33.988700	23	05	41.333606	26	10	66.307922	30	03	45.452667
14	11	53.938667	17	05	37.651229	20	04	37.772857	23	06	45.045028	26	11	69.707748	30	04	49.506175
14	12	57.184898	17	06	41.298027	20	05	41.413066	23	07	48.651504	26	12	73.080932	30	05	53.373733
14	13	60.419410	17	07	44.547748	20	06	44.957675	23	08	52.181472	26	13	76.431671	30	06	57.115104
14	14	63.644119	17	08	48.101947	20	07	48.434238	23	09	55.655284	26	14	79.763275	30	07	60.764869
14	15	66.860534	17	09	51.262775	20	08	51.860019	23	10	59.084083	26	15	83.078392	30	08	64.345039
14	16	70.069862	17	10	54.767185	20	09	55.246574	23	11	62.478404	26	16	86.379196	30	09	67.870536
14	17	73.273094	17	11	57.869480	20	10	58.602020	23	12	65.843185	26	17	89.667472	30	10	71.352012
14	18	76.471031	17	12	61.345077	20	11	61.932273	23	13	69.185020	26	18	92.944709	30	11	74.797309
14	19	79.664329	17	13	64.405250	20	12	65.241767	23	14	72.506042	27	01	32.910964	30	12	78.212387
14	20	82.853561	17	14	67.863700	20	13	68.533912	23	15	75.810974	27	02	37.780582	30	13	81.601898
14	21	86.039184	17	15	70.891601	20	14	71.811378	23	16	79.100463	27	03	42.046558	30	14	84.969520
14	22	89.221611	17	16	74.339950	20	15	75.076309	23	17	82.378265	27	04	46.024070	30	15	88.318222
14	23	92.401168	17	17	77.341964	20	16	78.330413	23	18	85.644142	27	05	49.826282	30	16	91.650421
14	24	95.578163	17	18	80.784729	20	17	81.575119	23	19	88.901298	27	06	53.511428	30	17	94.968139
15	01	19.994293	17	19	83.765220	20	18	84.811576	23	20	92.148956	27	07	57.110641	31	01	37.157909
15	02	24.269319	17	20	87.205406	20	19	88.040779	23	21	95.389999	27	08	60.646247	31	02	42.192947
15	03	28.102270	17	21	90.167495	20	20	91.263549	24	01	29.710508	27	09	64.130645	31	03	46.582603
15	04	31.733564	17	22	93.607185	20	21	94.480583	24	02	34.446777	27	10	67.575447	31	04	50.661231
15	05	35.246929	18	01	23.256776	21	01	26.493482	24	03	38.614521	27	11	70.986282	31	05	54.549484
15	06	38.684440	18	02	27.697898	21	02	31.087966	24	04	42.511680	27	12	74.370445	31	06	58.309711
15	07	42.067749	18	03	31.650117	21	03	35.150981	24	05	46.246639	27	13	77.730461	31	07	61.975444
15	08	45.412364	18	04	35.374717	21	04	38.964458	24	06	49.872764	27	14	81.071556	31	08	65.570770
15	09	48.726284	18	05	38.965431	21	05	42.628524	24	07	53.420684	27	15	84.394607	31	09	69.109199
15	10	52.017425	18	06	42.467807	21	06	46.194236	24	08	56.909748	27	16	87.703735	31	10	72.603332
15	11	55.289012	18	07	45.907665	21	07	49.688533	24	09	60.352985	27	17	90.998878	31	11	76.059394
15	12	58.546024	18	08	49.301113	21	08	53.130691	24	10	63.759616	27	18	94.283500	31	12	79.485305
15	13	61.789558	18	09	52.658882	21	09	56.531154	24	11	67.136398	28	01	33.974929	31	13	82.883972
15	14	65.023254	18	10	55.988487	21	10	59.899868	24	12	70.488426	28	02	38.886711	31	14	86.261024
15	15	68.247116	18	11	59.295368	21	11	63.241382	24	13	73.819648	28	03	43.184768	31	15	89.617607
15	16	71.464088	18	12	62.583602	21	12	66.561935	24	14	77.133178	28	04	47.187747	31	16	92.958145
15	17	74.673553	18	13	65.856307	21	13	69.863418	24	15	80.431503	28	05	51.012279	32	01	38.216690
15	18	77.878089	18	14	69.115921	21	14	73.150306	24	16	83.716644	28	06	54.716125	32	02	43.290813
15	19	81.076667	18	15	72.364372	21	15	76.423095	24	17	86.990280	28	07	58.332626	32	03	47.710552
15	20	84.271690	18	16	75.603225	21	16	79.685363	24	18	90.253784	28	08	61.882942	32	04	51.813159
15	21	87.461830	18	17	78.833763	21	17	82.936775	24	19	93.508331	28	09	65.381416	32	05	55.722648
15	22	90.649383	18	18	82.057029	21	18	86.180397	25	01	30.778858	28	10	68.838233	32	06	59.500701
15	23	93.832832	18	19	85.273902	21	19	89.415382	25	02	35.560749	28	11	72.260902	32	07	63.183082
16	01	21.085145	18	20	88.485122	21	20	92.644508	25	03	39.761611	28	12	75.655120	32	08	66.792587
16	02	25.417018	18	21	91.691329	21	21	95.866569	25	04	43.686218	28	13	79.025299	32	09	70.344718
16	03	29.290870	18	22	94.893035	22	01	27.567943	25	05	47.443660	28	14	82.374938	32	10	73.850532
16	04	32.953666	19	01	24.260524	22	02	32.210586	25	06	51.089942	28	15	85.706863	32	11	77.318214
16	05	36.493396	19	02	28.909391	22	03	36.309425	25	07	54.654880	28	16	89.023361	32	12	80.753990
16	06	39.952552	19	03	32.742362	22	04	40.151050	25	08	58.159847	28	17	92.326347	32	13	84.162704
16	07	43.355072	19	04	36.658588	22	05	43.839317	25	09	61.616630	28	18	95.617393	32	14	87.548217
16	08	46.715808	19	05	40.107475	22	06	47.425170	25	10	65.036331	29	01	35.037101	32	15	90.913635
16	09	50.044605	19	06	43.803199	22	07	50.937763	25	11	68.424224	29	02	39.990993	32	16	94.261520
16	10	53.348312	19	07	47.084018	22	08	54.395427	25	12	71.787284	29	03	44.319839	33	01	39.273918
16	11	56.631874	19	08	50.676456	22	09	57.810489	25	13	75.127830	29	04	48.348655	33	02	44.387260
16	12	59.898979	19	09	53.860668	22	10	61.191635	25	14	78.450851	29	05	52.194446	33	03	48.835826
16	13	63.152427	19	10	57.396297	22	11	64.545204	25	15	81.757110	29	06	55.917564	33	04	52.962879
16	14	66.394409	19	11	60.516769	22	12	67.875991	25	16	85.050544	29	07	59.550369	33	05	56.892528
16	15	69.626647	19	12	64.018615	22	13	71.187667	25	17	88.331008	29	08	63.116096	33	06	60.689044
16	16	72.850540	19	13	67.093238	22	14	74.483131	25	18	91.601852	29	09	66.627708	33	07	64.387062
16	17	76.067214	19	14	70.574234	22	15	77.764701	25	19	94.862342	29	10	70.097328	33	08	68.011489
16	18	79.277603	19	15	73.613815	22	16	81.034263	26	01	31.845888	29	11	73.530891	33	09	71.576332
16	19	82.482482	19	16	77.081863	22	17	84.293350	26	02	36.671730	29	12	76.936012	33	10	75.094657
16	20	85.682495	19	17	80.093421	22	18	87.543251	26	03	40.905803	29	13	80.315414	33	11	78.572975
16	21	88.878196	19	18	83.553627	22	19	90.785026	26	04	44.856704	29	14	83.674522	33	12	82.019493

جدول (۴-۱) صفرها و مقادیر وابسته توابع بسط استوانه ای ($J_m(k_{nm}) = 0$ & $33 \leq m \leq 84$)

m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}	m	n	k_{nm}
33	13	85.437278	38	03	54.432579	43	02	55.265460	48	09	89.712203	53	08	94.171165	66	01	73.755065
33	14	88.832183	38	04	58.674751	43	03	59.984565	48	10	93.401458	56	01	63.369735	66	02	79.891746
33	15	92.205451	38	05	62.704101	43	04	64.335807	49	01	56.072635	56	02	69.236473	66	03	85.126815
33	16	95.561653	38	06	66.587539	43	05	68.458534	49	02	61.733444	56	03	74.262001	66	04	89.910690
34	01	40.330486	38	07	70.364044	43	06	72.425430	49	03	66.599166	56	04	78.869041	66	05	94.411956
34	02	45.481563	38	08	74.058586	43	07	76.275970	49	04	71.072952	56	05	83.215293	67	01	74.791160
34	03	49.959331	38	09	77.688217	43	08	80.038650	49	05	75.302024	56	06	87.380294	67	02	80.954063
34	04	54.109687	38	10	81.265159	43	09	83.729743	49	06	79.363441	56	07	91.410758	67	03	86.208488
34	05	58.060085	38	11	84.798484	43	10	87.364288	49	07	83.299156	56	08	95.336845	67	04	91.009826
34	06	61.874019	38	12	88.295143	43	11	90.950035	49	08	87.139533	57	01	64.409873	67	05	95.525344
34	07	65.588378	38	13	91.760551	43	12	94.496482	49	09	90.901977	57	02	70.305397	68	01	75.827545
34	08	69.226715	38	14	95.199043	44	01	50.843868	49	10	94.602584	57	03	75.352233	68	02	82.015213
34	09	72.805076	39	01	45.597389	44	02	56.345886	50	01	57.116897	57	04	79.978195	68	03	87.290000
34	10	76.334922	39	02	50.930824	44	03	61.090625	50	02	62.807697	57	05	84.340003	68	04	92.107505
34	11	79.824737	39	03	55.546073	44	04	65.462379	50	03	67.697410	57	06	88.519920	69	01	76.862937
34	12	83.281013	39	04	59.810932	44	05	69.603752	50	04	72.190368	57	07	92.562889	69	02	83.076393
34	13	86.708786	39	05	63.859012	44	06	73.586288	50	05	76.437072	58	01	65.450141	69	03	88.370193
34	14	90.112083	39	06	67.759834	44	07	77.451820	50	06	80.513236	58	02	71.373031	69	04	93.204910
34	15	93.494155	39	07	71.551055	44	08	81.227218	50	07	84.463249	58	03	76.442047	70	01	77.898658
35	01	41.385585	39	08	75.259819	44	09	84.930908	50	08	88.315711	58	04	81.085693	70	02	84.136421
35	02	46.574623	39	09	78.901557	44	10	88.576148	50	09	92.090270	58	05	85.463981	70	03	89.450271
35	03	51.080345	39	10	82.490554	44	11	92.172798	50	10	95.801109	58	06	89.657630	70	04	94.300880
35	04	55.254524	39	11	86.034103	44	12	95.728431	51	01	58.160060	58	07	93.714088	71	01	78.933395
35	05	59.224575	39	12	89.541221	45	01	51.890697	51	02	63.881549	59	01	66.489379	71	02	85.196525
35	06	63.056598	39	13	93.015426	45	02	57.425670	51	03	68.793975	59	02	72.440498	71	03	90.529060
35	07	66.786277	40	01	46.648410	45	03	62.194797	51	04	73.306922	59	03	77.530380	71	04	95.396629
35	08	70.439292	40	02	52.016147	45	04	66.587768	51	05	77.570091	59	04	82.192642	72	01	79.968475
35	09	74.030158	40	03	56.658313	45	05	70.746658	51	06	81.661888	59	05	86.586196	72	02	86.255477
35	10	77.572364	40	04	60.944698	45	06	74.745643	51	07	85.625068	59	06	90.794540	72	03	91.607765
35	11	81.072685	40	05	65.012199	45	07	78.625068	51	08	89.490547	59	07	94.863296	73	01	81.002578
35	12	84.539604	40	06	68.929328	45	08	82.414054	51	09	93.276100	60	01	67.528785	73	02	87.314544
35	13	87.976364	40	07	72.736045	45	09	86.129272	52	01	59.203235	60	02	73.506690	73	03	92.685203
35	14	91.389007	40	08	76.457984	45	10	89.786132	52	02	64.953994	60	03	78.618362	74	01	82.037055
35	15	94.778869	40	09	80.112670	45	11	93.392601	52	03	69.889923	60	04	83.297981	74	02	88.372482
36	01	42.440135	40	10	83.712692	46	01	52.937377	52	04	74.421646	60	05	87.707763	74	03	93.762596
36	02	47.665676	40	11	87.267379	46	02	58.503898	52	05	78.702140	60	06	91.929595	75	01	83.070549
36	03	52.199783	40	12	90.783912	46	03	63.298072	52	06	82.808418	61	01	68.567169	75	02	89.430557
36	04	56.396636	40	13	94.267883	46	04	67.711090	52	07	86.785675	61	02	74.572769	75	03	94.838737
36	05	60.386966	41	01	47.698154	46	05	71.888267	52	08	90.663040	61	03	79.704910	76	01	84.104454
36	06	64.236015	41	02	53.100631	46	06	75.902587	52	09	94.460563	61	04	84.402824	76	02	90.487510
36	07	67.981750	41	03	57.768470	46	07	79.796760	53	01	60.245326	61	05	88.827606	76	03	95.914878
36	08	71.648422	41	04	62.077026	46	08	83.598243	53	02	66.026107	61	06	93.063934	77	01	85.137367
36	09	75.252616	41	05	66.162834	46	09	87.325904	53	03	70.984252	62	01	69.605766	77	02	91.544631
36	10	78.806167	41	06	70.097015	46	10	90.993301	53	04	75.535591	62	02	75.637611	78	01	86.170707
36	11	82.317871	41	07	73.918167	46	11	94.610542	53	05	79.832229	62	03	80.791152	78	02	92.600646
36	12	85.794433	41	08	77.654106	47	01	53.982898	53	06	83.953895	62	04	85.506111	79	01	87.203071
36	13	89.241111	41	09	81.320701	47	02	59.581569	53	07	87.944084	62	05	89.946868	79	02	93.656867
36	14	92.662071	41	10	84.932624	47	03	64.399551	53	08	91.834297	62	06	94.196464	80	01	88.235877
37	01	43.493297	41	11	88.497413	47	04	68.833351	53	09	95.642646	63	01	70.643348	80	02	94.711975
37	02	48.755638	41	12	92.024299	47	05	73.027679	54	01	61.287471	63	02	76.702369	81	01	89.267707
37	03	53.316883	41	13	95.516975	47	06	77.058158	54	02	67.096855	63	03	81.875991	81	02	95.767318
37	04	57.536972	42	01	48.747615	47	07	80.965965	54	03	72.078041	63	04	86.608963	82	01	90.300003
37	05	61.546485	42	02	54.183414	47	08	84.780853	54	04	76.647773	63	05	91.064460	83	01	91.331321
37	06	65.413261	42	03	58.877510	47	09	88.519851	54	05	80.961441	63	06	95.328346	84	01	92.363128
37	07	69.174003	42	04	63.207069	47	10	92.198730	54	06	85.097328	64	01	71.681167	**	**	*****
37	08	72.855133	42	05	67.311897	47	11	95.825660	54	07	89.101394	64	02	77.765914	**	**	*****
37	09	76.471626	42	06	71.262046	48	01	55.028331	54	08	93.003303	64	03	82.960578	**	**	*****
37	10	80.037384	42	07	75.098434	48	02	60.657745	55	01	62.328556	64	04	87.710289	**	**	*****
37	11	83.559448	42	08	78.847320	48	03	65.500228	55	02	68.167327	64	05	92.181533	**	**	*****
37	12	87.046569	42	09	82.526695	48	04	69.953628	55	03	73.170265	65	01	72.717987	**	**	*****
37	13	90.502143	42	10	86.149467	48	05	74.165908	55	04	77.759262	65	02	78.829429	**	**	*****
37	14	93.932388	42	11	89.725273	48	06	78.211425	55	05	82.088768	65	03	84.043800	**	**	*****
38	01	44.546009	42	12	93.261459	48	07	82.133750	55	06	86.239799	65	04	88.811233	**	**	*****
38	02	49.843708	43	01	49.795848	48	08	85.960922	55	07	90.256584	65	05	93.296974	**	**	*****

تعداد اطلاعات مندرج در جدول (۴-۱) در صورتیکه قصد نداشته باشیم ترازهای انرژی را بر حسب m طبقه بندی نمائیم، برای یک بحث آماری کافی به نظر می رسد. اما هما نظور که در انتهای همین بخش نشان خواهیم داد طبقه بندی بر حسب هر یک از کوانتشیهای ایجاد شده در یک دستگاه انتگرال پذیر اجتناب ناپذیر است. دستگاههای انتگرال پذیر دارای متغیرهای قابل جدا شدن از یکدیگر می باشند و این بدان معنی است که به راحتی می توانیم با تغییر ویژه مقادیر فقط یک عملگر مشاهده پذیر دستگاه مورد مطالعه و ثابت نگاه داشتن بقیه ویژه مقادیر عملگرهای مشاهده پذیر آن دستگاه به بررسی کوانتومی آن پردازیم. در حالیکه در مورد دستگاههای آشوبی چنین کاری امکان پذیر نیست و اساساً دلیل مشکل بودن مطالعه کوانتومی آنها در همین نکته نهفته است. پس حال که یک دستگاه انتگرال پذیر مانند استوانه را مورد مطالعه قرار می دهیم شایسته نیست از امکانی که این دستگاه در اختیار ما قرار داده است استفاده نکنیم.

از طرفی می دانیم که مطالعه کوانتومی یک دستگاه تحقق نخواهد یافت مگر در سایه تجزیه و تحلیل آماری اطلاعاتی که ممکن است بصورت تجربی یا در اینجا بصورت محاسباتی حاصل شده باشند. این امر از طبیعت مکانیک کوانتومی برای دستگاههای مقید ناشی می شود، زیرا چنین دستگاههایی اجازه داشتن هر ویژه مقدار دلخواهی را برای عملگرهای مشاهده پذیرشان ندارند. همین امر یعنی گسستگی انرژی طیف ویژه مقادیر عملگرهای مشاهده پذیر هر دستگاه مقید، مطالعه آماری و در نتیجه حجم اطلاعات زیاد را به منظور کاهش هر چه بیشتر افت و خیز از یک طرف و افزایش دقت از طرف دیگر طلب می کند، چه در غیر اینصورت بحث آماری مفهوم خود را از دست خواهد داد.

اگر عملگر مشاهده پذیر دستگاه مورد مطالعه را هامیلتونی دستگاه فرض کنیم ویژه مقادیر ترازهای انرژی دستگاه را مشخص خواهند کرد، که ادعا می کنیم نحوه توزیع آنها شاید اطلاعاتی در مورد انتگرال پذیر بودن یا ارگودیک بودن دستگاه ارائه دهند.

بدین منظور جدول (۴-۲) بر اساس حل معادله (۴-۳) برای سه ویژه مقدار مؤلفه اندازه حرکت زاویه ای ($m=0$ ، $m=1$ ، $m=50$) بطور جداگانه تنظیم شده است. در هر مورد تعداد ۲۰۰ تراز جمعا ۶۰۰ تراز محاسبه شده است.

جدول (۴-۲) صفرهای توابع بسل استوانه ای

$$(J_m(k_{nm}) = 0 \quad \& \quad m = 0 \quad \& \quad 1 \leq n \leq 200)$$

n	k _{n0}	n	k _{n0}	n	k _{n0}	n	k _{n0}	n	k _{n0}	n	k _{n0}	n	k _{n0}	n	k _{n0}
001	2.404825	026	80.89755	051	159.4366	076	237.9761	101	316.5158	126	395.0556	151	473.5953	176	552.1351
002	5.520078	027	84.03909	052	162.5781	077	241.1177	102	319.6574	127	398.1971	152	476.7369	177	555.2767
003	8.653727	028	87.18063	053	165.7197	078	244.2593	103	322.7990	128	401.3387	153	479.8785	178	558.4183
004	11.79153	029	90.32217	054	168.8613	079	247.4009	104	325.9406	129	404.4803	154	483.0201	179	561.5599
005	14.93091	030	93.46372	055	172.0029	080	250.5425	105	329.0822	130	407.6219	155	486.1617	180	564.7014
006	18.07106	031	96.60527	056	175.1445	081	253.6840	106	332.2237	131	410.7635	156	489.3033	181	567.8430
007	21.21163	032	99.74681	057	178.2860	082	256.8256	107	335.3653	132	413.9051	157	492.4449	182	570.9846
008	24.35247	033	102.8883	058	181.4276	083	259.9672	108	338.5069	133	417.0467	158	495.5864	183	574.1262
009	27.49347	034	106.0299	059	184.5692	084	263.1088	109	341.6485	134	420.1883	159	498.7280	184	577.2678
010	30.63460	035	109.1714	060	187.7108	085	266.2504	110	344.7901	135	423.3298	160	501.8696	185	580.4094
011	33.77582	036	112.3130	061	190.8524	086	269.3920	111	347.9317	136	426.4714	161	505.0112	186	583.5510
012	36.91709	037	115.4546	062	193.9939	087	272.5336	112	351.0733	137	429.6130	162	508.1528	187	586.6926
013	40.05842	038	118.5961	063	197.1355	088	275.6752	113	354.2149	138	432.7546	163	511.2944	188	589.8342
014	43.19979	039	121.7377	064	200.2771	089	278.8168	114	357.3565	139	435.8962	164	514.4360	189	592.9758
015	46.34118	040	124.8793	065	203.4187	090	281.9583	115	360.4981	140	439.0378	165	517.5776	190	596.1174
016	49.48260	041	128.0208	066	206.5603	091	285.0999	116	363.6396	141	442.1794	166	520.7192	191	599.2590
017	52.62405	042	131.1624	067	209.7019	092	288.2415	117	366.7812	142	445.3210	167	523.8608	192	602.4005
018	55.76551	043	134.3040	068	212.8434	093	291.3831	118	369.9228	143	448.4626	168	527.0023	193	605.5421
019	58.90698	044	137.4455	069	215.9850	094	294.5247	119	373.0644	144	451.6042	169	530.1439	194	608.6837
020	62.04846	045	140.5871	070	219.1266	095	297.6663	120	376.2060	145	454.7458	170	533.2855	195	611.8253
021	65.18996	046	143.7287	071	222.2682	096	300.8079	121	379.3476	146	457.8873	171	536.4271	196	614.9669
022	68.33146	047	146.8703	072	225.4098	097	303.9494	122	382.4892	147	461.0289	172	539.5687	197	618.1085
023	71.47298	048	150.0118	073	228.5514	098	307.0910	123	385.6308	148	464.1705	173	542.7103	198	621.2501
024	74.61450	049	153.1534	074	231.6929	099	310.2326	124	388.7723	149	467.3121	174	545.8519	199	624.3917
025	77.75602	050	156.2950	075	234.8345	100	313.3742	125	391.9140	150	470.4537	175	548.9935	200	627.5333

جدول (۴-۲) صفرهای توابع بسل استوانه ای

$$(J_m(k_{nm}) = 0 \quad \& \quad m = 1 \quad \& \quad 1 \leq n \leq 200)$$

n	k _{1n}	n	k _{1n}	n	k _{1n}	n	k _{1n}	n	k _{1n}	n	k _{1n}	n	k _{1n}	n	k _{1n}
001	3.831656	026	82.46248	051	161.0039	076	239.5452	101	318.0846	126	396.6256	151	475.1645	176	553.7056
002	7.015633	027	85.60379	052	164.1462	077	242.6860	102	321.2271	127	399.7662	152	478.3072	177	556.8460
003	10.17338	028	88.74600	053	167.2872	078	245.8284	103	324.3678	128	402.9088	153	481.4477	178	559.9888
004	13.32378	029	91.88726	054	170.4295	079	248.9693	104	327.5103	129	406.0494	154	484.5904	179	563.1292
005	16.47052	030	95.02947	055	173.5705	080	252.1117	105	330.6510	130	409.1920	155	487.7309	180	566.2720
006	19.61596	031	98.17070	056	176.7127	081	255.2525	106	333.7935	131	412.3326	156	490.8736	181	569.4124
007	22.75996	032	101.3129	057	179.8537	082	258.3949	107	336.9342	132	415.4752	157	494.0141	182	572.5551
008	25.90379	033	104.4541	058	182.9960	083	261.5357	108	340.0767	133	418.6158	158	497.1568	183	575.6956
009	29.04669	034	107.5963	059	186.1370	084	264.6781	109	343.2174	134	421.7584	159	500.2973	184	578.8383
010	32.18982	035	110.7374	060	189.2793	085	267.8189	110	346.3599	135	424.8990	160	503.4400	185	581.9787
011	35.33215	036	113.8797	061	192.4202	086	270.9613	111	349.5006	136	428.0416	161	506.5805	186	585.1215
012	38.47492	037	117.0208	062	195.5625	087	274.1021	112	352.6431	137	431.1821	162	509.7232	187	588.2619
013	41.61693	038	120.1630	063	198.7034	088	277.2446	113	355.7838	138	434.3248	163	512.8637	188	591.4047
014	44.75948	039	123.3041	064	201.8458	089	280.3853	114	358.9263	139	437.4653	164	516.0064	189	594.5451
015	47.90128	040	126.4464	065	204.9867	090	283.5278	115	362.0670	140	440.6080	165	519.1469	190	597.6879
016	51.04371	041	129.5875	066	208.1290	091	286.6686	116	365.2095	141	443.7485	166	522.2896	191	600.8283
017	54.18536	042	132.7297	067	211.2699	092	289.8110	117	368.3502	142	446.8912	167	525.4300	192	603.9711
018	57.32771	043	135.8708	068	214.4123	093	292.9518	118	371.4927	143	450.0317	168	528.5728	193	607.1115
019	60.46926	044	139.0130	069	217.5531	094	296.0942	119	374.6334	144	453.1744	169	531.7132	194	610.2543
020	63.61155	045	142.1541	070	220.6955	095	299.2350	120	377.7760	145	456.3149	170	534.8560	195	613.3947
021	66.75302	046	145.2963	071	223.8364	096	302.3775	121	380.9166	146	459.4576	171	537.9964	196	616.5375
022	69.89527	047	148.4374	072	226.9787	097	305.5182	122	384.0592	147	462.5981	172	541.1392	197	619.6779
023	73.03668	048	151.5796	073	230.1196	098	308.6607	123	387.1998	148	465.7408	173	544.2796	198	622.8207
024	76.17891	049	154.7207	074	233.2620	099	311.8014	124	390.3424	149	468.8813	174	547.4224	199	625.9611
025	79.32026	050	157.8629	075	236.4028	100	314.9439	125	393.4830	150	472.0240	175	550.5628	200	629.1039

جدول (۴-۲) صفرهای توابع بسل استوانه ای

$$(J_m(k_{nm}) = 0 \quad \& \quad m = 50 \quad \& \quad 1 \leq n \leq 200)$$

n	k_{n50}	n	k_{n50}	n	k_{n50}	n	k_{n50}	n	k_{n50}	n	k_{n50}	n	k_{n50}	n	k_{n50}
001	57.11689	026	151.0852	051	232.5807	076	312.5073	101	391.8613	126	470.9385	151	549.8602	176	628.6856
002	62.80769	027	154.4100	052	235.7965	077	315.6895	102	395.0286	127	474.0979	152	553.0148	177	631.8370
003	67.69741	028	157.7264	053	239.0101	078	318.8708	103	398.1954	128	477.2570	153	556.1693	178	634.9883
004	72.19036	029	161.0350	054	242.2218	079	322.0514	104	401.3619	129	480.4158	154	559.3236	179	638.1398
005	76.43707	030	164.3364	055	245.4316	080	325.2312	105	404.5279	130	483.5744	155	562.4777	180	641.2911
006	80.51323	031	167.6310	056	248.6396	081	328.4102	106	407.6936	131	486.7329	156	565.6317	181	644.4422
007	84.46324	032	170.9193	057	251.8458	082	331.5885	107	410.8589	132	489.8911	157	568.7855	182	647.5932
008	88.31571	033	174.2017	058	255.0504	083	334.7660	108	414.0238	133	493.0490	158	571.9393	183	650.7442
009	92.09027	034	177.4785	059	258.2534	084	337.9429	109	417.1884	134	496.2068	159	575.0929	184	653.8950
010	95.80110	035	180.7502	060	261.4548	085	341.1191	110	420.3526	135	499.3644	160	578.2463	185	657.0458
011	99.45880	036	184.0169	061	264.6547	086	344.2947	111	423.5165	136	502.5217	161	581.3997	186	660.1965
012	103.0714	037	187.2790	062	267.8532	087	347.4696	112	426.6801	137	505.6789	162	584.5529	187	663.3471
013	106.6455	038	190.5368	063	271.0503	088	350.6440	113	429.8433	138	508.8358	163	587.7060	188	666.4976
014	110.1861	039	193.7904	064	274.2461	089	353.8177	114	433.0062	139	511.9926	164	590.8590	189	669.6480
015	113.6974	040	197.0402	065	277.4406	090	356.9908	115	436.1688	140	515.1492	165	594.0118	190	672.7984
016	117.1829	041	200.2863	066	280.6339	091	360.1634	116	439.3311	141	518.3056	166	597.1645	191	675.9487
017	120.6455	042	203.5289	067	283.8259	092	363.3354	117	442.4931	142	521.4618	167	600.3171	192	679.0988
018	124.0875	043	206.7681	068	287.0169	093	366.5069	118	445.6548	143	524.6179	168	603.4696	193	682.2489
019	127.5111	044	210.0043	069	290.2067	094	369.6779	119	448.8162	144	527.7738	169	606.6220	194	685.3989
020	130.9181	045	213.2374	070	293.3955	095	372.8484	120	451.9773	145	530.9295	170	609.7742	195	688.5489
021	134.3100	046	216.4676	071	296.5832	096	376.0184	121	455.1382	146	534.0850	171	612.9264	196	691.6988
022	137.6882	047	219.6952	072	299.7699	097	379.1879	122	458.2987	147	537.2403	172	616.0784	197	694.8486
023	141.0538	048	222.9202	073	302.9556	098	382.3569	123	461.4591	148	540.3955	173	619.2304	198	697.9983
024	144.4079	049	226.1427	074	306.1404	099	385.5255	124	464.6192	149	543.5506	174	622.3822	199	701.1480
025	147.7515	050	229.3628	075	309.3243	100	388.6936	125	467.7790	150	546.7055	175	625.5339	200	704.2975

با توجه به اینکه استوانه حالت حدی استادیوم دوار است وقتی که طول در مقابل شعاع آن بسیار بزرگ باشد، به کمک هر یک از اطلاعات مندرج در جداول (۴-۱) و (۴-۲) می‌توانیم انرژی استوانه خارجی ایکه استادیوم دوار را در بر گرفته است را محاسبه نمائیم. از طرفی علاوه بر نقش حدی استوانه، با توجه به اینکه استادیوم دوار را همواره می‌توان درون و برون دو استوانه به شعاع a و به ترتیب با طولهای $2L+2a$ و $2L$ محاط و محیط دانست، ذکر این نکته مفید به نظر می‌رسد که با داشتن انرژی این دو استوانه در واقع حتی قبل از آنکه طول استادیوم دوار را به سمت بینهایت میل دهیم همواره کافی است که به دنبال آن انرژی از استادیوم دوار باشیم که بین این دو حد قرار گرفته است، که مهر تأییدی بر لزوم دانستن کلیه ترازهای انرژی دستگاه استوانه است. ولی از آنجائیکه درج کلیه این اطلاعات غیر ممکن می‌باشد توجه خود را به تعدادی از ترازهای انرژی این دو دستگاه استوانه در دو حالت $m=0$ و $m=1$ معطوف می‌نمائیم. برای این منظور با استفاده از رابطه (۴-۲-۴) و اطلاعات مندرج در جدول (۴-۱) ترازهای انرژی هر دو دستگاه استوانه را برای هر دو حالت فوق الذکر در جداول (۴-۳) تا (۴-۶) تنظیم می‌کنیم.

$$\left(k_{mnp} = \sqrt{\left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{(2p-1)\frac{\pi}{2}}{L}\right)^2}, J_m(x_{mn}) = 0, m=1, \eta = \frac{L}{a} = 1, a = \sqrt[3]{\frac{2}{2+3\eta}} \right)$$

n	p	k _{inp}	n	p	k _{inp}	n	p	k _{inp}	n	p	k _{inp}	n	p	k _{inp}	n	p	k _{inp}
01	02	8.243143	04	02	19.18074	07	02	31.54533	10	02	44.15378	13	02	56.84402	16	02	69.57135
01	03	11.86040	04	03	20.99096	07	03	32.67764	10	03	44.96972	13	03	57.48011	16	03	70.09203
01	04	15.80345	04	04	23.44569	07	04	34.30609	10	04	46.16661	13	04	58.42125	16	04	70.86587
01	05	19.87935	04	05	26.36551	07	05	36.36409	10	05	47.71578	13	05	59.65302	16	05	71.88471
01	06	24.02058	04	06	29.61317	07	06	38.78333	10	06	49.58422	13	06	61.15784	16	06	73.13830
01	07	28.19837	04	07	33.09229	07	07	41.50068	10	07	51.73736	13	07	62.91615	16	07	74.61482
01	08	32.39857	04	08	36.73716	07	08	44.46151	10	08	54.14124	13	08	64.90733	16	08	76.30131
01	09	36.61348	04	09	40.50307	07	09	47.62043	10	09	56.76402	13	09	67.11066	16	09	78.18421
01	10	40.83854	04	10	44.35919	07	10	50.94060	10	10	59.57679	13	10	69.50597	16	10	80.24967
01	11	45.07090	04	11	48.28392	07	11	54.39250	10	11	62.55392	13	11	72.07412	16	11	82.48399
01	12	49.30867	04	12	52.26181	07	12	57.95260	10	12	65.67307	13	12	74.79732	17	01	73.57200
01	13	53.55058	04	13	56.28158	07	13	61.60214	10	13	68.91496	13	13	77.65924	17	02	73.81869
01	14	57.79570	04	14	60.33486	07	14	65.32612	10	14	72.26306	13	14	80.64513	17	03	74.30961
01	15	62.04339	04	15	64.41532	07	15	69.11252	10	15	75.70330	13	15	83.74172	17	04	75.03998
01	16	66.29315	04	16	68.51812	07	16	72.95163	10	16	79.22366	14	01	60.78514	17	05	76.00288
01	17	70.54460	04	17	72.63947	07	17	76.83554	10	17	82.81393	14	02	61.08349	17	06	77.18962
01	18	74.79745	04	18	76.77637	07	18	80.75777	11	01	48.00068	14	03	61.67587	17	07	78.59006
01	19	79.05149	04	19	80.92645	08	01	35.22129	11	02	48.37795	14	04	62.55392	17	08	80.19300
01	20	83.30652	05	01	22.45551	08	02	35.73373	11	03	49.12378	14	05	63.70583	17	09	81.98656
02	01	9.757369	05	02	23.25102	08	03	36.73717	11	04	50.22176	14	06	65.11706	17	10	83.95854
02	02	11.47023	05	03	24.76549	08	04	38.19292	11	05	51.64944	14	07	66.77119	18	01	77.83462
02	03	14.29286	05	04	26.87768	08	05	40.05170	11	06	53.38038	14	08	68.65065	18	02	78.06785
02	04	17.70214	05	05	29.45928	08	06	42.26037	11	07	55.38614	14	09	70.73748	18	03	78.53221
02	05	21.41974	05	06	32.39829	08	07	44.76715	11	08	57.63804	14	10	73.01390	18	04	79.22366
02	06	25.31018	05	07	35.60630	08	08	47.52492	11	09	60.10843	14	11	75.46277	18	05	80.13631
02	07	29.30469	05	08	39.01702	08	09	50.49255	11	10	62.77151	14	12	78.06785	18	06	81.26271
02	08	33.36591	05	09	42.58177	08	10	53.63522	11	11	65.60383	14	13	80.81403	18	07	82.59411
02	09	37.47217	05	10	46.26496	08	11	56.92395	11	12	68.58441	14	14	83.68744	19	01	82.09737
02	10	41.61013	05	11	50.04045	08	12	60.33486	11	13	71.69478	15	01	65.04722	19	02	82.31851
02	11	45.77120	05	12	53.88883	08	13	63.84837	11	14	74.91876	15	02	65.32611	19	03	82.75903
02	12	49.94959	05	13	57.79554	08	14	67.44845	11	15	78.24231	15	03	65.88035	19	04	83.41545
02	13	54.14131	05	14	61.74953	08	15	71.12195	11	16	81.65328	15	04	66.70308			
02	14	58.34347	05	15	65.74224	08	16	74.85808	12	01	52.26180	15	05	67.78452			
02	15	62.55397	05	16	69.76705	08	17	78.64789	12	02	52.60851	15	06	69.11252			
02	16	66.77124	05	17	73.81871	08	18	82.48400	12	03	53.29517	15	07	70.67319			
02	17	70.99407	05	18	77.89300	09	01	39.48021	12	04	54.30888	15	08	72.45150			
02	18	75.22151	05	19	81.98658	09	02	39.93804	12	05	55.63178	15	09	74.43184			
02	19	79.45285	06	01	26.70804	09	03	40.83830	12	06	57.24242	15	10	76.59855			
02	20	83.68748	06	02	27.38027	09	04	42.15266	12	07	59.11729	15	11	78.93629			
03	01	13.97113	06	03	28.67750	09	05	43.84389	12	08	61.23213	15	12	81.43032			
03	02	15.21685	06	04	30.52014	09	06	45.87032	12	09	63.56298						
03	03	17.44340	06	05	32.81644	09	07	48.18969	12	10	66.08701						
03	04	20.33106	06	06	35.47842	09	08	50.76185	12	11	68.78293						
03	05	23.63878	06	07	38.43017	09	09	53.55040	12	12	71.63136						
03	06	27.21381	06	08	41.61006	09	10	56.52331	12	13	74.61481						
03	07	30.96371	06	09	44.96973	09	11	59.65303	12	14	77.71776						
03	08	34.83203	06	10	48.47181	09	12	62.91616	12	15	80.92644						
03	09	38.78337	06	11	52.08758	09	13	66.29300									
03	10	42.79474	06	12	55.79494	09	14	69.76705									
03	11	46.85071	06	13	59.57679	09	15	73.32449									
03	12	50.94063	06	14	63.41982	09	16	76.95375									
03	13	55.05695	06	15	67.31354	09	17	80.64514									
03	14	59.19414	06	16	71.24964												
03	15	63.34813	06	17	75.22148												
03	16	67.51581	06	18	79.22366												
03	17	71.69480	06	19	83.25184												
03	18	75.88321															
03	19	80.07960															

جدول (۴-۵) اندازه (k_{mnp}) استوانه ای به شعاع a و طول $2L+2a$

$$\left(k_{mnp} = \sqrt{\left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{(2p-1)\pi}{2L}\right)^2}, J_m(x_{mn}) = 0, m=0, \eta = \frac{L}{a} = 1, a = \sqrt{\frac{2}{2+3\eta}} \right)$$

n	p	k_{0np}	n	p	k_{0np}	n	p	k_{0np}	n	p	k_{0np}	n	p	k_{0np}	n	p	k_{0np}
01	01	03.43349	04	01	16.03902	07	01	28.80833	10	01	41.59121	13	01	54.37809	16	01	67.16668
01	02	04.56934	04	02	16.31994	07	02	28.96567	10	02	41.70034	13	02	54.46160	16	02	67.23431
01	03	06.24970	04	03	16.86773	07	03	29.27781	10	03	41.91776	13	03	54.62825	16	03	67.36938
01	04	08.14425	04	04	17.65758	07	04	29.73987	10	04	42.24178	13	04	54.87728	16	04	67.57146
01	05	10.13354	04	05	18.65878	07	05	30.34502	10	05	42.66999	13	05	55.20757	16	05	67.83998
01	06	12.17122	04	06	19.83936	07	06	31.08488	10	06	43.19928	13	06	55.61768	16	06	68.17413
01	07	14.23652	04	07	21.16932	07	07	31.95011	10	07	43.82600	13	07	56.10584	16	07	68.57297
01	08	16.31896	04	08	22.62233	07	08	32.93083	10	08	44.54602	13	08	56.67006	16	08	69.03537
01	09	18.41272	04	09	24.17622	07	09	34.01705	10	09	45.35491	13	09	57.30808	16	09	69.56006
01	10	20.51434	04	10	25.81278	07	10	35.19900	10	10	46.24800	13	10	58.01746	16	10	70.14565
01	11	22.62162	04	11	27.51726	07	11	36.46737	10	11	47.22052	13	11	58.79562	16	11	70.79062
01	12	24.73313	04	12	29.27779	07	12	37.81348	10	12	48.26766	13	12	59.63988	16	12	71.49337
01	13	26.84786	04	13	31.08487	07	13	39.22931	10	13	49.38469	13	13	60.54746	16	13	72.25221
01	14	28.96510	04	14	32.93082	07	14	40.70760	10	14	50.56696	13	14	61.51556	16	14	73.06539
01	15	31.08435	04	15	34.80946	07	15	42.24178	10	15	51.81001	13	15	62.54138	16	15	73.93112
01	16	33.20522	04	16	36.71578	07	16	43.82600	10	16	53.10957	13	16	63.62212	16	16	74.84758
01	17	35.32742	04	17	38.64567	07	17	45.45501	10	17	54.46160	13	17	64.75503	16	17	75.81293
01	18	37.45072	04	18	40.59578	07	18	47.12417	10	18	55.86229	13	18	65.93742	16	18	76.82532
01	19	39.57494	04	19	42.56334	07	19	48.82937	10	19	57.30808	13	19	67.16668	16	19	77.88293
01	20	41.69995	04	20	44.54601	07	20	50.56696	10	20	58.79562	13	20	68.44029	16	20	78.98392
02	01	07.56733	05	01	20.29238	08	01	33.06857	11	01	45.85323	14	01	58.64082	17	01	71.42978
02	02	08.14583	05	02	20.51513	08	02	33.20572	11	02	45.95224	14	02	58.71828	17	02	71.49338
02	03	09.19426	05	03	20.95353	08	03	33.47835	11	03	46.14963	14	03	58.87288	17	03	71.62041
02	04	10.57376	05	04	21.59445	08	04	33.88318	11	04	46.44414	14	04	59.10403	17	04	71.81054
02	05	12.17228	05	05	22.42053	08	05	34.41555	11	05	46.83395	14	05	59.41082	17	05	72.06326
02	06	13.91453	05	06	23.41218	08	06	35.06964	11	06	47.31668	14	06	59.79210	17	06	72.37792
02	07	15.75291	05	07	24.54934	08	07	35.83880	11	07	47.88954	14	07	60.24646	17	07	72.75371
02	08	17.65741	05	08	25.81279	08	08	36.71580	11	08	48.54934	14	08	60.77224	17	08	73.18970
02	09	19.60877	05	09	27.18492	08	09	37.69310	11	09	49.29258	14	09	61.36763	17	09	73.68482
02	10	21.59430	05	10	28.65013	08	10	38.76312	11	10	50.11555	14	10	62.03060	17	10	74.23788
02	11	23.60537	05	11	30.19486	08	11	39.91841	11	11	51.01439	14	11	62.75902	17	11	74.84759
02	12	25.63598	05	12	31.80754	08	12	41.15178	11	12	51.98517	14	12	63.55065	17	12	75.51260
02	13	27.68182	05	13	33.47834	08	13	42.45644	11	13	53.02393	14	13	64.40314	17	13	76.23144
02	14	29.73975	05	14	35.19899	08	14	43.82600	11	14	54.12677	14	14	65.31412	17	14	77.00261
02	15	31.80743	05	15	36.96253	08	15	45.25459	11	15	55.28984	14	15	66.28118	17	15	77.82456
02	16	33.88307	05	16	38.76311	08	16	46.73680	11	16	56.50944	14	16	67.30189	17	16	78.69569
02	17	35.96529	05	17	40.59579	08	17	48.26767	11	17	57.78197	14	17	68.37385	17	17	79.61439
02	18	38.05301	05	18	42.45642	08	18	49.84273	11	18	59.10403	14	18	69.49470	17	18	80.57903
02	19	40.14538	05	19	44.34149	08	19	51.45792	11	19	60.47236	14	19	70.66211	17	19	81.58799
02	20	42.24170	05	20	46.24800	08	20	53.10958	11	20	61.88389	14	20	71.87380	17	20	82.63964
03	01	11.79317	06	01	24.54935	09	01	37.32960	12	01	50.11553	15	01	62.90368	18	01	75.69295
03	02	12.17247	06	02	24.73380	09	02	37.45115	12	02	50.20614	15	02	62.97590	18	02	75.75297
03	03	12.89763	06	03	25.09862	09	03	37.69309	12	03	50.38687	15	03	63.12007	18	03	75.87287
03	04	13.91470	06	04	25.63612	09	04	38.05310	12	04	50.65675	15	04	63.33572	18	04	76.05237
03	05	15.16505	06	05	26.33573	09	05	38.52790	12	05	51.01438	15	05	63.62211	18	05	76.29104
03	06	16.59604	06	06	27.18493	09	06	39.11328	12	06	51.45791	15	06	63.97830	18	06	76.58833
03	07	18.16504	06	07	28.17020	09	07	39.80438	12	07	51.98516	15	07	64.40313	18	07	76.94356
03	08	19.83932	06	08	29.27781	09	08	40.59579	12	08	52.59360	15	08	64.89525	18	08	77.35594
03	09	21.59440	06	09	30.49443	09	09	41.48178	12	09	53.28045	15	09	65.45314	18	09	77.82456
03	10	23.41214	06	10	31.80754	09	10	42.45643	12	10	54.04272	15	10	66.07513	18	10	78.34840
03	11	25.27900	06	11	33.20572	09	11	43.51377	12	11	54.87728	15	11	66.75944	18	11	78.92637
03	12	27.18488	06	12	34.67866	09	12	44.64793	12	12	55.78087	15	12	67.50417	18	12	79.55728
03	13	29.12212	06	13	36.21725	09	13	45.85322	12	13	56.75020	15	13	68.30734	18	13	80.23990
03	14	31.08484	06	14	37.81348	09	14	47.12417	12	14	57.78196	15	14	69.16691	18	14	80.97290
03	15	33.06852	06	15	39.46034	09	15	48.45562	12	15	58.87287	15	15	70.08082	18	15	81.75494
03	16	35.06960	06	16	41.15177	09	16	49.84272	12	16	60.01970	15	16	71.04697	18	16	82.58463
03	17	37.08526	06	17	42.88250	09	17	51.28096	12	17	61.21932	15	17	72.06325	18	17	83.46053
03	18	39.11325	06	18	44.64793	09	18	52.76615	12	18	62.46867	15	18	73.12757	19	01	79.95617
03	19	41.15174	06	19	46.44414	09	19	54.29444	12	19	63.76483	15	19	74.23787	19	02	80.01300
03	20	43.19926	06	20	48.26766	09	20	55.86229	12	20	65.10502	15	20	75.39211	19	03	80.12652

جدول (۴-۶) اندازه (k_{mnp}) استوانه ای به شعاع a و طول $2L+2a$

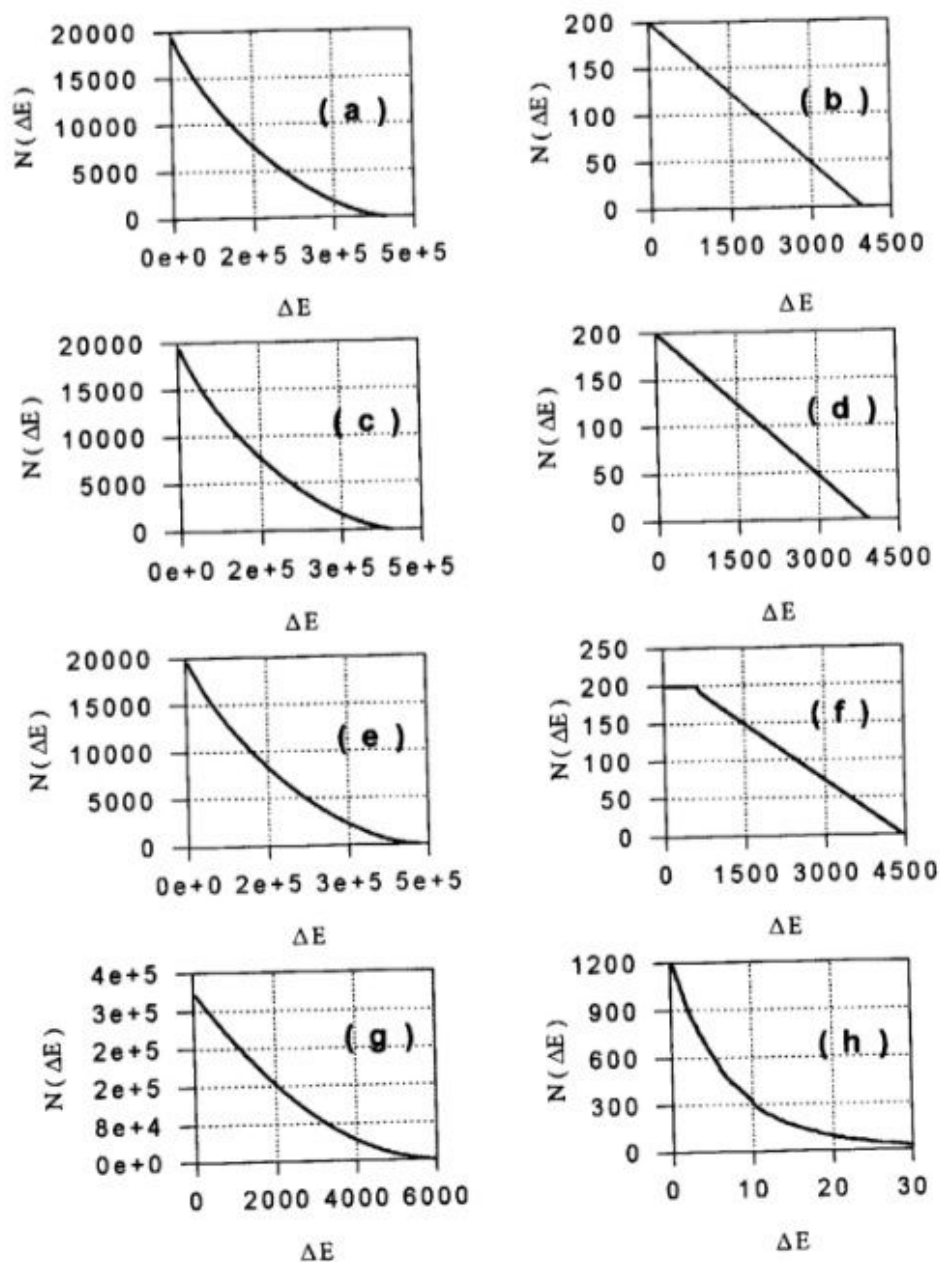
$$k_{mnp} = \sqrt{\left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{(2p-1)\frac{\pi}{2}}{L}\right)^2}, J_m(x_{mn}) = 0, m=1, \eta = \frac{L}{a} = 1, a = \sqrt{\frac{2}{2+3\eta}}$$

n	p	k_{inp}	n	p	k_{inp}	n	p	k_{inp}	n	p	k_{inp}	n	p	k_{inp}	n	p	k_{inp}
01	01	05.30855	04	01	18.11442	07	01	30.90856	10	01	43.70112	13	01	56.49313	16	01	69.28494
01	02	06.10497	04	02	18.36361	07	02	31.05526	10	02	43.80499	13	02	56.57353	16	02	69.35051
01	03	07.44652	04	03	18.85211	07	03	31.34660	10	03	44.01201	13	03	56.73398	16	03	69.48146
01	04	09.09508	04	04	19.56200	07	04	31.77860	10	04	44.32073	13	04	56.97380	16	04	69.67742
01	05	10.91240	04	05	20.47027	07	05	32.34562	10	05	44.72904	13	05	57.29201	16	05	69.93785
01	06	12.82694	04	06	21.55184	07	06	33.04072	10	06	45.23425	13	06	57.68729	16	06	70.26203
01	07	14.80102	04	07	22.78205	07	07	33.85600	10	07	45.83314	13	07	58.15809	16	07	70.64908
01	08	16.81369	04	08	24.13818	07	08	34.78303	10	08	46.52211	13	08	58.70259	16	08	71.09798
01	09	18.85259	04	09	25.60022	07	09	35.81311	10	09	47.29722	13	09	59.31875	16	09	71.60756
01	10	20.91004	04	10	27.15108	07	10	36.93763	10	10	48.15430	13	10	60.00436	16	10	72.17654
01	11	22.98107	04	11	28.77640	07	11	38.14824	10	11	49.08907	13	11	60.75708	16	11	72.80352
01	12	25.06231	04	12	30.46426	07	12	39.43702	10	12	50.09717	13	12	61.57445	16	12	73.48702
01	13	27.15141	04	13	32.20483	07	13	40.79654	10	13	51.17427	13	13	62.45393	16	13	74.22548
01	14	29.24669	04	14	33.99001	07	14	42.21999	10	14	52.31612	13	14	63.39292	16	14	75.01728
01	15	31.34691	04	15	35.81313	07	15	43.70112	10	15	53.51855	13	15	64.38884	16	15	75.86074
01	16	33.45114	04	16	37.66869	07	16	45.23425	10	16	54.77760	13	16	65.43907	16	16	76.75416
01	17	35.55866	04	17	39.55212	07	17	46.81428	10	17	56.08944	13	17	66.54106	16	17	77.69583
01	18	37.66893	04	18	41.45961	07	18	48.43663	10	18	57.45046	13	18	67.69226	16	18	78.68399
01	19	39.78150	04	19	43.38801	07	19	50.09717	10	19	58.85724	13	19	68.89021	16	19	79.71694
01	20	41.89603	04	20	45.33463	07	20	51.79224	10	20	60.30659	13	20	70.13253	16	20	80.79295
02	01	09.58110	05	01	22.37948	08	01	35.17284	11	01	47.96516	14	01	60.75709	17	01	73.54883
02	02	10.04427	05	02	22.58166	08	02	35.30182	11	02	48.05983	14	02	60.83185	17	02	73.61060
02	03	10.91180	05	03	22.98067	08	03	35.55838	11	03	48.24860	14	03	60.98110	17	03	73.73398
02	04	12.09700	05	04	23.56652	08	04	35.93979	11	04	48.53037	14	04	61.20428	17	04	73.91867
02	05	13.51655	05	05	24.32573	08	05	36.44213	11	05	48.90355	14	05	61.50060	17	05	74.16421
02	06	15.10454	05	06	25.24264	08	06	37.06047	11	06	49.36605	14	06	61.86901	17	06	74.46999
02	07	16.81330	05	07	26.30078	08	07	37.78913	11	07	49.91539	14	07	62.30822	17	07	74.83528
02	08	18.60959	05	08	27.48383	08	08	38.62186	11	08	50.54875	14	08	62.81675	17	08	75.25922
02	09	20.47039	05	09	28.77639	08	09	39.55209	11	09	51.26301	14	09	63.39293	17	09	75.74080
02	10	22.37960	05	10	30.16439	08	10	40.57312	11	10	52.05484	14	10	64.03494	17	10	76.27896
02	11	24.32584	05	11	31.63527	08	11	41.67826	11	11	52.92075	14	11	64.74082	17	11	76.87249
02	12	26.30088	05	12	33.17801	08	12	42.86103	11	12	53.85718	14	12	65.50850	17	12	77.52012
02	13	28.29869	05	13	34.78304	08	13	44.11516	11	13	54.86051	14	13	66.33583	17	13	78.22051
02	14	30.31478	05	14	36.44214	08	14	45.43476	11	14	55.92715	14	14	67.22063	17	14	78.97226
02	15	32.34572	05	15	38.14825	08	15	46.81428	11	15	57.05353	14	15	68.16064	17	15	79.77392
02	16	34.38888	05	16	39.89535	08	16	48.24859	11	16	58.23620	14	16	69.15361	17	16	80.62399
02	17	36.44222	05	17	41.67828	08	17	49.73295	11	17	59.47180	14	17	70.19731	17	17	81.52097
02	18	38.50409	05	18	43.49263	08	18	51.26301	11	18	60.75709	14	18	71.28949	17	18	82.46331
02	19	40.57320	05	19	45.33463	08	19	52.83480	11	19	62.08900	14	19	72.42798	17	19	83.44949
02	20	42.64849	05	20	47.20104	08	20	54.44470	11	20	63.46459	14	20	73.61060	18	01	77.81272
03	01	13.84860	06	01	26.64414	09	01	39.43702	12	01	52.22917	15	01	65.02102	18	02	77.87111
03	02	14.17299	06	02	26.81418	09	02	39.55210	12	02	52.31612	15	02	65.09088	18	03	77.98776
03	03	14.80046	06	03	27.15107	09	03	39.78126	12	03	52.48958	15	03	65.23038	18	04	78.16239
03	04	15.69470	06	04	27.64869	09	04	40.12254	12	04	52.74871	15	04	65.43907	18	05	78.39464
03	05	16.81320	06	05	28.29859	09	05	40.57312	12	05	53.09224	15	05	65.71630	18	06	78.68399
03	06	18.11446	06	06	29.09055	09	06	41.12941	12	06	53.51856	15	06	66.06120	18	07	79.02980
03	07	19.56204	06	07	30.01333	09	07	41.78718	12	07	54.02570	15	07	66.47272	18	08	79.43135
03	08	21.12589	06	08	31.05527	09	08	42.54172	12	08	54.61141	15	08	66.94962	18	09	79.88779
03	09	22.78208	06	09	32.20481	09	09	43.38799	12	09	55.27319	15	09	67.49053	18	10	80.39819
03	10	24.51190	06	10	33.45085	09	10	44.32074	12	10	56.00836	15	10	68.09392	18	11	80.96153
03	11	26.30081	06	11	34.78303	09	11	45.33462	12	11	56.81404	15	11	68.75814	18	12	81.57671
03	12	28.13757	06	12	36.19184	09	12	46.42432	12	12	57.68731	15	12	69.48145	18	13	82.24256
03	13	30.01337	06	13	37.66868	09	13	47.58463	12	13	58.62513	15	13	70.26202	18	14	82.95787
03	14	31.92134	06	14	39.20585	09	14	48.81052	12	14	59.62445	15	14	71.09797	18	15	83.72137
03	15	33.85605	06	15	40.79655	09	15	50.09717	12	15	60.68224	15	15	71.98737	19	01	82.07660
03	16	35.81315	06	16	42.43475	09	16	51.44003	12	16	61.79551	15	16	72.92826	19	02	82.13196
03	17	37.78917	06	17	44.11517	09	17	52.83480	12	17	62.96129	15	17	73.91867	19	03	82.24256
03	18	39.78129	06	18	45.83315	09	18	54.27749	12	18	64.17674	15	18	74.95665	19	04	82.40818
03	19	41.78721	06	19	47.58464	09	19	55.76438	12	19	65.43909	15	19	76.04025	19	05	82.62850
03	20	43.80503	06	20	49.36605	09	20	57.29202	12	20	66.74566	15	20	77.16754	19	06	82.90307

۴-۴ توزیع آماری جدایی بین ترازها

بنا به تعریف جدائی بین ترازهای انرژی که در بخش (۳-۴) صورت گرفت، در اینجا نیز از مطالعه آماری دستگاه استوانه، همانگونه که در شکل (۴-۲) نشان داده شده است، نتایجی مشابه با دستگاه مورد مطالعه فصل قبل حاصل می گردد. یکسانی نتایج مطالعات آماری دو دستگاه گویای نقاط مشترکی بین آنها است. یکی از این نقاط مشترک انتگرال پذیر بودن هر دو دستگاه است. بنا بر تجربه از مطالعه چند دستگاه انتگرال پذیر مانند دستگاههای مستطیل، دایره، کره و استوانه، در یافته ایم که بین ترازهای انرژی آنها نظمی تقریبی حکمفرما است، مشروط بر آنکه طبقه بندی ترازها بر حسب هر یک از کوانتسهای ایجاد شده، رعایت گردد، زیرا همین کوانتسها هستند که مطالعه یک دستگاه جدائی پذیر را در یک راستا مستقل از راستهای دیگر امکان پذیر می سازند. ذکر این نکته مفید است که، طبقه بندی ترازها بر حسب هر یک از اعداد کوانتمی، به صورتهای مختلفی امکان پذیر است، مثلاً در مورد دستگاه استوانه می توانیم به ازای یک ویژه مقدار مؤلفه سوم اندازه حرکت زاویه ای ثابت و یک شماره معین تراز در راستای محور طولی استوانه بقیه ترازها را بر حسب شماره ترازها در راستای شعاع استوانه مرتب نمائیم، یا اینکه به ازای یک شماره تراز ثابت در راستای محور طولی استوانه و یک شماره تراز معین در راستای شعاع آن، بقیه ترازها را بر حسب مؤلفه سوم ویژه مقدار اندازه حرکت زاویه ای مرتب نمائیم، و الا آخر. در دو حالت فوق الذکر نظمی تقریبی بین ترازها وجود دارد. نظم بین ترازهای انرژی دستگاه کره بمراتب بیشتر از دستگاه استوانه است، این امر هنگام محاسبه ترازها بیشتر قابل لمس است.

در شکل (۴-۱) نمودارهای فراوانی جدائی ترازهای انرژی یک ذره کوانتمی در چاه پتانسیل استوانه ای نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می گردد با در نظر گرفتن تنها نزدیکترین همسایگیها در صورتیکه توجه خود را به یک اندازه حرکت زاویه ای خاص معطوف نمائیم فراوانی جدائی ترازهای انرژی بصورت خطی با افزایش جدائی بین ترازها کاهش می یابد، و حاکی از آن است که فاصله بین نزدیکترین ترازها ی همسایه با m ثابت و معین تقریباً ثابت است. در اینجا نیز حدسهای ویگنر مورد تأیید قرار می گیرند.



شکل (۱-۴) نمودارهای فراوانی جدائی ترازهای انرژی یک ذره کوانتمی در چاه استوانه ای سخت. شکلهای سمت راست تنها نزدیکترین همسایگیها را شامل می شود در حالیکه شکلهای سمت چپ با در نظر گرفتن تمام همسایگیها رسم شده اند. تمایزهای دیگر اشکال فوق در مقادیر ویژه اندازه حرکت زاویه ای ذره به صورت زیر می باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall m \in N \ \& \ 0 \leq m \leq 94 \text{ (g,h) , } m=50 \text{ (e,f) , } m=1 \text{ (c,d) , } m=0 \text{ (a,b)} \\ E_{mnp} = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left(\frac{x_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{(2p-1)\frac{\pi}{2}}{L} \right)^2 \right\} , \quad p=1 , \quad \frac{\hbar^2}{2m}=1 \end{array} \right.$$

۴-۵ کمینه انرژی

انرژی دستگاه استوانه همانگونه که از رابطه زیر بر می آید

$$E_{nmp} = \frac{\hbar^2 k_{nmp}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_{nm}^2 + k_p^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left(\frac{x_{nm}}{a} \right)^2 + \left(\frac{(2p-1)\frac{\pi}{2}}{L} \right)^2 \right\} \quad (۱-۵-۴)$$

علاوه بر حالت $|n, m, p\rangle$ دستگاه، به پارامتر $\eta = \frac{L}{a}$ هم بستگی دارد. برای بررسی تغییرات انرژی بر حسب پارامتر η لازم است که حجم استوانه را ثابت در نظر بگیریم چه در غیر این صورت این تغییرات مفهوم خود را از دست خواهند داد، پس خواهیم داشت که

$$\left(\eta = \frac{L}{a} \quad \wedge \quad \pi a^2 (2L) = V = cte \right) \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi\eta}} \quad (۲-۵-۴)$$

به این ترتیب رابطه (۱-۵-۴) را بر حسب پارامتر η ، و با استفاده از رابطه (۲-۵-۴) می توان بصورت زیر باز نویسی کرد

$$E_{nmp} = \left(\frac{x_{nm}}{\left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3}} \right)^2 \eta^{2/3} + \left(\frac{(2p-1)\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3}} \right)^2 \eta^{-4/3} \quad (۳-۵-۴)$$

برای یافتن استوانه‌ای که در یک حالت معین با اعداد کوانتومی n, m, p انرژی نسبت به استوانه های هم حجم دیگر آن کمینه باشد کافی است که از رابطه (۳-۵-۴) نسبت به پارامتر η مشتق بگیریم. به این ترتیب در خواهیم یافت که دستگاه استوانه به ازای

$$\eta_{\min} = \sqrt{2} \frac{(2p-1) \frac{\pi}{2}}{x_{nm}} \quad (4-5-4)$$

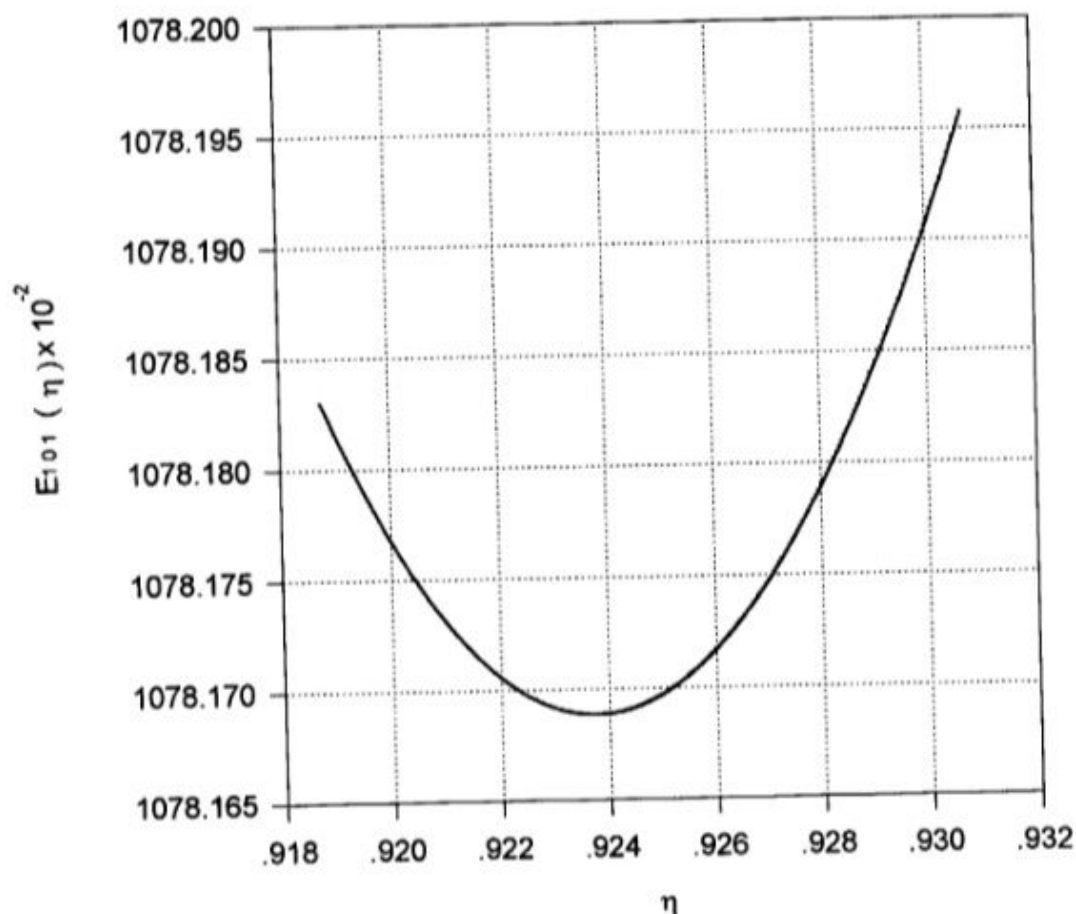
کمینه انرژی را دارد. مثلاً در حالت پایه باید نسبت طول به قطر استوانه را بصورت زیر

$$\eta_{\min} = \sqrt{2} \frac{\frac{\pi}{2}}{x_{10}} = 0.9237432888273247 \quad (5-5-4)$$

اختیار کنیم تا انرژی دستگاه کمینه گردد. تعیین پارامتر تغییر شکل مستقل از حجم استوانه صورت پذیرفت، منتها برای تعیین انرژی دستگاه باید حجمی برای آن قائل شویم، چون در پایان همین بخش قصد داریم که انرژی حالت زمینه سه دستگاه کره، مکعب و استوانه را با هم مقایسه کنیم و باید حجم هر سه دستگاه یکسان اختیار شود تا مقایسه درستی صورت پذیرد، به این جهت حجم استوانه را در اینجا هم برابر $\frac{4}{3}\pi$ ، اختیار می کنیم. در این صورت کمینه انرژی حالت زمینه دستگاه استوانه بصورت زیر است

$$E_{101}\left(\eta_{\min}, V = \frac{4}{3}\pi\right) \cong 10.781 \quad (6-5-4)$$

نمایش تغییرات انرژی حالت زمینه چنین استوانه ای برحسب پارامتر η که در شکل (۲-۴) نشان داده شده است دال بر وجود چنین کمینه ای است. لازم است متذکر شویم که شکل (۲-۴) و اطلاعات مندرج در جدول (۷-۴) نه با استفاده از رابطه تحلیلی (۳-۵-۴) بلکه به روش عددی ای که در فصل پنجم به آن خواهیم پرداخت رسم و محاسبه شده اند.



شکل (۲-۴) نمایش تغییرات انرژی حالت زمینه استوانه ای با حجم ثابت $(V = \frac{4}{3}\pi)$ ، برحسب پارامتر تغییر شکل $(\eta = \frac{L}{a})$ ، که در آن L و a به ترتیب نصف طول و شعاع استوانه هستند.

هر چند که شکل (۲-۴) گویای داشتن یک انرژی کمینه برای استوانه ای با نسبت طول به قطر تقریبی ۰/۹۲ می باشد، ولی از قدرت تفکیک زیادی برخوردار نیست. به همین منظور جدول (۷-۴) تنظیم شده است.

جدول (۷-۴) نمایش عددی تغییرات انرژی حالت زمینه استوانه ای با	
حجم ثابت	بر حسب پارامتر تغییر شکل ، که در آن و
به ترتیب نصف طول و شعاع استوانه هستند.	
η	$E_{101}(\eta)$
.9228433	10.7816932
.9229434	10.7816922
.9230434	10.7816914
.9231434	10.7816906
.9232434	10.7816900
.9233434	10.7816895
.9234434	10.7816891
.9235435	10.7816888
.9236435	10.7816887
.9237435	10.7816886
.9238435	10.7816887
.9239435	10.7816888
.9240435	10.7816891
.9241436	10.7816895
.9242436	10.7816900
.9243436	10.7816906
.9244436	10.7816914
.9245436	10.7816922
.9246436	10.7816932

همانطور که ملاحظه می گردد انرژی حالت زمینه به ازای نسبت طول به قطر ۰/۹۲۳۷۴۳۵ به کمترین مقدار خود می رسد، که به مقدار واقعی آن ۰/۹۲۳۷۴۳۲۸۸۱۲۷۳۲۴۷، بسیار نزدیک است. همچنین

می‌توان به تقارن دو انرژی بلا فاصله بالا و پائین انرژی کمینه تا هفت رقم اعشار دقت نمود، که البته رقم هفتم آن با معنی نیست.

پس از محاسبه انرژی کمینه دستگاه استوانه در حالت پایه می‌خواهیم آن را با دو دستگاه سه بعدی دیگر یعنی مکعب و کره مقایسه نماییم. طبیعی است که به منظور با معنی بودن انجام این مقایسه هر سه دستگاه باید در حالت‌های یکسان مثلاً در حالات پایه خود باشند. همچنین فرض یکسانی حجم سه دستگاه ضروری به نظر می‌رسد، که برای سادگی حجم آنها را مساوی حجم کره ای به شعاع واحد در نظر می‌گیریم. از فصل سه می‌دانیم که انرژی دستگاه کره بصورت زیر قابل محاسبه است

$$E_{nl} = k_{nl}^2 \quad (۷-۵-۴)$$

که در آن k_{nl} ها را می‌توان از جدول (۱-۳) استخراج نمود، مثلاً برای حالت پایه داریم

$$E_{10} = k_{10}^2 = \pi^2 \approx 9.87 \quad (۸-۵-۴)$$

در مورد دستگاه مکعب همچون دستگاه استوانه ابتدا باید تعیین کنیم که چه نسبتی از ابعاد مکعب کمینه انرژی را بدست خواهند داد، که خوشبختانه بنا به تقارن می‌توان حدس زد، مکعبی که اضلاع آن با هم مساوی باشد کمینه انرژی را بدست خواهد داد. در این صورت خواهیم داشت

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2}{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{\frac{2}{3}}} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (۹-۵-۴)$$

که در آن n_x, n_y, n_z متعلق به اعداد طبیعی می‌باشند.

پس با استفاده از رابطه (۴-۵-۹) انرژی حالت پایه مکعب را بصورت زیر بدست می آوریم

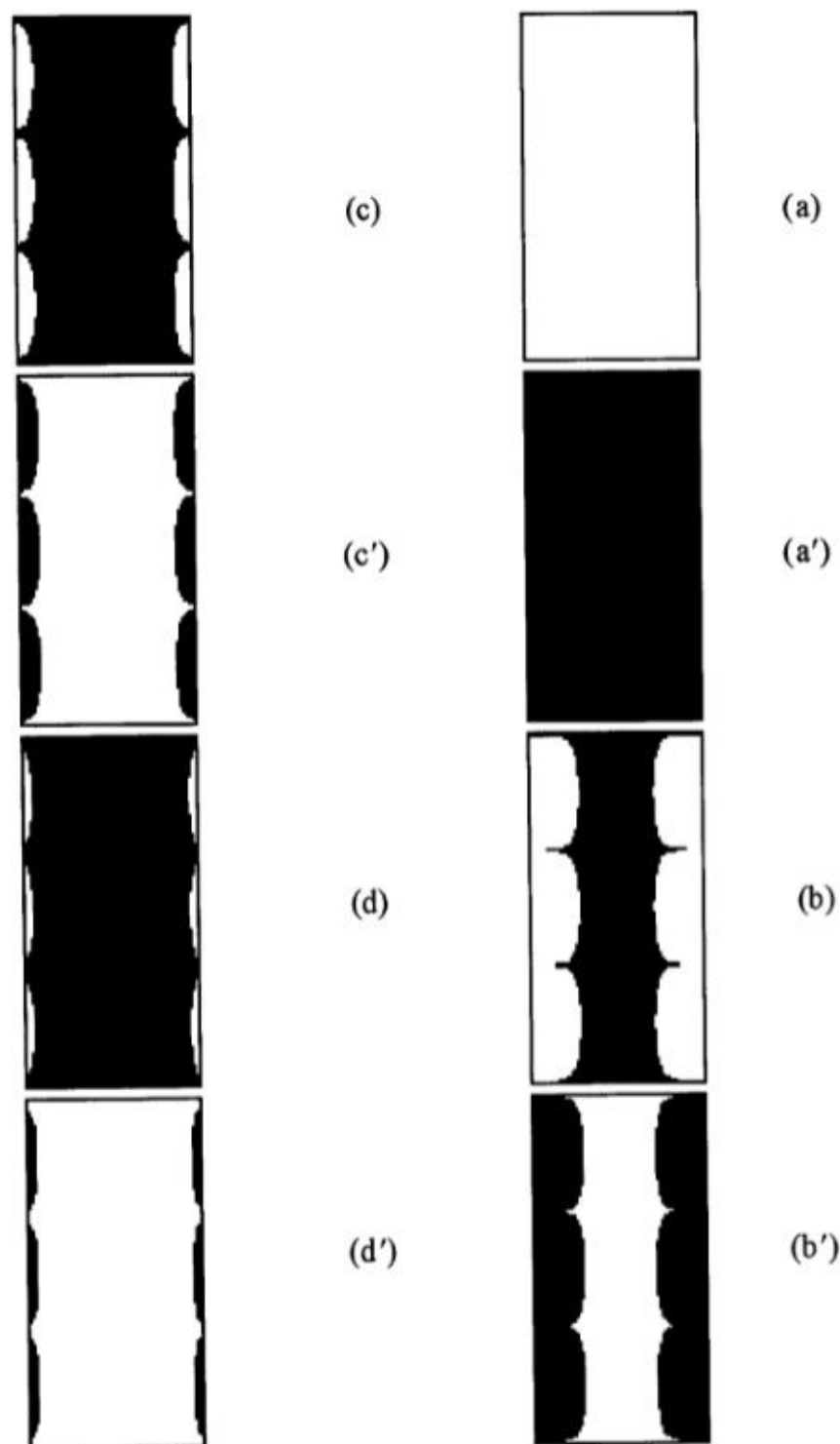
$$E_{1,1,1} = \frac{3\pi^2}{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{\frac{2}{3}}} \approx 11.39 \quad (۴-۵-۱۰)$$

به این ترتیب با توجه به روابط (۴-۵-۱۰ و ۶) در می یابیم که دستگاه کره کمترین و دستگاه مکعب بیشترین انرژی را در حالت پایه نسبت به یکدیگر دارند و انرژی دستگاه استوانه بین انرژی این دو دستگاه واقع شده است. البته شاید با توجه به تقارن هم می توانستیم استدلال کنیم که کره به دلیل تقارن بیشتر نسبت به دو دستگاه دیگر باید انرژی کمتری داشته باشد ولی در مورد مقایسه دو دستگاه دیگر با هم، شاید این امر خیلی واضح نباشد. هر چند که حتی در مورد دستگاه کره نیز علی رغم تقارن بیشتر آن پیش بینی نتیجه، در صورتیکه از تاثیر فرض یکسانی حجم دستگاهها در انرژی مطلع نباشیم، خیلی درست به نظر نمی رسد. به هر حال نتیجه مقایسه انرژی حالت زمینه سه دستگاه مکعب، استوانه و کره بصورت زیر خلاصه می گردد

$$E_{1,1,1} (\text{مکعب}) \approx 11.39 > E_{10} (\text{استوانه}) \approx 10.78 > E_{101} (\text{کره}) \approx 9.87 \quad (۴-۵-۱۱)$$

۴-۶ نحوه توزیع احتمال ذره

در شکل (۴-۳) نحوه توزیع احتمال دستگاه استوانه به منظور نمایش احتمال وعدم احتمال حضور ذره بطور جداگانه بعنوان مکمل یکدیگر نمایش داده شده است. برای این منظور کافی است که صفرهای تابع موج (۴-۱-۴) را در زاویه سمتی $\varphi=0$ تعیین کنیم، منظور از مکمل در اینجا نیز این است که اگر دو شکل نمایش دهنده احتمال وعدم احتمال حضور ذره را بر یکدیگر منطبق کنیم یک استوانه کامل بدست آید. نکته ای که در این شکل مشاهده می شود این است که با افزایش مقدار ویژه مولفه سوم اندازه حرکت زاویه ای ذره از محور استوانه به طرف دیواره استوانه رانده می شود. این همان نکته ای است که قانون پایستگی مولفه سوم اندازه حرکت زاویه ای در مکانیک تحلیلی ایجاب می کند.



شکل (۳-۴) نمایش توزیع احتمال یک ذره محبوس در استوانه‌ای به شعاع a و طول $2(L+a)$ در صفحه $\varphi=0$ ، به ازای m ها و

انرژیهای گوناگون. شکلهای پریم دار مکمل شکلهای بدون پریم می باشند و معرف عدم احتمال حضور ذره هستند، بگونه‌ای که انطباق آنها بر

یکدیگر یک استوانه کامل را به دست خواهد داد. $\left(\eta = \frac{L}{a} = 1, a = \sqrt{\frac{2}{2+3\eta}}, L = a\eta, k_z = \frac{3\pi}{2(L+a)}, p=2, n=1 \right)$

$$m=30, k_p = 36.09833 (d, d') ; m=20, k_p = 25.4171 (c, c') ; m=10, k_p = 14.47 (b, b') ; m=0, k_p = 2.4048 (a, a')$$

فصل پنجم

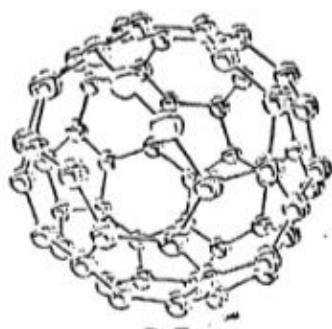
بررسی کوانتومی یک ذره در استادیوم دوار

مقدمه

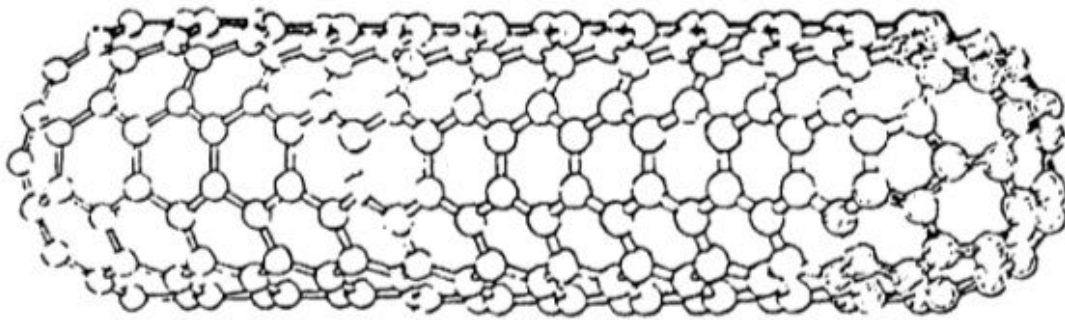
بررسی کلاسیکی دستگاه استادیوم دوار نشان داده است که این دستگاه آشوبی است. هر چند که بررسی کوانتومی آن تا کنون صورت نپذیرفته است و هدف اصلی این پایان نامه را تشکیل می دهد، ولی ظهور آشوب از دیدگاه مکانیک کوانتومی در دستگاه استادیوم مورد تأیید قرار گرفته است. با توجه به آنکه حل کوانتومی یک دستگاه هامیلتونی، ویژه توابع و ویژه مقادیر آن را بطور منحصر به فردی تعیین خواهد کرد انتظار می رود که هر نشانه ای از آشوبی بودن یک دستگاه را بتوان از ویژه توابع و ویژه مقادیر دستگاه مورد مطالعه استخراج نمود.

دستگاه استادیوم دوار صرفاً یک شکل هندسی انتزاعی نیست و در طبیعت هم با استفاده از

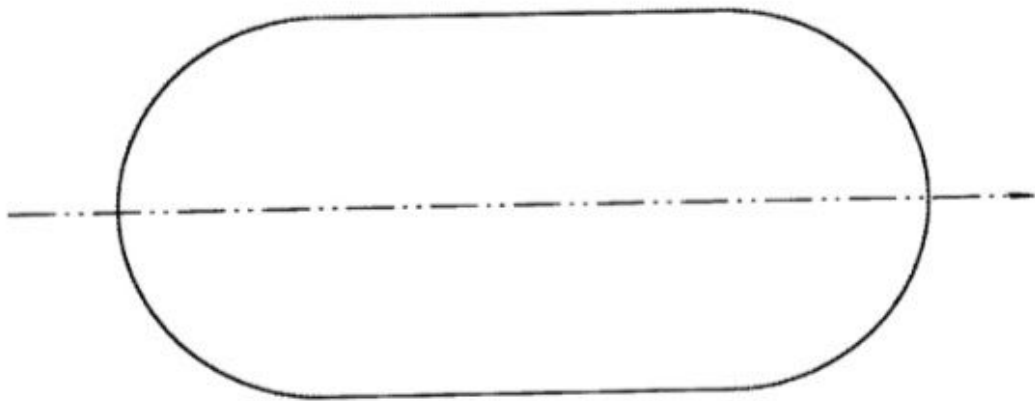
عملیات رشد خوشه C_{60} ، که آن را در زیر نمایش داده ایم



به صورت زیر یافت می شود



پس این دستگاه همچون دستگاه استادیوم که در واقع تصویر آن بصورت زیر



می باشد نیست، و می توان امیدوار بود که در صورت موفقیت در انجام محاسبات نتایج عددی را با آنچه که از تجربه حاصل خواهد شد، مقایسه نمود. در این دیباچه ذکر نکاتی در مورد کربن این عنصر حیاتی که نقش سازنده ای در طبیعت دارد و چنین ویژگی حیرت انگیزی از خود را بروز داده است مفید به نظر می رسد، زیرا جزء این عنصر تا به حال از هیچ عنصری جز این عنصر چنین خوشه هایی ساخته نشده است. این خوشه در طبیعت به خودی خود یافت نمی شوند و آنها را در آزمایشگاه بطور مصنوعی تولید می کنند که کاربردهای روز افزون آنها در صنعت و تکنولوژی نوین اهمیت هر گونه مطالعه ای را در این زمینه آشکار می کند.

پایدار ترین ایزوتوپ کربن $^{12}_6\text{C}^{0+}$ می باشد. این ایزوتوپ در صدر گروه چهار جدول تناوبی عناصر واقع شده است. عناصر سیلیسیم، ژرمانیوم، قلع و سرب به ترتیب بعد از آن قرار گرفته اند. چهار

عنصر اول گروه می توانند ساختار کریستالی الماسی داشته باشند ولی این کربن است که الماس در خشنده را پدید می آورد. ضریب پکیدگی این نوع ساختار نسبت به ساختارهای دیگر کمتر می باشد. به عبارتی این نوع کریستالها خالی تر از بقیه می باشند، $\left(P.f. = \frac{\sqrt{3}\pi}{16}\right)$. فاصله اتمهای کربن در ساختار الماسی کمتر از سایر اتمها در این ساختار می باشد. گرافیت ساختار کریستالی دیگری است که از اتمهای کربن تشکیل می شود و شبکه کریستالی آن براوه و شش وجهی ساده است. ساختارهای دیگری که کربن و دو عنصر هم گروهی آن یعنی سیسیم و ژرمانیوم می توانند در آن شرکت داشته باشند تحت نامهای BC8 و ST12 شناخته شده اند. در بین تمامی این ساختارها که کربن سازنده آنها است، ساختار الماسی از بقیه پایدار تر است.

در سالهای اخیر علاقه به مطالعه خوشه های X_n ، که در آن X یک اتم و n تعداد آنها را نشان می دهد، زیاد شده است. اگر $X = C$ و $n = 60$ باشد به خوشه C_{60} می رسیم که این خوشه به شکل یک توپ فوتبال در آمده که ۶۰ اتم کربن روی آن واقع شده اند. با رشد این خوشه یعنی با افزایش n به خوشه دیگر به شکل استادیوم دوار دست یافته اند. یکی از جنبه های این به مطالعات پیش بینی شکل خوشه بر اساس طرحها و محاسبات نظری بر مبنای آنها می باشد که در صورت به دست آمدن نتیجه مناسب اقدام به ساخت آنها در آزمایشگاه می شود. محاسبات نظری به منظور تعیین سطح انرژی پتانسیل خوشه بدون در نظر گرفتن مسائل تقارنی صرفاً براساس محاسبات تابع چگالی با معرفی یک شبه پتانسیل مناسب انجام می شود.

خوشه های کربن نوعاً به شکل دوده هائی سیاه رنگ هستند که پاره ای از کاربردهای آنها را می توان بصورت زیر برشمرد. ۱- کاهش اصطکاک موتور و سایل نقلیه با افزودن مناسب آن به روغن موتور، ۲- ساخت عینکهایی که در مقابل افزایش شدت نور لیزر حتی به ازای چند طول موج مختلف ضریب انعکاسشان افزایش می یابد، از طریق لعاب دادن شیشه با خوشه های مختلف، ۳- ساخت فیبرهائیکه صدها بار از خود کربن محکمتر هستند، ۴- ساخت قیچیهای اتمی با توجه به شکل توری مانند C_{60} و خوشه های رشته یافته آن. این امر در شرایط خاص آزما یشگاهی در درجه حرارت مناسب امکان پذیر است به این ترتیب که اتمهائی همچون لیتیوم، سدیم، سلنیوم و غیره در این شرایط خاص به

عنصر اول گروه می تواند ساختار کریستالی الماسی داشته باشند ولی این کربن است که الماس در خشنده را پدید می آورد. ضریب پکیدگی این نوع ساختار نسبت به ساختارهای دیگر کمتر می باشد. به عبارتی این نوع کریستالها خالی تر از بقیه می باشند، $\left(P.f. = \frac{\sqrt{3}\pi}{16}\right)$. فاصله اتمهای کربن در ساختار الماسی کمتر از سایر اتمها در این ساختار می باشد. گرافیت ساختار کریستالی دیگری است که از اتمهای کربن تشکیل می شود و شبکه کریستالی آن براوه و شش وجهی ساده است. ساختارهای دیگری که کربن و دو عنصر هم گروهی آن یعنی سیسیم و ژرمانیوم می توانند در آن شرکت داشته باشند تحت نامهای BC8 و ST12 شناخته شده اند. در بین تمامی این ساختارها که کربن سازنده آنها است، ساختار الماسی از بقیه پایدار تر است.

در سالهای اخیر علاقه به مطالعه خوشه های X_n ، که در آن X یک اتم و n تعداد آنها را نشان می دهد، زیاد شده است. اگر $X = C$ و $n = 60$ باشد به خوشه C_{60} می رسیم که این خوشه به شکل یک توپ فوتبال در آمده که ۶۰ اتم کربن روی آن واقع شده اند. با رشد این خوشه یعنی با افزایش n به خوشه دیگر به شکل استادیوم دوار دست یافته اند. یکی از جنبه های این به مطالعات پیش بینی شکل خوشه بر اساس طرحها و محاسبات نظری بر مبنای آنها می باشد که در صورت به دست آمدن نتیجه مناسب اقدام به ساخت آنها در آزمایشگاه می شود. محاسبات نظری به منظور تعیین سطح انرژی پتانسیل خوشه بدون در نظر گرفتن مسائل تقارنی صرفاً براساس محاسبات تابع چگالی با معرفی یک شبه پتانسیل مناسب انجام می شود.

خوشه های کربن نوعاً به شکل دوده هائی سیاه رنگ هستند که پاره ای از کاربردهای آنها را می توان بصورت زیر برشمرد. ۱- کاهش اصطکاک موتور و سایل نقلیه با افزودن مناسب آن به روغن موتور، ۲- ساخت عینکهایی که در مقابل افزایش شدت نور لیزر حتی به ازای چند طول موج مختلف ضریب انعکاسشان افزایش می یابد، از طریق لعاب دادن شیشه با خوشه های مختلف، ۳- ساخت فیبرهائیکه صدها بار از خود کربن محکمتر هستند، ۴- ساخت قیچهای اتمی با توجه به شکل توری مانند C_{60} و خوشه های رشته یافته آن. این امر در شرایط خاص آزمایشگاهی در درجه حرارت مناسب امکان پذیر است به این ترتیب که اتمهایی همچون لیتیوم، سدیم، سلنیوم و غیره در این شرایط خاص به

درون این تور کربنی راه یافته و با قطع شرایط آزمایشگاهی امکان خروج را از دست خواهند داد. احتمال حضور اتم گیر افتاده در حالت زمینه به نظر می رسد که در مرکز تور بیشتر از جاهای دیگر باشد و در حالات برانگیخته بجز در مکانهایی که اتمهای کربن آنها را اشغال کرده اند، بسته به پاریته های مختلف خاص آن حالت برانگیخته بخصوص، احتمال حضور ممکن است در مکانهای دیگر بیشتر از مرکز باشد، که چگونگی آن نیاز به محاسبات دقیق دارد. تا کنون توانسته اند که تعداد زیادی اتم را به درون این تور بیندازند که در حالت زمینه، این اتمها به صورت رشته ای اتمی در امتداد محور طولی این تور کربنی کپسول مانند قرار می گیرند، و به این ترتیب سیمی اتمی حاصل می گردد که ممکن است از آن در ساخت تراشه ها بهره برداری شود. ۵- خوشه های رشد یافته C_{60} در آینده ممکن است که بعنوان تشدید کننده های پرتوی لیزری X مورد استفاده قرار گیرند. پس از ساخت اولین لیزرها در سال ۱۹۶۰، همواره علاقه به ناحیه طول موجهای کوتاهتر وجود داشته است. در سال ۱۹۸۴ اولین مشاهده تقویت نوری در ناحیه ایکس انجام پذیرفت. مشکلات عمده انجام این عمل عبارتند از: یک) تشدید کننده ها، دو) عمر بهره کوتاه، سه) دستگاه دمش، چهار) آینه مناسب. مشکل اول تا کنون حل نشده است و مشکل سوم ذاتی خود مساله است. اصولاً عرض تب لیزرهای بعد از ناحیه UV بسیار کوتاه در حدود نانو ثانیه است و در این نواحی با امکانات فعلی داشتن لیزرهای پیوسته بسیار سخت است، به این دسته از لیزرها لیزرهای پر قدرت تیز^۱ گفته می شود. به همین دلیل حتی در در ناحیه UV برای لیزرهای اکسایمر فقط از یک آینه استفاده می شود. بعبارتی بهره چنین دستگاههایی بسیار زیاد است و طولهای کوتاه مثلاً در حدود یک متر برای عمل تقویت در ناحیه UV بشرط استفاده از اسپارک گپ مناسب، کافی است. هر چند که می توان طول را کوتاهتر کرد و در عوض از دو آینه استفاده نمود ولی به دلیل کاهش ماده فعال توان خروجی کاهش می یابد. مشکل سوم به چندین روش حل شده است که یکی از آنها استفاده از پر قدرترین لیزر جهان یعنی لیزر نوا در آزمایشگاه لورنس لیورمور بوده است. لیزر پر قدرت نوا با توان 6×10^{14} بر واحد سطح، در سال ۱۹۹۲ توسط فیلد^۲ و همکارانش [۴۱]، بر قطعه ای از جنس نقره فرود آمد، آنها ضریب بهره $9.4 \pm 1.5 \text{ cm}^{-1}$ را برای گذار

^۱ High Power Fast Puls Laser

^۲ Fields

که طول هدف یا ماده فعال که در اینجا همان نقره یا بعبارت بهتر پلاسمای نقره است لازم نیست بیش از 4cm باشد، چون یک تقویت با حاصل ضرب بهره در طول حدود 20 برای ما کافی است. ولی حتی چهار سانتیمتر هم بایستی با توان بالای نوا به پلاسمای تبدیل گردد. پس اگر بتوانیم تشدید کننده ای برای این لیزر بیابیم که ابعاد کوچکی در حدود انگستروم داشته باشد و در عین حال پرتو ایکس را هم بازتاب دهد دیگر نیازی به لیزر نوا نخواهیم داشت و البته می توانیم به یک لیزر روی میزی دست پیدا کنیم^۲.

با توجه به پاره ای از کاربردهای برشمرده شده فوق الذکر انجام هر گونه تحقیقاتی در این زمینه تازه، جالب، کاربردی و بااهمیت به نظر می رسد، که اهمیت آنها ممکن است در آینده نمود بیشتری پیدا کند. اما همانطور که گفته شد آنچه که اسباب علاقه ما را فراهم آورده است بررسی کوانتومی دستگاه استادیوم دوار و مطالعه چگونگی ظهور آشوب در این دستگاه است.

۵-۱ حل تحلیلی

به منظور مطالعه هر دستگاه کوانتومی باید معادله شرودینگر را برای یافتن ویژه توابع و ویژه مقادیر آن دستگاه حل نماییم. چون هدف اصلی بررسی چگونگی ظهور آشوب در دستگاه کوانتومی استادیوم دوار است، و این مساله به تنهایی پیچیدگیهای احتمالی خاص خود را دارد، بهتر است که در ابتدا از هر گونه پیچیدگی زائد دیگر پرهیز شود. پس در اینجا برای نوشتن هامیلتونی دستگاه، تابع پتانسیل آن را به ساده ترین وجه ممکن بصورت زیر تعریف می کنیم

^۲ اطلاعات مفیدی را می توان در مرجع [۴۲] در ارتباط با انواع روشهای مختلف ساخت لیزرهای پرتو- X اعم از نرم یا سخت بدست آورد. در این مرجع که تا حدودی جنبه آموزشی دارد، اطلاعات زیادی تا سال ۱۹۹۷ گردآوری شده است.

$$V(\bar{X}) = 0$$

درون استادیوم دوار

(۱-۱-۵)

$$= \infty$$

برون و روی مرز استادیوم دوار

در این صورت معادله مستقل از زمان شرودینگر را برای دستگاه استادیوم دوار می توان به شکل ساده زیر نوشت

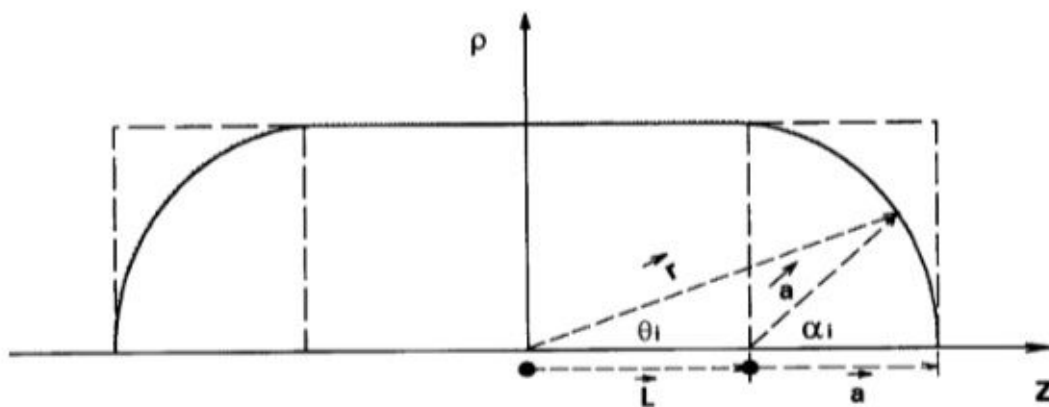
$$(\Delta + k^2)\Psi(\bar{X}) = 0 \quad (2-1-5)$$

که در آن Δ عملگر لاپلاسی است و $\Psi(\bar{X}), k^2$ به ترتیب ویژه مقادیر و ویژه توابع دستگاه هستند. باوجود شکل ساده معادله هلمهولتز (۲-۱-۵) حل تحلیلی آن برای شرایط مرزی دستگاه استادیوم دوار امکان پذیر نیست. زیرا دستگاه مختصاتی که ترکیبی از تقارنهای کروی و استوانه ای را به گونه ای در بر داشته باشد که دستگاه استادیوم دوار را به یک دستگاه انتگرال پذیر تبدیل نماید، نمی شناسیم. یعنی سه ثابت جدائی پذیر مانند $k_\alpha, k_\beta, k_\gamma$ وجود ندارد که توسط آنها بتوان معادله هلمهولتز را برای دستگاه استادیوم دوار به سه معادله یک بعدی جدا از هم تبدیل نمود. اما هر چند که در مختصات کروی یا استوانه ای متغیرهای r, θ یا ρ, z قابل جدا شدن از یکدیگر برای این دستگاه نیستند، اما همواره در هر دو دستگاه با توجه به تقارن می توان متغیر φ را از سایر متغیرها به راحتی جدا کرد، و این بدان معنی است که پاسخ قسمت مربوط به زاویه سمتی را از قبل به صورت $e^{im\varphi}$ می دانیم. پس عملاً با یک مسأله دو بعدی همچون استادیوم روبه رو هستیم و ممکن است که در وهله اول کار مشابه حل دستگاه استادیوم بنظر برسد. که برای رفع شبهه کافی است که به تفاوت حل دستگاه کره و دایره اشاره شود. پس باید روش عددی مناسبی برای حل این دستگاه ارائه نمائیم.

۲-۵ حل عددی با پایه کره

در (۲-۶-۳) ملاحظه شد که پایه $(RB)_y$ تصحیح شده که با $(CB)_y$ نمایش داده شد در حل دستگاه دایره موفق عمل کرد، و در (۳-۶-۳) نیز دیدیم با دوران پایه $(CB)_y$ که با $(SB)_y$ نمایش داده شد حل دستگاه کره صرف نظر از مؤلفه سوم اندازه حرکت زاویه ای امکان پذیر گشت. از طرفی اعمال شرایط مرزی دستگاه استادیوم بر پایه $(CB)_y$ پاسخهای مناسبی را ارائه کرده است [۲۹]. لذا در وهله نخست غیر معقول به نظر نمی‌رسد که فرض کنیم دوران $(CB)_y$ دستگاه استادیوم پاسخهای دستگاه استادیوم دوار را نیز بدست بدهد.

برای این منظور کافی است که شرایط مرزی دستگاه استادیوم را مطابق شکل زیر



شکل (۱-۵)

با استفاده از روابط زیر

$$r = \begin{cases} L \cos \theta_i + \sqrt{a^2 - L^2 \sin^2 \theta_i} & 0 \leq \theta_i \leq \tan^{-1}\left(\frac{a}{L}\right) \\ \frac{a}{\sin \theta_i} & \tan^{-1}\left(\frac{a}{L}\right) < \theta_i \leq \pi - \tan^{-1}\left(\frac{a}{L}\right) \\ -L \cos \theta_i + \sqrt{a^2 - L^2 \sin^2 \theta_i} & \pi - \tan^{-1}\left(\frac{a}{L}\right) < \theta_i \leq \pi \end{cases} \quad (۱-۲-۵)$$

که در آن همانطور که در شکل (۱-۵) نشان داده شده است a, L به ترتیب شعاع و نصف طول استادیوم می باشند، بر پایه $(SB)_y$ تحمیل نمائیم، زیرا به این ترتیب با توجه به تقارن روی زاویه سمتی کلیه نقاط استادیوم دوار پوشش خواهد یافت. وظیفه این پوشش به‌عده تابع وزن $|\sin \theta_i - \theta_r|$ در پایه $(SB)_y$ می باشد، یعنی آنچه که سبب تفاوت بین دو پایه $(SB)_y$ و $(CB)_y$ شده است.

ولی به این ترتیب نتایج رضایت بخشی برای دستگاه استادیوم دوار حاصل نمی گردد. لذا جهت بهبود نتایج، تصحیحاتی به شرح زیر شاید کارساز باشند.

الف) پارامتری کردن قسمت کروی دستگاه استادیوم دوار بر حسب طول قوس و قسمت استوانه ای آن بر حسب طول، به منظور توزیع یکنواخت نقاط مرزی بر روی آن. همانطور که در شکل (۲-۵-a) دیده می شود تقسیم بازه $[0, \pi]$ به N قسمت مساوی یعنی به تعداد نقاط مرزی، به دلیل عدم تقارن نسبت به زاویه قطبی θ سبب توزیع نامتقارن نقاط بروی دستگاه می شود. برای دست یابی به یک توزیع متقارن از نقاط با داشتن ارتباط بین زوایای θ_i ، α_i در شکل (۱-۵) به صورت زیر

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{L} + \vec{a} = r \cos \theta_i \hat{k} + r \sin \theta_i \hat{\rho} \\ &= L \hat{k} + a \cos \alpha_i \hat{k} + a \sin \alpha_i \hat{\rho}\end{aligned}\quad (2-2-5)$$

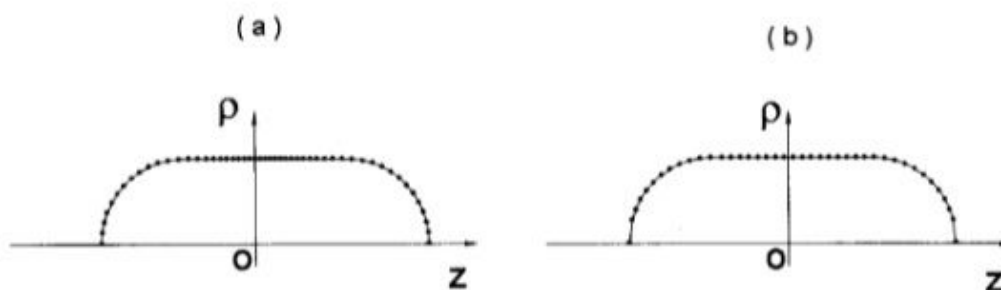
از مقایسه روابط فوق خواهیم داشت

$$r \cos \theta_i = L + a \cos \alpha_i \quad \& \quad r \sin \theta_i = a \sin \alpha_i \quad (3-2-5)$$

که از تقسیم دو رابطه (۳-۲-۵) بر هم ارتباط بین زوایای مذکور بصورت زیر بدست خواهد آمد

$$\tan \alpha_i = \frac{r \sin \theta_i}{r \cos \theta_i - L} \quad \text{یا} \quad \tan \theta_i = \frac{a \sin \alpha_i}{r \cos \alpha_i + L} \quad (4-2-5)$$

همانطور که در شکل (۲-۵-b) ملاحظه می گردد با استفاده از رابطه (۴-۲-۵) توزیع نقاط بر روی دستگاه بطور کاملاً یکنواختی صورت گرفته است.



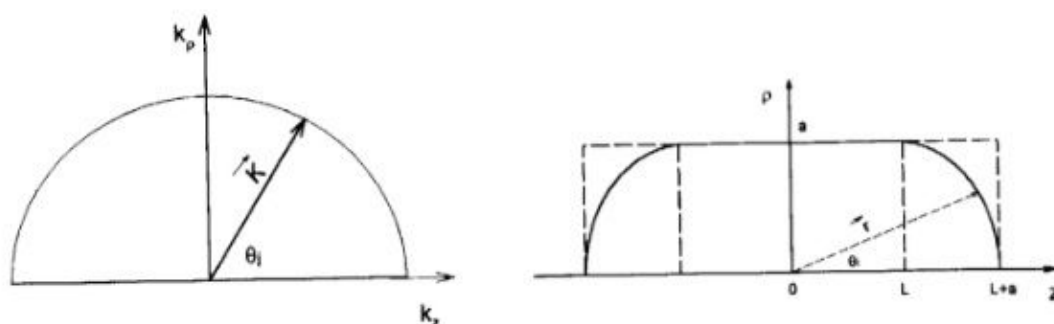
شکل (۲-۵) نمایش نحوه توزیع غیریکنواخت (a) و یکنواخت (b) نقاط مرزی روی دستگاه استادیوم دوار.

اما تاثیر این تصحیح خیلی چشمگیر نبود و در مورد آن می توان چنین اظهار نظر کرد که با یکنواختی توزیع نقاط روی دستگاه یکنواختی تقسیمات زاویه ای در بازه $[0, \pi]$ از دست می رود. یکنواختی توزیع همزمان هر دوی آنها امکان پذیر نیست. هر چند که تصحیح (الف) چاره ساز نشد اما مشکل اساسی حل این دستگاه را آشکار کرد، که چیزی جز ترکیب دو تقارن کروی و استوانه ای غیر قابل تفکیک از یکدیگر نمی باشد.

ب) ایجاد عدم تقارن در تابع وزن پایه $(SB)_\theta$. دستگاه استادیوم دوار همچون دستگاه مستطیل و دستگاه استوانه نسبت به زاویه قطبی متقارن نیست. تابع وزن در پایه $(SB)_\theta$ یعنی $|\sin \theta_r - \theta_r|$ را قبلاً برای دستگاه کره به حق متقارن کرده بودیم، پس اکنون اجازه داریم که این تقارن را از آن باز پس گیریم تا بصورت $\sin \theta_r$ در آید. این تصحیح نیز نه به دلیل نادرستی استدلال بلکه به دلیل عدم رعایت آن از ابتدا، که بعداً به آن خواهیم پرداخت، خیلی موفق نبود.

ج) ایجاد محدودیت در بازه تغییرات θ_r . با توجه به شکل (۳-۵) دستگاه استادیوم دوار در فضای مکان برون و درون دو استوانه به ترتیب با طولهای $2L$ و $2L+2a$ واقع شده است، که شعاعهای هردو یکسان و برابر شعاع انحنای قسمت کروی استادیوم دوار یعنی a می باشند. در این شکل همچنین شکل تکانی

دستگاه استادیوم دوار بصورت یک کره نمایش داده شده است، در هر دو فضا بنا به تقارن فقط به رسم تصاویر نیمی از هر دو شکل به ازای یک زاویه سمتی معین اکتفا شده است.



$$\begin{cases} k_z = k \cos \theta_j \\ k_\rho = k \sin \theta_j \end{cases} \Rightarrow \frac{k_z}{k_\rho} = \cot \theta_j$$

شکل (۳-۵) شکل سمت راست تصویر نیمی از دستگاه استادیوم دوار است و در شکل سمت چپ نیز k_z و k_ρ به شکل مولفه‌های یک بردار فرضی در نظر گرفته شده‌اند، که طول آن ثابت است و جهت θ_j آن مقادیر مختلف نمی‌گیرد.

انرژی دستگاه استادیوم دوار به دلیل حجم و سطح کمتر باید از انرژی استوانه خارجی آن بیشتر و به دلیل حجم و سطح بیشتر از انرژی استوانه داخلی آن کمتر باشد. با توجه به اینکه انرژی هر سه دستگاه از رابطه $E = k_\rho^2 + k_z^2$ بدست می‌آیند و k_ρ ، در هر سه حالت معین یکسان است پس تفاوت انرژی آنها در k_z می‌باشد. پس از روابط (۲-۲-۴) و (۳-۲-۴) و شکل (۳-۵) محدوده تغییرات زاویه θ_j بصورت زیر تعیین می‌گردد

$$\cot^{-1} \left(\frac{(2p-1) \frac{\pi}{2} a}{L x_{nm}} \right) \leq \theta_j \leq \cot^{-1} \left(\frac{(2p-1) \frac{\pi}{2} a}{(L+a) x_{nm}} \right) \quad (5-2-5)$$

رابطه (۵-۲-۵) علاوه بر تعیین محدوده مؤثر تغییرات انرژی دستگاه استادیوم دوار که از فیزیک مساله نشأت می‌گیرد، عدم تقارن را نیز بنحوی به آن تزریق می‌کند. هر چند که این تصحیح نسبت به تصحیحات قبلی اثرات بیشتری داشت ولی باز هم پاسخها دقت لازم را نداشتند.

عدم موفقیت سه بند تصحیحی فوق الذکر را باید در انتخاب پایه نامناسب $(SB)_j$ جستجو کرد، پس بخش بعد را به معرفی پایه مناسب این دستگاه اختصاص می دهیم.

۳-۵ معرفی پایه استوانه

همانطور که در بخشهای (۳-۳) و (۳-۵) ملاحظه شد انتخاب پایه مناسب هر دستگاه امری اجتناب ناپذیر است. ، در اینجا به ارائه یک روند مناسب و قابل تعمیم می پردازیم. شکل انتگرالی تبدیل فوریه^۴ تابع موج هر دستگاه فیزیکی دلخواه بصورت زیر

$$\Psi(\vec{X}) = \int_{\text{all space}} g(\vec{K}) e^{i\vec{K} \cdot \vec{X}} d^3k \quad (1-3-5)$$

گویای شکل کاملاً تعریف شده ای از بسط توابع موج آن بر حسب امواج تخت می باشد، که در آن $g(\vec{K})$ ضرایب بسط می باشند. موج تخت داخل انتگرالده رابطه (۱-۳-۵) برای یک دستگاه دو بعدی را می توان مطابق شکل (۳-۳) با تجزیه بردارهای موج و مکان، بصورت زیر نوشت.

$$e^{i(kr \cos \theta_i \cos \theta_j + kr \sin \theta_i \sin \theta_j)} = e^{ikr \cos(\theta_i - \theta_j)} \quad (2-3-5)$$

^۴ استفاده از روشهای انتگرالی برای حل معادلات دیفرانسیل بسیار معمول می باشد، بعنوان مثال معادله پخش نیز به روش تابع گرین به حل یک انتگرال منجر می شود [۴۲].

همین امر برای یک دستگاه سه بعدی به روابط زیر منجر می‌شود

$$\begin{aligned}
 & e^{i(kr \sin \theta_i \cos \varphi_i \sin \theta_j \cos \varphi_j + kr \sin \theta_i \sin \varphi_i \sin \theta_j \sin \varphi_j + kr \cos \theta_i \cos \theta_j)} \\
 &= e^{ikr(\sin \theta_i \sin \theta_j (\cos \varphi_i \cos \varphi_j + \sin \varphi_i \sin \varphi_j) + \cos \theta_i \cos \theta_j)} \\
 &= e^{ikr(\sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \cos \theta_i \cos \theta_j)} \quad (3-3-5)
 \end{aligned}$$

جهت معرفی پایه مناسب دستگاه استادیوم دوار کافی است که از رابطه (3-3-5) بعنوان موج تخت درون انتگرالده رابطه (1-3-5) استفاده نمائیم، زیرا رابطه (3-3-5) جنبه کلی داشته و برای دستگاه خاصی نوشته نشده است.

در حالت $m=0$ به دلیل تقارن دستگاه استادیوم دوار نسبت به زاویه سمتی ضریب $g(\vec{K})$ تابعی از φ_j نیست، پس با استفاده از روابط (3-3-5) و (1-3-5) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 \Psi(\vec{X}) &= \int_{k=0}^{k_{\min}} \int_{\theta_j=0}^{\pi} \int_{\varphi_j=0}^{2\pi} \left[g(\theta_j) e^{ikr(\sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \cos \theta_i \cos \theta_j)} \right. \\
 &\quad \left. \times k^2 \delta(k - k_{\min}) dk \sin \theta_j d\theta_j d\varphi_j d^3 k \right] \quad (4-3-5)
 \end{aligned}$$

که در آن تابع دلتا به منظور کمینه سازی انرژی مورد استفاده قرار گرفته است. انتگرال گیری روی k به سادگی به صورت زیر قابل انجام است

$$\Psi(\vec{X}) = k_{\min}^2 \int_{\theta_j=0}^{\pi} \int_{\varphi_j=0}^{2\pi} g(\theta_j) e^{ikr(\sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \cos \theta_i \cos \theta_j)} \sin \theta_j d\theta_j d\varphi_j \quad (5-3-5)$$

در وهله نخست به نظر می رسد که انتگرال گیری از رابطه فوق نسبت به φ_j کار دشواری باشد که در این صورت باید شرایط مرزی را در تمام سطح استادیوم دوار برآورده ساخت که این امر حجم محاسبات را افزایش و دقت را بشدت کاهش خواهد داد. اما با نوشتن رابطه فوق بصورت زیر

$$\Psi(\vec{X}) = k_{\min}^2 \int_{\theta_j=0}^{\pi} g(\theta_j) \sin \theta_j e^{ikr \cos \theta_i \cos \theta_j} d\theta_j \int_{\varphi_j=0}^{2\pi} e^{ikr \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\varphi_i - \varphi_j)} d\varphi_j \quad (۶-۳-۵)$$

و تغییر متغیر $\varphi_i - \varphi_j = \varphi$ به کمک شکل انتگرالی دیگری علاوه بر رابطه (۴-۳-۱) از توابع بسل استوانه ای بصورت زیر

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \varphi - im\varphi} d\varphi \quad (۷-۳-۵)$$

می توانیم توابع موج دستگاه را به شکل زیر ساده زیر بنویسیم

$$\Psi(\vec{X}) = 2\pi k_{\min}^2 \int_{\theta_j=0}^{\pi} g(\theta_j) \sin \theta_j e^{ikr \cos \theta_i \cos \theta_j} J_0(kr \sin \theta_i \sin \theta_j) d\theta_j \quad (۸-۳-۵)$$

پس مستقل ازضریب بهنجارش می توان پایه زیر را برای دستگاه استادیوم دوار در حالت $m=0$ معرفی کرد

$$J_0(kr \sin \theta_i \sin \theta_j) \cos(kr \cos \theta_i \cos \theta_j) \sin \theta_j : m=0 \text{ پایه استادیوم دوار در حالت } \quad (۹-۳-۵)$$

در حالت $m \neq 0$ تابع موج (حتی برای دستگاه کره) تقارن خود را نسبت به زاویه سمتی از دست می دهد و ضریب $g(\vec{K})$ تابعی از φ_j می گردد، بطوریکه در فصل سه به دلیل عدم شناخت پایه مناسب از حل عددی در این حالت صرف نظر شد. ولی باید توجه کرد که چه در دستگاه کره و چه در دستگاه استادیوم دوار به دلیل جدا پذیری متغیر زاویه سمتی از متغیرهای دیگر از پاسخ مربوطه بصورت $e^{im\varphi}$

اطلاع داریم. پس جای نگرانی چندانی نیست و برای هر دو دستگاه با ترفند اضافه و کم کردن مقدار $im(\varphi_i - \varphi_j)$ بصورت زیر از تابع نمائی انتگرالده انتگرال زاویه سمتی رابطه (۵-۳-۶) می توان پایه مناسبی برای آنها بدست آورد.

$$\Psi(\vec{X}) = k_{\min}^2 \int_{\theta_j=0}^{\pi} \sin \theta_j e^{ikr \cos \theta_i \cos \theta_j} d\theta_j$$

$$\times \int_{\varphi_j=0}^{2\pi} g(\theta_j, \varphi_j) e^{ikr \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + im(\varphi_i - \varphi_j) - im(\varphi_i - \varphi_j)} d\varphi_j \quad (۵-۳-۱۰)$$

با توجه به اینکه به دنبال تابع موجی به صورت $\Psi(\vec{X}) = f(r_i, \theta_i) e^{im\varphi_i}$ هستیم با محاسبه ای مشابه آنچه در این قسمت انجام داده ایم می توان نشان داد که معکوس فوریه آن نیز بستگی مشابهی به زاویه φ_j دارد، به عبارت دیگر داریم: $g(\theta_j, \varphi_j) = g(\theta_j) e^{im\varphi_j}$ ، پس می توان نوشت

$$\Psi(\vec{X}) = \left[k_{\min}^2 \int_{\theta_j=0}^{\pi} \sin \theta_j e^{ikr \cos \theta_i \cos \theta_j} d\theta_j \right.$$

$$\left. \times \int_{\varphi_j=0}^{2\pi} g(\theta_j) e^{im\varphi_j} e^{ikr \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) - im\varphi_j - im(\varphi_i - \varphi_j)} d\varphi_j \right] e^{im\varphi_i} \quad (۵-۳-۱۱)$$

پس خواهیم داشت

$$\Psi(\vec{X}) = \left[k_{\min}^2 \int_{\theta_j=0}^{\pi} g(\theta_j) \sin \theta_j e^{ikr \cos \theta_i \cos \theta_j} d\theta_j \right.$$

$$\left. \times \int_{\varphi_j=0}^{2\pi} e^{ikr \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) - im(\varphi_i - \varphi_j)} d\varphi_j \right] e^{im\varphi_i} \quad (۵-۳-۱۲)$$

اکنون با تغییر متغیر $\varphi_i - \varphi_j = \varphi$ ، و استفاده از رابطه (۷-۳-۵) رابطه فوق را می توان مستقل از ضرایب ثابت به صورت زیر نوشت

$$\Psi(\vec{X}) = \left[\int_{\theta_j=0}^{\pi} g(\theta_j) J_m(kr \sin \theta_i, \sin \theta_j) \sin \theta_j e^{ikr \cos \theta_i, \cos \theta_j} d\theta_j \right] e^{im\varphi_i} \quad (۱۳-۳-۵)$$

به این ترتیب نهایتاً پایه^۱ $(CilB)_{ij}$ را به دو صورت هم ارز زیر معرفی می کنیم

$$(CilB)_{ij} = J_m(kr \sin \theta_i \sin \theta_j) \cos(kr \cos \theta_i, \cos \theta_j) \sin \theta_j \quad (۱۴-۳-۵)$$

یا

$$(CilB)_{ij} = J_m(kr \sin \theta_i \cos \theta_j) \cos(kr \cos \theta_i, \sin \theta_j) \cos \theta_j \quad (۱۵-۳-۵)$$

برای بدست آوردن رابطه (۱۵-۳-۵) کافی است که در شکل (۳-۵) تبدیل $\theta_j \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta_j$ را انجام دهیم، یعنی متعم زاویه نشان داده شده در شکل را به عنوان θ_j در نظر بگیریم. در این صورت با محاسباتی مشابه در دستگاه مختصات استوانه‌ای به پایه (۱۵-۳-۵) دست خواهیم یافت، که نتایج محاسبات هم ارزی دو پایه را به خوبی تایید می کنند.

۴-۵ حل عددی با پایه استوانه

مطالعه کوانتومی دستگاه استادیوم دوار با حل عددی معادله هلمهولتز (۵-۱-۲)، تحقق می یابد. برای این منظور کافی است که شرایط مرزی (۵-۲-۱) را بر ترکیب خطی زیر تحمیل نماییم.

$$\Psi(\vec{X}) = \sum_{j=1}^N x_j (CilB)_{ij} \quad (۵-۴-۱)$$

که در آن به منظور افزایش دقت و سرعت محاسبات، بجای استفاده از شکل انتگرالی (۴-۳-۱) تابع بسل استوانه ای، می توانیم از رابطه زیر در صورتیکه تغییرات x محدود به بازه $[-3,3]$ باشد،

$$J_0(x) = 1 - 2.2499997 \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1.2656208 \left(\frac{x}{3}\right)^4 - 0.3163866 \left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0.0444479 \left(\frac{x}{3}\right)^8 - 0.0039444 \left(\frac{x}{3}\right)^{10} + 0.0002160 \left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \varepsilon \quad (۵-۴-۲)$$

که در آن $|\varepsilon| < 5 \times 10^{-8}$ ، استفاده نماییم. اما اگر تغییرات محدود به بازه فوق الذکر نباشد می توانیم از رابطه زیر که تغییرات x در آن محدود به بازه $[3, \infty)$ است استفاده کنیم

$$J_0(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_0 \cos \theta_0 \quad (۵-۴-۳)$$

که در رابطه فوق f_0 ، بصورت زیر

$$f_0 = 0.79788456 - 0.00000077 \left(\frac{3}{x}\right) - 0.00552740 \left(\frac{3}{x}\right)^2 - 0.00009512 \left(\frac{3}{x}\right)^3 + 0.00137237 \left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0.00072805 \left(\frac{3}{x}\right)^5 + 0.00014476 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon \quad (۵-۴-۴)$$

که در آن $|\varepsilon| < 1.6 \times 10^{-8}$ و θ_0 بصورت زیر

$$\theta_0 = x - 0.78539816 - 0.04166397\left(\frac{3}{x}\right) - 0.00003954\left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0.00262573\left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0.00054125\left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0.00029333\left(\frac{3}{x}\right)^5 + 0.00013558\left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon \quad (5-4-5)$$

که در آن $|\varepsilon| < 7 \times 10^{-8}$ تعریف می گردند. از رابطه (۳-۴-۵) با اندکی دقت در بازه $[-\infty, -3]$ نیز می توان استفاده نمود زیرا تابع $J_0(x)$ زوج است. پس همانطور که ملاحظه می گردد دقت محاسبات بعدی محدود به دقت تابع بسل استوانه ای یعنی حداکثر هشت رقم اعشار است. هر چند که برای بعضی از m -های غیر صفر نیز، روابطی مشابه با روابط (۲-۴-۵) و (۳-۴-۵) برای توابع بسل استوانه ای ارائه شده است، ولی هنوز هم افزایش دقت و تعمیم آن به m -ها بیشتر جزء کارهای تحقیقاتی بحساب می آید.

قبل از آنکه به ارائه نتایج حاصله بپردازیم، اعتماد به آنها امری ضروری بنظر می رسد. این امر به راحتی با اعمال شرایط حدی بر پارامتر تغییر شکل امکان پذیر است. با اعمال شرط حدی $\eta \rightarrow 0$ ، انتظار می رود که بتوان کلیه ترازهای انرژی دستگاه کره را بدست آورد. در فصل سه طبقه بندی ترازهای دستگاه کره پس از تعیین حالت آن $|n, l, m\rangle$ بصورت تحلیلی با احتساب تبهگنیها مورد بررسی قرار گرفت، در حالیکه حل عددی آن منحصرأ در حالت $|n, l = 0, m = 0\rangle$ به دلیل انتخاب پایه $(SB)_\eta$ صورت پذیرفت. اعمال شرط حدی $\eta \rightarrow 0$ بر دستگاه استادیوم دوار هم ارز حل عددی دستگاه کره در دستگاه مختصات استوانه ای است، همانطور که در فصل چهار نشان داده شد یک حالت در این دستگاه با $|n, m, p\rangle$ تعیین می گردد. مقایسه دو حالت $|n, l, m\rangle$ و $|n, m, p\rangle$ نشان می دهد که نقش m در هر دو دستگاه یکسان و معرف وجود قانون بقاء مؤلفه سوم اندازه حرکت زاویه است، که این بقاء حتی در دستگاه استادیوم دوار نیز وجود دارد. ولی چون در دستگاه مختصات استوانه ای بقاء اندازه حرکت زاویه ای کل وجود ندارد باید در طبقه بندی ترازهای کره در دستگاه مختصات استوانه ای دقت لازم مبذول گردد. کلیه ترازهای دستگاه کره در حالت $|n, l = 0, m = 0\rangle$ با پایه $(CIB)_\eta|_{m=0}$ قابل محاسبه اند در حالیکه برای محاسبه ترازهای آن در حالت $|n, l = 1, m = 0\rangle$ باید یک تغییر جزئی به منظور حفظ قانون بقاء پاریته در رابطه (۲۰-۳-۵) بصورت زیر انجام شود

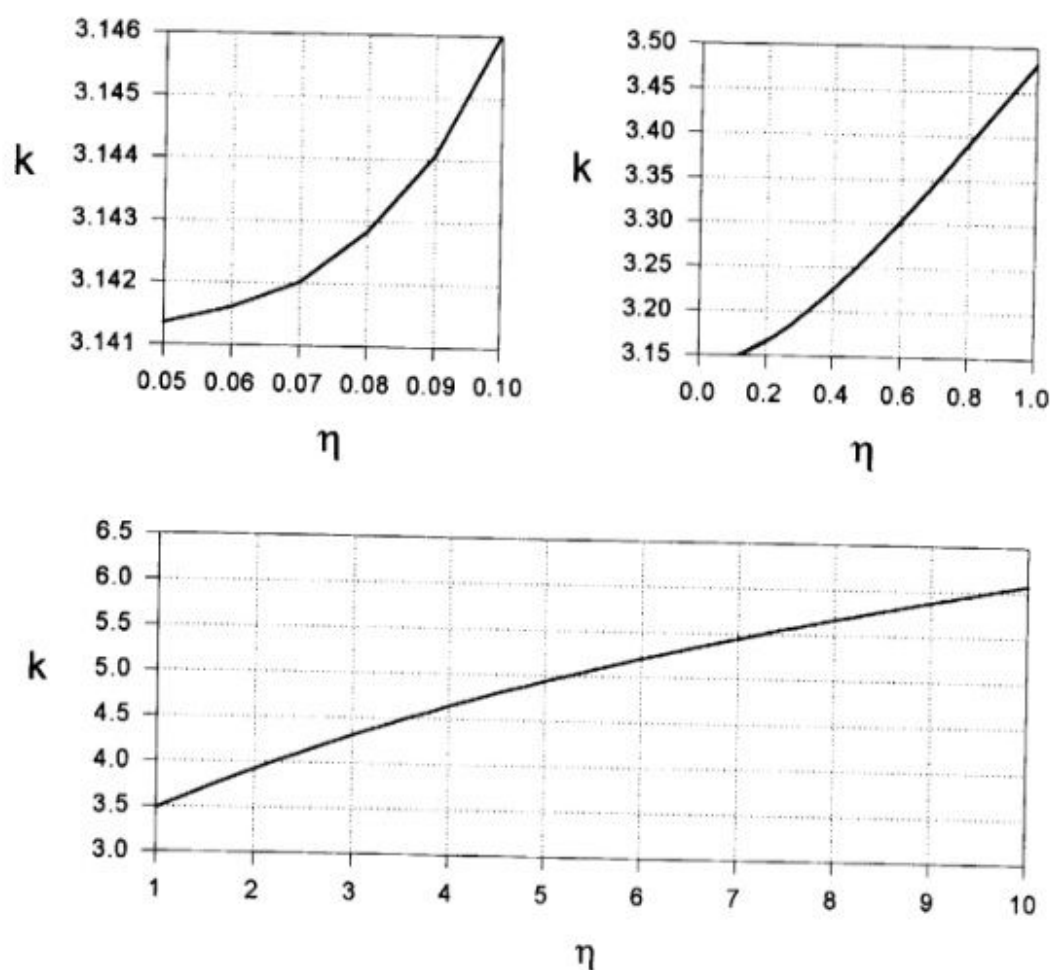
$$(CilB)_y = J_0(\dots)\cos(\dots)\cos\theta_f \rightarrow (CilB)_y J_1(\dots)\sin(\dots)\cos\theta_f \quad (۶-۴-۵)$$

مشکلی که در طبقه بندی ترازها به آن اشاره شد عیناً در مورد دستگاه استادیوم دوار وجود دارد با این تفاوت که مانند کره برای آن یک دستگاه مختصات مناسب که در آن ترازها از قبل طبقه بندی شده باشند وجود ندارد و این مشکل را مضاعف خواهد نمود. لازم است تذکر داده شود که حتی دقت در محاسبه ترازهای دستگاه کره در حالات $\langle n, l > 1, m = 0 \rangle$ با پایه های (۶-۴-۵) بشدت کاهش می یابد، و هر چند که بنظر می رسد برای بهبود آن باید پایه ها مجدداً تصحیح شوند که خود می تواند یک کار تحقیقاتی بشمار آید، ولی راه ساده و فیزیکیتر آن است که از تعامد توابع موج ترازهای مختلف بر یکدیگر استفاده گردد. یعنی اگر پایه ای حتی یک تراز انرژی را با دقتی قابل قبول بدست بدهد می توان امیدوار بود که سایر ترازها را هم با رعایت قوانین بقاء و تعامد توابع موج ترازهای مختلف بر هم بدست آورد. همچنین در حد $\eta \rightarrow \infty$ ، انتظار می رود که نتایج به سمت نتایج دستگاه استوانه میل کند که خوشبختانه به دلیل استفاده از پایه این دستگاه در این مورد مشکلات طبقه بندی وجود ندارد و کلیه ترازهای انرژی آن براحتی قابل محاسبه اند.

۵-۵ تغییرات انرژی حالت زمینه بر حسب پارامتر تغییر شکل

تغییرات انرژی دستگاه استوانه بر حسب پارامتر تغییر شکل در بخش (۵-۴) مورد بررسی قرار گرفت. شکل (۲-۴) گویای تغییرات در جه دوم انرژی در بازه $[\eta_{\min}, \eta_{\min} + \epsilon]$ می باشد، که در آن $\epsilon \ll 1$. این امر کلیت داشته و منحصر به دستگاه استوانه نیست بطوریکه می توان آنرا در دستگاه مکعب نیز ملاحظه نمود و اساس آن به نظریه اختلال بر می گردد که در ذیل جدول (۲-۳) به آن اشاره شده است. پس هر چند که با بررسی چنین تغییراتی در مورد دستگاه استادیوم در صورتیکه حجم آن ثابت فرض شود انتظار وجود یک کمینه نمی رود ولی می توان توقع داشت که تغییر کوچکی به اندازه ϵ در η منجر

به تغییر کوچکتری از مرتبه ε^2 در انرژی دستگاه شود، که البته این خود بیانگر این موضوع است که دقت محاسبات در انرژی به مراتب بیشتر از توابع موج است یعنی با یک تابع موج نسبتاً خوب یک انرژی با دقتی مضاعف حاصل می گردد. در عمل بررسی چنین تغییراتی برای انرژی حالت زمینه دستگاه استاندارد دوار تقریباً وجود یک کمینه را نشان می دهد، به این ترتیب که ابتدا انرژی با افزایش η در بازه $[0, 0.3]$ همراه با نوساناتی اندک نزول کرده و سپس در بازه $[0.3, 10]$ بدون نوسان صعود می کند. هرچند که حد $\eta \rightarrow 0$ دستگاه کره را بدست می دهد و بر اساس تقارن کامل آن احساس می گردد که انرژی کمینه باید در همین حد حاصل شود ولی به دلیل عدم آگاهی از نقش تاثیر حجم و ثابت نگاه داشتن آن شاید این امر خیلی واضح نباشد، اما با مقایسه ای که در بخش (۴-۵) بین انرژی دو دستگاه هم حجم کره و استوانه صورت گرفت می توان نتیجه گرفت که باید کمینه انرژی در $\eta \rightarrow 0$ بدست آید. البته نوسانات اندک در پارامترهای تغییر شکل کوچک نیز حاکی از عدم ثبات در محاسبات می تواند باشد که بررسیهای مو شکافانه تر با افزایش تعداد نقاط اعمال شرایط مرزی که مستلزم صرف وقت بسیار است نشان داد که این نزول و نوسانات به دلیل دقت محاسبات حداکثر تا سه رقم اعشار در این ناحیه می باشد، هر چند که در خارج از ناحیه پارامترهای کوچک به محاسبات با ۱۵۰ نقطه مرزی تا حداقل پنج رقم اعشار می توان اعتماد کرد. علت کم شدن دقت در پارامترهای کوچک را می توان در ایجاد تقارن نسبت به زاویه قطبی با نزدیک شدن به حالت حدی کره دید، زیرا یکی از اهداف معرفی پایه $(CilB)_0$ بر هم زنی تقارن کروی بوده است. تغییرات انرژی در ناحیه پارامترهای کوچک سبب تغییر رقم چهارم بعد از اعشار انرژی می گردد پس طبیعی است که به این ترتیب مقدار رقم چهارم پوشیده باقی خواهد ماند که برای اطلاع از آن باید تعداد نقاط مرزی را افزایش و تعداد پارامترهای کوچک را محدود نمود. نتایج حاصل از این ملاحظات در شکل (۵-۱) و مقادیر عددی ترازها در جدول (۵-۱) آورده شده است.



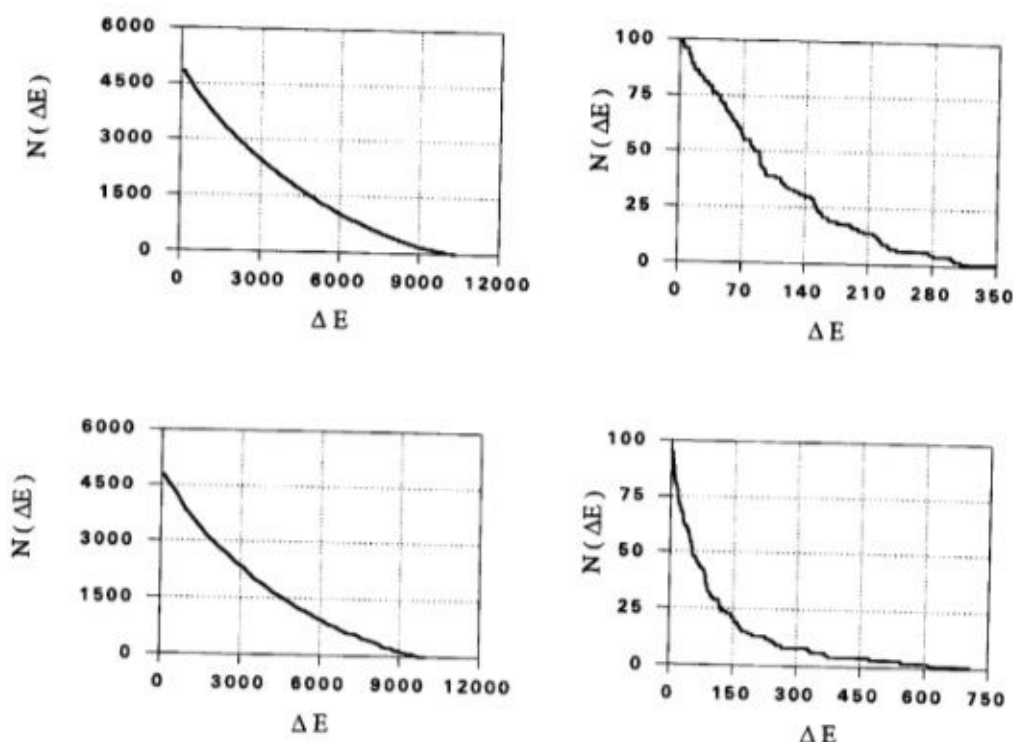
شکل (۴-۵) تغییرات k ی متناظر با انرژی حالت زمینه استادیوم دوار بر حسب پارامتر تغییر شکل متناظر با نسبت طول به قطر استادیوم دوار.

در اشکال فوق به منظور پی بردن به ماهیت تغییرات درجه دوم اندازه بردار موج استادیوم دوار در η های کوچک و تغییرات خطی آن در η های بزرگ، بازه $\eta \in [0.05, 10]$ ، را به سه زیر بازه به ترتیب از چپ به راست واز بالا به پائین $\eta \in [0.05, 0.1]$ ، $\eta \in [0.1, 1]$ و $\eta \in [1, 10]$ تقسیم کرده ایم.

در تمامی موارد فوق حجم استادیوم دوار ثابت $(V = \frac{4}{3}\pi)$ در نظر گرفته شده است.

به منظور قدرت تفکیک هر چه بیشتر و تأیید صحت محاسبات انجام شده، k ی استادیوم دوار با همراه $k_{\max}$ ی استوانه درونی آن، و همچنین $k_{\min}$ ی استوانه ای که آن را احاطه کرده است، بر حسب تغییرات η ، در جدول (۱-۵) درج کرده ایم. این در حالی است که باز هم حجم استادیوم دوار ثابت فرض شده است، پس تغییرات $k_{\max}$ و $k_{\min}$ بر حسب پارامتر η ، از معنی آنچنانی برخوردار نیست و صرفاً به منظور مقایسه ارائه گردیده اند.

فراوانی جدائی بین ترازهای انرژی در بخش (۳-۴) تعریف شد، آمار حاکم بر ترازهای انرژی دستگاه استادیوم دوار با استفاده از این تعریف و اطلاعات جدول (۵-۲) از شکل (۵-۲) قابل استخراج است.



شکل (۵-۵) فراوانی جدائی بین ترازهای انرژی دستگاه استادیوم دوار استاندارد ($\eta = 1$) در حالت $m = 0$ در دو شکل بالا نشان داده شده است. دو شکل پائین فراوانی جدائی بین اعداد تصادفی را به منظور مقایسه با ترازهای یک دستگاه آشوبی نشان می دهند. شکل‌های سمت چپ با در نظر گرفتن تمام همسایگیها و شکل‌های سمت راست فقط با در نظر گرفتن نزدیکترین همسایگیها رسم شده اند.

توزیع آماری دستگاههای انتگرال پذیر کره و استوانه به ترتیب در بخشهای (۳-۴) و (۴-۴) مورد بررسی قرار گرفت. بررسیهای انجام شده نشان داد که بین ترازهای انرژی این دو دستگاه در صورت طبقه بندی ترازهای آنها می توان پی به وجود نظم خاصی برد، اما اگر بدون رعایت طبقه بندی ترازها در یکدیگر ادغام شوند، علاوه بر مرتب کردن آنها برحسب بزرگی، هرگز چنین نظمیی دیده نمی شود. دستگاه استادیوم دوار بر خلاف دستگاههای انتگرال پذیر مورد بحث قرار گرفته یک دستگاه جدائی پذیر نیست یعنی طبقه بندی ترازها با مفهوم یاد شده امکان پذیر نمی باشد، و تنها طبقه بندی ممکن علاوه بر آنچه که عدد کوانتومی m ایجاب می کند، بر اساس فیزیک مساله یعنی حفظ قانون بقاء پارته خواهد بود، که

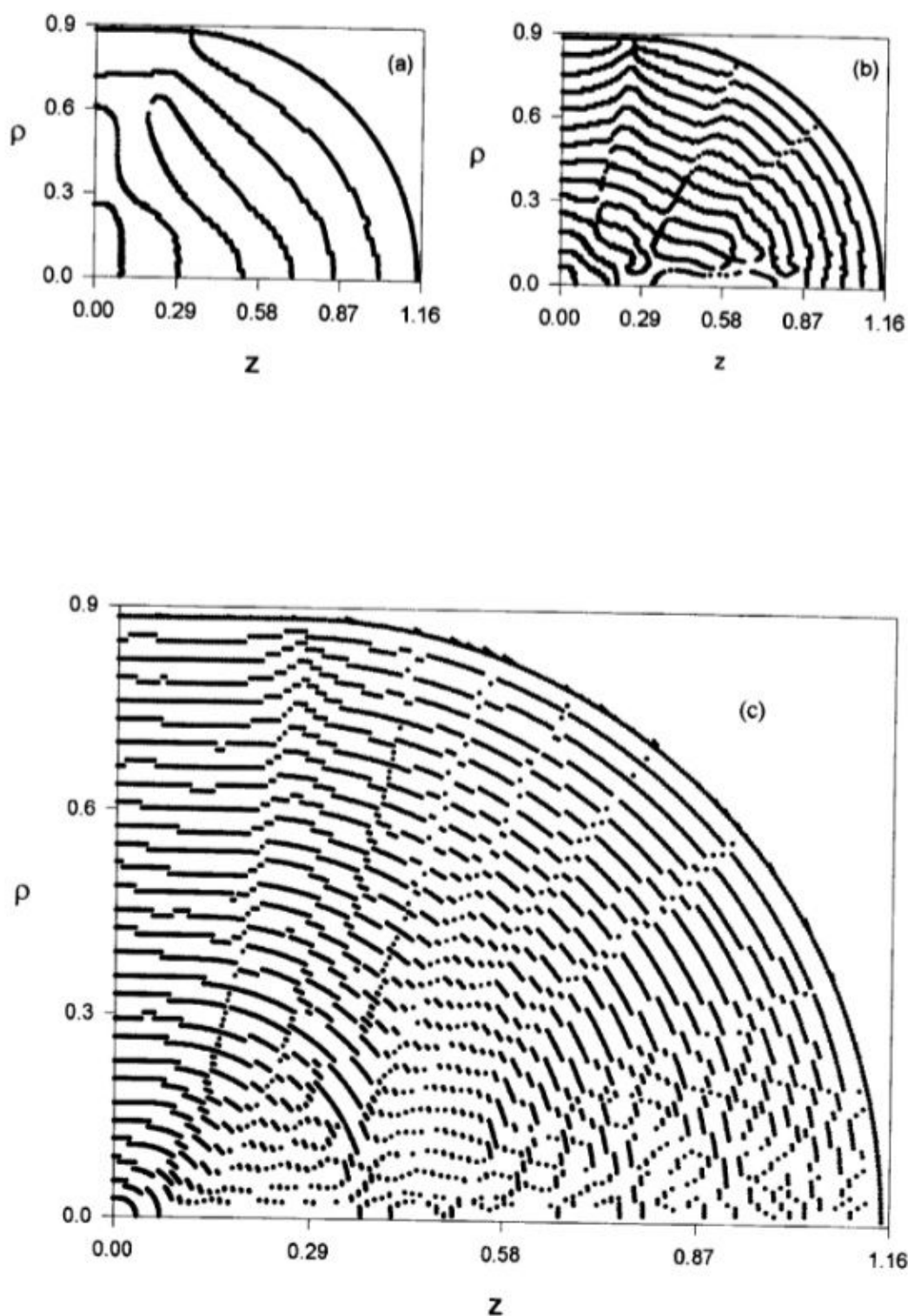
به همین دلیل ترازهای مندرج در جدول (۲-۵) فقط اختصاص به پایته های زوج زوج یافته اند. شکل (۲-۵) نشان می دهد که بین ترازهای انرژی دستگاه استادیوم دوار بی نظمی حاکم است. برای آنکه بهتر بتوان پی به وجود این بی نظمی برد در همین شکل آمار حاکم بر جدائی بین اعداد تصادفی نیز جهت مقایسه نشان داده شده است. همانطور که ملا حظه می گردد شباهت زیادی بین آمارهای اعداد تصادفی و ترازهای انرژی دستگاه استادیوم دوار وجود دارد که می توان آن را دال بر آشوبی بودن دستگاه استادیوم دوار دانست.

۵-۲ منحنیهای صفرهای توابع موج

یکی دیگر از راههایی که ظهور پدیده آشوب از دیدگاه مکانیک کوانتومی در دستگاه استادیوم دوار، که از نظر کلاسیکی آشوبی بشمار می رود، را به اثبات می رساند، بررسی رفتارهای منحنیهای صفرهای توابع موج این دستگاه است. آنچه که در بخش (۳-۵) تحت عنوان توزیع احتمال ذره در دستگاه کره به آن پرداخته شد، اکنون بصورت عددی با پایه $(CilB)_H$ و با بررسی حدی دستگاه استادیوم دوار وقتی که پارامتر تغییر شکل بسیار کوچک اختیار شود مجدداً قابل انجام است. نتایج این بررسی با آنچه که انتظار می رود کاملاً سازگاری دارد. البته در اینجا بجای توزیع کامل احتمال ذره فقط به نقاطی از دستگاه که تابع موج در آنها صفر می شود توجه می گردد، که نتایج آنها تفاوت آنچنانی با یکدیگر ندارند، و فقط حجم محاسبات به ترتیب اخیر کاهش می یابد. صفرهای توابع موج در دستگاه انتگرال پذیر کره به صورتی کاملاً منظم در آن توزیع می شوند، که این امر جنبه کلی داشته و خاص تمام دستگاههای انتگرال پذیر می باشد. کره با اندکی کشش در امتداد شعاع به دستگاه استادیوم دوار با پارامتر تغییر شکل کوچک تبدیل می شود، که این تغییر شکل کوچک سبب برهم خوردن نظم حاکم بر توزیع کتره صفرهای توابع موج خواهد گردید. هر چند که در بین ترازهای انرژی دستگاه استادیوم دوار می توان ترازهایی را یافت که توزیع صفرهای توابع موج همانند دستگاههای انتگرال پذیر از نظم خاص پیروی

کند، ولی این شرایط پایداری بسیار کمی داشته بگونه ای که با اندکی تغییر در آنها مجدداً بی نظمی بر توزیع صفرهای توابع موج حاکم می گردد.

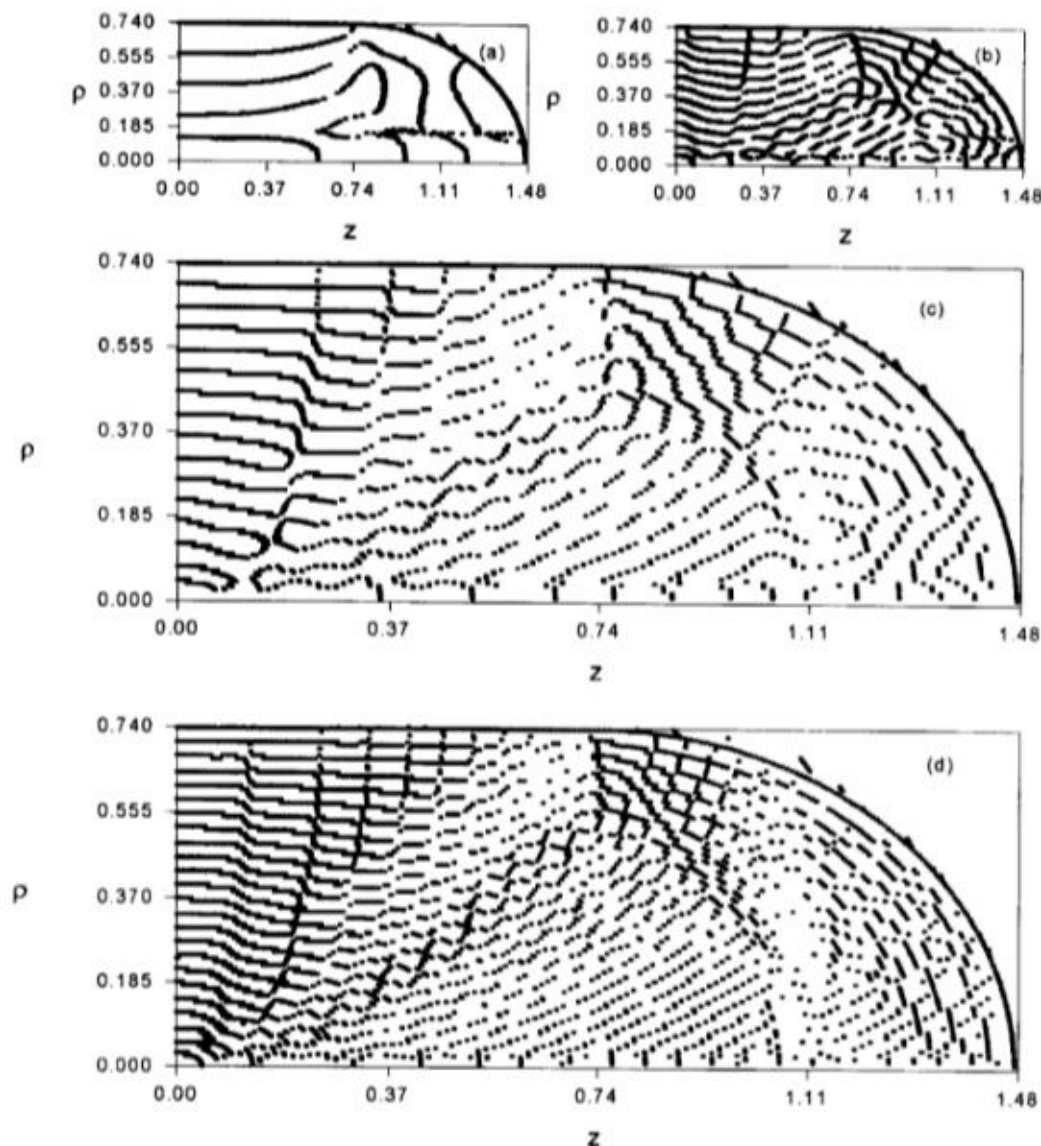
منحنیهای حاصل از اتصال صفرهای توابع موج به یکدیگر علاوه بر کتره ای بودن که به آن اشاره شد دارای ویژگیهای خاص دیگری بر خلاف دستگاههای انتگرال پذیر می باشند. این منحنیها یا از یک نقطه مرزی شروع و به نقطه دیگری از مرز دستگاه همراه با اعوجاج ختم می گردند، یا مدارهای بسته ای را درون دستگاه تولید می کنند. یکی از خصوصیات مشاهده شده دیگر این دسته از منحنیها فاصله گرفتن از یکدیگر می باشد، یعنی از برخورد با یکدیگر پرهیز دارند. ویژگیهای یاد شده بالا ظاهراً عمومیت داشته و خاص تمام دستگاههای آشوبی است زیرا چنین خصوصیتی عیناً در مورد دستگاه استادیوم نیز مشاهده شده است. تنها تفاوتی را که می توان بین دو دستگاه استادیوم و استادیوم دوار به آن اشاره کرد این است که دستگاه استادیوم دوار از بقاء مؤلفه سوم اندازه حرکت زاویه ای سود می برد، حال آنکه چنین امری در مورد دستگاه استادیوم صادق نیست. همانطور که در شکل (۳-۲) ملاحظه گردید افزایش ویژه مقدار اندازه حرکت زاویه ای کل در دستگاه کره سبب دور شدن ذره از مرکز و نزدیکی آن به دیواره ها می شود، همچنین در شکل (۳-۴) دیدیم که افزایش مؤلفه سوم ویژه مقدار اندازه حرکت زاویه ای همین تاثیر را در دور کردن ذره از محور استوانه دارد. ولی آیا با توجه به وجود پایستگی مؤلفه سوم اندازه حرکت زاویه ای در دستگاه استادیوم دوار این مطلب یعنی دور شدن ذره از محور استادیوم دوار می تواند صادق باشد؟ پاسخ این سوال مستلزم محاسبه ترازهای انرژی دستگاه استادیوم دوار به ازای m های بزرگ است، که می توان آن را ادامه تحقیقات فعلی دانست.



شکل (۵-۶) منحنی های تقاطعی از ویژه توابع ذره ای محبوس در استادیوم دوار ($\eta = 0.3$)، که همواره ثابت ویدونین

حرکت باقی می ماند، $(\Psi(\rho, z) = 0)$. $\left(a = \sqrt[3]{\frac{2}{2+3\eta}} \approx 0.88, \eta = 0.3, L = a\eta \approx 0.27, m = 0 \right)$. تمایز اشکال

فوق در اندازه بردار موج ذره به این صورت است که، (a) 19.437583، (b) 49.986622، (c) 100.95474.



شکل (۵-۷) منحنی های نقاطی از ویژه توابع ذره ای مجبوس در استادیوم دوار استاندارد ($\eta = 1$)، که همواره ثابت و بدون حرکت باقی می مانند، $(\Psi(\rho, z) = 0)$. بنابر تقارن (زوج-زوج) ویژه تابع چنین ذره ای با ویژه مقدار صفر مؤلفه Z ، اندازه حرکت زاویه ای $m=0$ ، فقط یک چهارم استادیوم دوار در زاویه سمنی $\varphi = 0$ ، نمایش داده شده است.

این منحنیها باید بر مرز استادیوم دوار عمود باشند و در داخل مرز نباید یکدیگر را قطع کنند. حجم استادیوم دوار $\frac{4}{3}\pi$

بنابراین حجم قسمت نشان داده شده در شکل $\frac{1}{3}\pi$ می باشد، نصف طول و شعاع انحنای آن با هم مساوی و برابر

است. $\left(a = L = \sqrt[3]{\frac{2}{2+3\eta}} \approx 0.74, \eta = 1\right)$ اندازه بردار موج k ، ذره متناظر با ویژه مقدار انرژی آن برای هر یک از

شکلها عبارت است از، (a) 19.554578، (b) 52.0748140، (c) 65.7595070، (d) 101.925599.

پیوست

برنامه زیر به زبان Fortran به منظور یافتن صفرهای تابع بسل کروی با استفاده از شکل انتگرالی این تابع یعنی رابطه (۳-۳-۱) تنظیم شده است.

برنامه (۱)

```

Implicit real*8(a-h,o-z)
Dimension swb(21),tkm(21)
pi=4.d0*datan(1.d0)
n=10000
do 102 lm=50,50
ln0=1
tk0=pi+ln0*lm
1234 do 101 ln=ln0,200
    tks=tk0+(3)*(ln-ln0)
    tke=tks+2
    stpp=.1d0
    lli=0
    do 100 jjj = 1,7
    do 200 tk1 = tks,tke,stpp
        lli = lli + 1
        sal1= 0.d0
        do 802 j = 1,n
            sal1=sal1+dcos(tk1*dcos(j*pi/n))*dsin(j*pi/n)**(2*lm+1)
602 continue
        swb(lli)=dAbs(sal1)
        tkm(lli)=tk1
200 continue
        smin=swb(1)
        do 803 i = 1,lli
            If(swb(i).le.smin)Then
                smin=swb(i)
                tkmin=tkm(i)
            EndIf
803 continue
            Print*,tkmin,smin
            lli = 0
            tks=tkmin-stpp

```

```

tke=tkmin+stpp
stpp=stpp/10.d0
100 continue
if(smin.gt.(1.d-5))then
ln0=ln
tks0=tkmin
go to 1234
endif
Open(1,'c:\hall\sphe\for\dat\sphe01.txt'
* ,access='append',status='unknown')
c if(tkmin.lt.96)write(1,*)tkmin,lm,ln
write(1,*)tkmin,lm,ln
close(1)
101 continue
102 continue
end

```

برنامه زیر همانند برنامه (۱) می باشد، با این تفاوت که به منظور تعیین صفرهای تابع بسط استوانه ای با استفاده از شکل انتگرالی این تابع یعنی (۴-۳-۱) تنظیم شده است.

برنامه (۲)

```

Implicit real*8(a-h,o-z)
Dimension swb(21),tkm(21)
pi=4.d0*datan(1.d0)
n=50000
do 102 lm=1,1
tks0=296.4
ln0=1
1234 do 101 ln=ln0,200
tks=tks0+(3)*(ln-ln0)
tke=tks+2
stpp=.1d0
lil=0
do 100 jll = 1 ,7
do 200 tk1 = tks,tke,stpp
lil = lil + 1
sal1= 0.d0
do 802 j = 1,n
sal1=sal1+dcos(tk1*dsin(j*pi/n)-lm*j*pi/n)
802 continue
swb(lil)=dAbs(sal1)
tkm(lil)=tk1
200 continue
smin=swb(1)
do 803 i = 1,lil

```

```

      If(swb(l).le.smin)Then
      smin=swb(l)
      tkmin=tkm(l)
      Endif
803 continue
      Print*,tkmin,smin
      lli = 0
      tks=tkmin-stpp
      tke=tkmin+stpp
      stpp=stpp/10.d0
100 continue
      If(smin.gt.(1.d-3))then
      ln0=ln
      tks0=tkmin
      go to 1234
      endif
      Open(1,'c:\hall\cil\for\dat\cil01.txt'
      * ,access='append',status='unknown')
c      If(tkmin.lt.96)write(1,*)tkmin,lm,ln
      write(1,*)tkmin,lm,ln
      close(1)
101 continue
102 continue
      end

```

برنامه زیر به زبان QUICK BASIC و با روش Back Substitution، توابع موج دستگاه دایره را به ازای انرژی داده شده، که تعیین کننده حالت دستگاه است، در چند جهت مختلف با توابع موج دقیق حاصل از حل انتگرالی (۴-۳-۱) و همچنین رابطه (۵-۴-۳) مقایسه می کند، که انرژی دقیق با انطباق آنها بر یکدیگر بدست خواهد آمد.

برنامه (۳)

```

'$DYNAMIC
'DEFDBL A-Z
OPTION BASE 1: CLS : COLOR 14: a# = 1
Pi# = 4 * ATN(1#): k# = 2.4048285301#: x0# = k#
INPUT "The number of point on boundary="; n1: n = n1
'INPUT "enter energy of the particle trapped in the well potential"; K#
DIM D(n1, n1 + 1) AS DOUBLE, b(n1, n1 + 1) AS DOUBLE
DIM rn1(n1) AS DOUBLE, rn2(n1, n1) AS DOUBLE, x(n1) AS DOUBLE

FOR j = 1 TO n1
  D(1, j) = 1: b(1, j) = D(1, j)
NEXT j
FOR i = 2 TO n1

```

'RANDOMIZE TIMER

'rn1(i) = RND * (Pi# / 2)

rn1(i) = Pi# / n1 * i

FOR j = 1 TO n1

'rn2(i, j) = RND * (Pi#)

rn2(i, j) = Pi# / n1 * j: nokh1# = COS(k# * a# * COS(rn1(i) - rn2(i, j)))

D(i, j) = nokh1#: b(i, j) = D(i, j)

NEXT j

NEXT i

D(1, n1 + 1) = 1: b(1, n1 + 1) = D(1, n1 + 1)

FOR j = 2 TO n1

D(j, n1 + 1) = 0: b(j, n1 + 1) = D(j, n1 + 1)

NEXT j

FOR i = 1 TO n1

FOR j = 1 TO n1 + 1

IF j MOD (n1 + 1) = 0 THEN

COLOR 10: 'print D(i, j): 'print ;

ELSE

'print D(i, j);

END IF

NEXT j

NEXT i

FOR n = 1 TO n1 - 1

IF D(n, n) = 0 THEN

FOR i = n + 1 TO n1

IF D(i, n) <> 0 THEN

FOR j = 1 TO n1 + 1

D(n, j) = D(n, j) + D(i, j)

NEXT j

GOTO 20

END IF

NEXT i

IF D(n, n) = 0 THEN

BEEP: COLOR 10: PRINT "there is a singularity"

COLOR 13: PRINT "D("; n; ", "; n; ")="; D(n, n);

COLOR 14: PRINT ", and there are not any D(n,n)<>0."

GOTO 10

END IF

END IF

20 FOR i = n + 1 TO n1

FOR j = n1 + 1 TO n STEP -1

D(i, j) = D(i, j) - D(i, n) / D(n, n) * D(n, j)

NEXT j

```

NEXT i
NEXT n
 $\pi(n1) = D(n1, n1 + 1) / D(n1, n1)$ 
FOR i = n1 - 1 TO 1 STEP -1
  FOR j = i + 1 TO n1
     $s\# = s\# + D(i, j) * \pi(j)$ 
  NEXT j
   $\pi(i) = 1 / D(i, i) * (D(i, n1 + 1) - s\#) : s\# = 0$ 
NEXT i

```

```

FOR i = 1 TO n1
  COLOR INT(RND * 10) + 1
  FOR j = 1 TO n1 + 1
    IF j MOD (n1 + 1) = 0 THEN
      'print D(i, j): 'print ;
    ELSE
      'print D(i, j);
    END IF
  NEXT j
NEXT i

```

```

FOR i = 1 TO n1
  FOR j = 1 TO n1
     $hal\# = hal\# + b(i, j) * \pi(j)$ 
  NEXT j
  COLOR INT(RND * 10) + 1
  PRINT "x"; i; "=";  $\pi(i)$ ;  $hal\# - b(i, n1 + 1)$ ;  $D(i, i)$ 
  'LPRINT  $\pi(i)$ ;  $hal\# - b(i, n1 + 1)$ ;  $d(i, i)$ 
  IF i MOD 22 = 0 THEN
    PRINT "press any key to continue"
    INPUT hall
  END IF
  IF ABS( $hal\# - b(i, n1 + 1)$ ) > 1 THEN
    ON PLAY(10) GOSUB replay
    FELise$ = "o3 L8 E D+ E D+ E o2 B o3 D C L2 o2 A"
    PLAY "MB X" + VARPTR$(FELise$)
    GOSUB background
  replay:
  background:
    INPUT hall
  END IF
   $hal\# = 0$ 
NEXT i
INPUT hall

```

a# = 50: x0# = a# * k#

SCREEN 12: xmin = 0: xmax = a#: ymin = -2: ymax = 2

xscale = (xmax - xmin) / 20: yscale = (ymax - ymin) / 20

VIEW (1, 1)-(638, 460), 3, 3: WINDOW (xmin, ymin)-(xmax, ymax)

FOR xs = xmin TO xmax STEP xscale

IF ABS(xs) <= xscale / 100 THEN

LINE (xs, ymin)-(xs, ymax), 0

ELSE

LINE (xs, ymin)-(xs, ymax), 8, , &H7777

END IF

NEXT xs

FOR ys = ymin TO ymax STEP yscale

IF ABS(ys) <= yscale / 100 THEN

LINE (xmin, ys)-(xmax, ys), 0

ELSE

LINE (xmin, ys)-(xmax, ys), 8, , &H7777

END IF

NEXT ys

nmax = 100: D# = Pi# / nmax: rc1 = .0005: rc2 = .009: m = 0

FOR i = 2 TO n1

FOR r# = 0 TO a# STEP .02

FOR j = 1 TO n1

nokh1# = COS(k# * r# * COS(rn1(i) - rn2(i, j)))

sal# = sal# + nokh1# * x(j)

NEXT j

CIRCLE (r#, sal#), rc1, 15

LPRINT sal#

sal# = 0

NEXT r#

NEXT i

FOR x# = 0 TO a# STEP .005

FOR n = 1 TO nmax

y# = COS(m * D# * n - x0# / a# * x# * SIN(n * D#)) * D# * 1 / Pi#

s# = s# + y#

NEXT

x1# = x0# / a# * x# / 3

j01# = 1 - 2.2499997# * x1# ^ 2 + 1.2656208# * x1# ^ 4

j02# = -.3163866# * x1# ^ 6 + .0444479 * x1# ^ 8

j03# = -.039444# * x1# ^ 10 + .00021# * x1# ^ 12

j0# = j01# + j02# + j03#

CIRCLE (x#, s#), rc2, 4

CIRCLE (x#, j0#), rc2, 10

LPRINT j0#: s#

s# = 0

۱۱۹

NEXT

'COLOR 15: LOCATE 16, 2: PRINT "k="; k#: LOCATE 18, 2: PRINT "n="; n1

ERASE D, b, x, rn1, rn2

10 END

به دلیل عدم موفقیت اجرای برنامه (۲) در پاره ای از موارد، که از تکنیکهای ذاتی فیزیک مساله نشات می گیرد، علی رغم حجم محاسبات کمتر، لازم است که از برنامه زیر با روش SVD، که حجم محاسبات بیشتری را طلب می کند، توابع موج دستگاه دایره به ازای انرژی داده شده، در چند جهت مختلف با توابع موج دقیق حاصل از حل انتگرالی (۱-۳-۴) و همچنین رابطه (۳-۴-۵) مقایسه شوند، که انرژی دقیق با انطباق آنها بر یکدیگر بدست خواهد آمد.

برنامه (۴)

'\$DYNAMIC

'INPUT "filename"; A\$

'OPEN A\$ FOR OUTPUT AS #1

OPTION BASE 1: CLS : COLOR 14

a# = 1: Pi# = 4 * ATN(1#): k# = 2.4048285301#: x0# = k#

INPUT "The number of point on boundary="; n1

n = n1: m = n1: nmax = n1

'INPUT "enter energy of the particle trapped in the well potential"; K#

DIM U(n, n) AS DOUBLE, w(n) AS DOUBLE

DIM v(n, n) AS DOUBLE, b(n) AS DOUBLE, x(n) AS DOUBLE

DIM rv1(nmax) AS DOUBLE, tmp(nmax) AS DOUBLE

DIM D(n1, n1) AS DOUBLE, C(n1, n1) AS DOUBLE

DIM rn1(n1) AS DOUBLE, rn2(n1, n1) AS DOUBLE

FOR j = 1 TO n1

D(1, j) = 1

C(1, j) = D(1, j)

NEXT j

FOR i = 2 TO n1

'RANDOMIZE TIMER

'rn1(i) = RND * (Pi# / 2)

rn1(i) = Pi# / n1 * i

FOR j = 1 TO n1

'rn2(i, j) = RND * (Pi#)

rn2(i, j) = Pi# / n1 * j

nokh1# = COS(k# * a# * COS(rn1(i) - rn2(i, j)))

```

'nokh2# = COS(k# * A# * SIN(rn1(l)) * SIN(rn2(l, j)))
D(l, j) = nokh1#
C(l, j) = D(l, j)
NEXT j
NEXT l
b(1) = 1
FOR j = 2 TO n1
  b(j) = 0
NEXT j

```

```

FOR i = 1 TO n1
  FOR j = 1 TO n1
    IF j MOD (n1) = 0 THEN
      COLOR 10: 'print D(i, j): 'print ;
      'PRINT #1, D(i, j)
    ELSE
      'print D(i, j);
      'PRINT #1, D(i, j)
    END IF
  NEXT j
NEXT i

```

```

FOR i = 1 TO n
  FOR j = 1 TO n
    U(i, j) = D(i, j)
  NEXT j
NEXT i

```

```

g# = 0!
scale# = 0!
ANORM# = 0!
FOR i = 1 TO n
  l = i + 1
  rv1(l) = scale# * g#
  g# = 0!
  s# = 0!
  scale# = 0!
  IF (l <= m) THEN
    FOR k = 1 TO m
      scale# = scale# + ABS(U(k, l))
    NEXT k
    IF (scale# <> 0!) THEN
      FOR k = 1 TO m
        U(k, l) = U(k, l) / scale#
        s# = s# + U(k, l) ^ 2
      NEXT k
    END IF
  END IF
NEXT i

```

```

NEXT k
f# = U(1, 1)
g# = -SQR(s#) * SGN(f#)
h# = f# * g# - s#
U(1, 1) = f# - g#
IF (1 <> n) THEN
  FOR j = 1 TO n
    s# = 0!
    FOR k = 1 TO m
      s# = s# + U(k, 1) * U(k, j)
    NEXT k
    f# = s# / h#
    FOR k = 1 TO m
      U(k, j) = U(k, j) + f# * U(k, 1)
    NEXT k
  NEXT j
END IF
FOR k = 1 TO m
  U(k, 1) = scale# * U(k, 1)
NEXT k
END IF
END IF
w(1) = scale# * g#
g# = 0!
s# = 0!
scale# = 0!
IF ((1 <= m) AND (1 <> n)) THEN
  FOR k = 1 TO n
    scale# = scale# + ABS(U(1, k))
  NEXT k
  IF (scale# <> 0!) THEN
    FOR k = 1 TO n
      U(1, k) = U(1, k) / scale#
      s# = s# + U(1, k) ^ 2
    NEXT k
    f# = U(1, 1)
    g# = -SQR(s#) * SGN(f#)
    h# = f# * g# - s#
    U(1, 1) = f# - g#
    FOR k = 1 TO n
      rv1(k) = U(1, k) / h#
    NEXT
  IF (1 <> m) THEN
    FOR j = 1 TO m
      s# = 0!

```

```

FOR k = 1 TO n
  s# = s# + U(j, k) * U(i, k)
NEXT k
FOR k = 1 TO n
  U(j, k) = U(j, k) + s# * rv1(k)
NEXT k
NEXT j
END IF
FOR k = 1 TO n
  U(i, k) = scale# * U(i, k)
NEXT k
END IF
END IF
IF (ANORM# >= (ABS(w(i)) + ABS(rv1(i)))) THEN
  ANORM# = ANORM#
ELSE
  ANORM# = (ABS(w(i)) + ABS(rv1(i)))
END IF
NEXT i
FOR i = n TO 1 STEP -1
  IF (i < n) THEN
    IF (g# <> 0) THEN
      FOR j = 1 TO n
        v(j, i) = (U(i, j) / U(i, i)) / g#
      NEXT j
      FOR j = 1 TO n
        s# = 0
        FOR k = 1 TO n
          s# = s# + U(i, k) * v(k, j)
        NEXT k
        FOR k = 1 TO n
          v(k, j) = v(k, j) + s# * v(k, i)
        NEXT k
      NEXT j
    END IF
    FOR j = 1 TO n
      v(i, j) = 0
      v(j, i) = 0
    NEXT j
  END IF
  v(i, i) = 1
  g# = rv1(i)
  i = i
NEXT i
FOR i = n TO 1 STEP -1

```

```

1 = 1 + 1
g# = w(1)
IF (1 < n) THEN
  FOR j = 1 TO n
    U(1, j) = 0!
  NEXT j
END IF
IF (g# <> 0!) THEN
  g# = 1! / g#
  IF (1 <> n) THEN
    FOR j = 1 TO n
      s# = 0!
      FOR k = 1 TO m
        s# = s# + U(k, 1) * U(k, j)
      NEXT k
      f# = (s# / U(1, 1)) * g#
      FOR k = 1 TO m
        U(k, j) = U(k, j) + f# * U(k, 1)
      NEXT k
    NEXT j
  END IF
  FOR j = 1 TO m
    U(j, 1) = U(j, 1) * g#
  NEXT j
ELSE
  FOR j = 1 TO m
    U(j, 1) = 0!
  NEXT j
END IF
U(1, 1) = U(1, 1) + 1!
NEXT
FOR k = n TO 1 STEP -1
  FOR ITS = 1 TO 30
    FOR l = k TO 1 STEP -1
      NM = l - 1
      IF ((ABS(rv1(l)) + ANORM#) = ANORM#) THEN GOTO 2
      IF ((ABS(w(NM)) + ANORM#) = ANORM#) THEN GOTO 1
    NEXT l
1 C# = 0!
  s# = 1!
  FOR l = 1 TO k
    f# = s# * rv1(l)
    IF ((ABS(f#) + ANORM#) <> ANORM#) THEN
      g# = w(l)
      h# = SQR(f# ^ 2 + g# ^ 2)

```

```

w(l) = h#
h# = 1l / h#
C# = (g# * h#)
s# = -(f# * h#)
FOR j = 1 TO m
  y# = U(j, NM)
  Z# = U(j, l)
  U(j, NM) = (y# * C#) + (Z# * s#)
  U(j, l) = -(y# * s#) + (Z# * C#)
NEXT j
END IF
NEXT l
2 Z# = w(k)
IF (l = k) THEN
  IF (Z# < 0l) THEN
    w(k) = -Z#
    FOR j = 1 TO n
      v(j, k) = -v(j, k)
    NEXT j
  END IF
  GOTO 3
END IF
IF (ITS = 30) THEN PRINT "NO CONVERG IN 30 ITERATION"
x# = w(l): NM = k - 1: y# = w(NM): g# = rv1(NM): h# = rv1(k)
f# = ((y# - Z#) * (y# + Z#) + (g# - h#) * (g# + h#)) / (2l * h# * y#)
g# = SQR(f# ^ 2 + 1l)
f# = ((x# - Z#) * (x# + Z#) + h# * ((y# / (f# + ABS(g#) * SGN(f#)) - h#)) / x#
C# = 1l: s# = 1l
FOR j = 1 TO NM
  l = j + 1
  g# = rv1(l): y# = w(l): h# = s# * g#: g# = C# * g#
  Z# = SQR(f# ^ 2 + h# ^ 2): rv1(j) = Z#: C# = f# / Z#
  s# = h# / Z#: f# = (x# * C#) + (g# * s#): g# = -(x# * s#) + (g# * C#)
  h# = y# * s#: y# = y# * C#
  FOR jj = 1 TO n
    x# = v(jj, j): Z# = v(jj, l): v(jj, j) = (x# * C#) + (Z# * s#)
    v(jj, l) = -(x# * s#) + (Z# * C#)
  NEXT jj
  Z# = SQR(f# ^ 2 + h# ^ 2): w(j) = Z#
  IF (Z# <> 0l) THEN
    Z# = 1l / Z#: C# = f# * Z#: s# = h# * Z#
  END IF
  f# = (C# * g#) + (s# * y#): x# = -(s# * g#) + (C# * y#)
  FOR jj = 1 TO m
    y# = U(jj, j): Z# = U(jj, l): U(jj, j) = (y# * C#) + (Z# * s#)

```



```

    U(j, i) = -(y# * s#) + (Z# * C#)
  NEXT jj
NEXT j
rv1(i) = 0!: rv1(k) = f#: w(k) = x#
NEXT
3
NEXT

```

```

wmax = 0
FOR j = 1 TO n
  IF w(j) > wmax THEN wmax = w(j)
NEXT j
wmin = wmax * .000001
FOR j = 1 TO n
  IF w(j) < wmin THEN w(j) = 0
NEXT j

```

```

FOR j = 1 TO n
  s# = 0!
  IF (w(j) <> 0) THEN
    FOR i = 1 TO n
      s# = s# + U(i, j) * b(i)
    NEXT i
    s# = s# / w(j)
  END IF
  tmp(j) = s#
NEXT j
FOR j = 1 TO n
  s# = 0!
  FOR jj = 1 TO n
    s# = s# + v(j, jj) * tmp(jj)
  NEXT jj
  x(j) = s#
NEXT j

```

```

FOR i = 1 TO n1
  COLOR INT(RND * 10) + 1
  FOR j = 1 TO n1
    IF j MOD (n1) = 0 THEN
      'print D(i, j): 'print ;
    ELSE
      'print D(i, j);
    END IF
  NEXT j
NEXT i

```

```

FOR i = 1 TO n1
  FOR j = 1 TO n1
    hal# = hal# + C(i, j) * x(j)
  NEXT j
  COLOR INT(RND * 10) + 1
  PRINT "x"; i; "="; x(i); hal# - b(i); w(i)
  PRINT #1, x(i); w(i); hal# - b(i)
  LPRINT x(i); hal# - b(i), w(i)
  IF i MOD 22 = 0 THEN
    PRINT "press any key to continue"
    INPUT hall
  END IF
  IF ABS(hal# - b(i)) > .00001 THEN
    ON PLAY(10) GOSUB replay
    FElise$ = "o3 L8 E D+ E D+ E o2 B o3 D C L2 o2 A"
    PLAY "MB X" + VARPTR$(FElise$)
    GOSUB background
  replay:
  background:
    INPUT hall
  END IF
  hal# = 0
NEXT i
INPUT hall

```

```

a# = 50: x0# = k# * a#
SCREEN 12: xmin = 0: xmax = a#: ymin = -2: ymax = 2
xscale = (xmax - xmin) / 20: yscale = (ymax - ymin) / 20
VIEW (1, 1)-(638, 460), 9, 2: WINDOW (xmin, ymin)-(xmax, ymax)
FOR xs = xmin TO xmax STEP xscale
  IF ABS(xs) <= xscale / 100 THEN
    LINE (xs, ymin)-(xs, ymax), 0
  ELSE
    LINE (xs, ymin)-(xs, ymax), 8, , &H7777
  END IF
NEXT xs
FOR ys = ymin TO ymax STEP yscale
  IF ABS(ys) <= yscale / 100 THEN
    LINE (xmin, ys)-(xmax, ys), 0
  ELSE
    LINE (xmin, ys)-(xmax, ys), 8, , &H7777
  END IF
NEXT ys
nmax = 100: D# = Pi# / nmax: rc1 = .0007: rc2 = .09: m = 0

```

```

FOR i = 2 TO n1
  FOR r# = 0 TO a# STEP .1
    FOR j = 1 TO n1
      nokh1# = COS(k# * r# * COS(rn1(i) - rn2(i, j)))
      'nokh2# = COS(k# * r# * SIN(rn1(i)) * SIN(rn2(i, j)))
      sal# = sal# + nokh1# * x(j)
    NEXT j
    CIRCLE (r#, sal#), rc1, 11
    'LPRINT sal#
    sal# = 0
  NEXT r#
NEXT i
FOR x# = 0 TO a# STEP .01
  FOR n = 1 TO nmax
    y# = COS(m * D# * n - x0# / a# * x# * SIN(n * D#)) * D# * 1 / Pi#
    s# = s# + y#
  NEXT
  x1# = x0# / a# * x# / 3
  j01# = 1 - 2.2499997# * x1# ^ 2 + 1.2656208# * x1# ^ 4
  j02# = -.3163866# * x1# ^ 6 + .0444479 * x1# ^ 8
  j03# = -.039444# * x1# ^ 10 + .00021# * x1# ^ 12
  j0# = j01# + j02# + j03#
  CIRCLE (x#, s#), rc2, 4
  'CIRCLE (x#, j0#), rc2, 10
  'LPRINT j0#; s#
  s# = 0
NEXT
'COLOR 14: LOCATE 16, 2: PRINT "k="; k#: LOCATE 18, 2: PRINT "n="; n1
'ERASE U, w, v, b, x, rv1, tmp, D, C, rn1, rn2
10 END

```

به دلیل عدم مدیریت صحیح سیستم عامل MS-DOS، حتی با انتخاب دینامیکی آرایه‌ها، در حمایت از زبان برنامه نویسی QUICK BASIC جهت استفاده از حافظه بسط یافته رایانه، سیستم عامل WINDOWS را که در استفاده از هر گونه حافظه رایانه موفق عمل می کند بر می گزینیم، که این مستلزم انتخاب زبان برنامه نویسی دیگری است. پس با زبان برنامه نویسی VISUAL BASIC FOR WINDOWS [۴۳] و با روش SVD توابع موج دستگاه کره را به ازای انرژی داده شده، که تعیین کننده حالت دستگاه است، در چند جهت مختلف با توابع موج دقیق حاصل از حل انتگرالی (۳-۳-۱) مقایسه می کنیم. انرژی دقیق با انطباق آنها بر یکدیگر بدست خواهد آمد.

لازم به ذکر است که برنامه زیر یک Sub Rutine از یک برنامه Main که مدیریت چند Sub Rutine دیگر را بعهده دارد می باشد، که به دلیل اشغال کمتر حجم از آوردن آنها در اینجا صرف نظر شده است.

پس برای اجرای برنامه زیر مستقل از Main و Sub Rutine های وابسته به آن تمام FORM ها را باید به FORM ی که در آن کار می شود تبدیل نمود. مثلاً اگر در FORM1 باشیم باید دستور `form1.DrawWidth` به `form5.DrawWidth` تبدیل شود. از اصلاحات دیگر که با مطالعه برنامه بدیهی خواهند بود صرف نظر می شود.

برنامه (۵)

```
Sub Command3D1_Click ()
'INPUT "Filename"; A$
'Open A$ For Output As #1
form5.Cls: a# = 1: pi# = 4 * Atn(1#): k1# = Val(text8): x0# = k1#
n1 = Val(text7): n = n1: m = n1: nmax = n1
If n1 >= 70 Then msg = MsgBox("This Work Is Needed to left Long Time", 5)
If msg = 4 Or msg = 0 Then
Load form5: form5.Show
Load form6: form6.Show
Dim U() As Double, w() As Double
Dim v() As Double, B() As Double, x() As Double
Dim rv1() As Double, tmp() As Double
Dim D() As Double, C() As Double
Dim rn1() As Double, rn2() As Double
ReDim U(n, n) As Double, w(n) As Double
ReDim v(n, n) As Double, B(n) As Double, x(n) As Double
ReDim rv1(nmax) As Double, tmp(nmax) As Double
ReDim D(n1, n1) As Double, C(n1, n1) As Double
ReDim rn1(n1) As Double, rn2(n1, n1) As Double
For j = 1 To n1
D(1, j) = 1
C(1, j) = D(1, j)
Next j
For i = 2 To n1
'RANDOMIZE TIMER
'rn1(i) = RND * (Pi# / 2)
rn1(i) = pi# / (1 * n1) * i
For j = 1 To n1
'rn2(i, j) = RND * (Pi#)
rn2(i, j) = pi# / n1 * j
nokh1# = Cos(k1# * a# * Cos(rn1(i) - rn2(i, j))) * Sin(Abs(rn1(i) - rn2(i, j)))
'nokh2# = COS(k1# * A# * SIN(rn1(i)) * SIN(rn2(i, j)))
D(i, j) = nokh1#
C(i, j) = D(i, j)
Next j
Next i
B(1) = pi# / 2
```

```

For i = 2 To n1
  B(i) = 0
Next i
For i = 1 To n1
  For j = 1 To n1
    If j Mod (n1) = 0 Then
      'COLOR 10: 'form5.print D(i, j): 'form5.print ;
      'form5.print #1, D(i, j)
    Else
      'form5.print D(i, j);
      'form5.print #1, D(i, j)
    End If
  Next j
Next i

```

```

For i = 1 To n
  For j = 1 To n
    U(i, j) = D(i, j)
  Next j
Next i

```

```

g# = 0!
scal# = 0!
ANORM# = 0!
For i = 1 To n
  l = l + 1
  rv1(l) = scal# * g#
  g# = 0!
  s# = 0!
  scal# = 0!
  If (l <= m) Then
    For k = 1 To m
      scal# = scal# + Abs(U(k, l))
    Next k
    If (scal# <> 0!) Then
      For k = 1 To m
        U(k, l) = U(k, l) / scal#
        s# = s# + U(k, l) ^ 2
      Next k
      f# = U(1, l)
      g# = -Sqr(s#) * Sgn(f#)
      h# = f# * g# - s#
      U(1, l) = f# - g#
      If (l <> n) Then
        For j = 1 To n

```

```

s# = 0!
For k = 1 To m
    s# = s# + U(k, 1) * U(k, j)
Next k
f# = s# / h#
For k = 1 To m
    U(k, j) = U(k, j) + f# * U(k, 1)
Next k
Next j
End If
For k = 1 To m
    U(k, 1) = scal# * U(k, 1)
Next k
End If
End If
w(1) = scal# * g#
g# = 0!
s# = 0!
scal# = 0!
If ((1 <= m) And (1 <> n)) Then
    For k = 1 To n
        scal# = scal# + Abs(U(1, k))
    Next k
    If (scal# <> 0!) Then
        For k = 1 To n
            U(1, k) = U(1, k) / scal#
            s# = s# + U(1, k) ^ 2
        Next k
        f# = U(1, 1)
        g# = -Sqr(s#) * Sgn(f#)
        h# = f# * g# - s#
        U(1, 1) = f# - g#
        For k = 1 To n
            rv1(k) = U(1, k) / h#
        Next
        If (1 <> m) Then
            For j = 1 To m
                s# = 0!
                For k = 1 To n
                    s# = s# + U(j, k) * U(1, k)
                Next
                For k = 1 To n
                    U(j, k) = U(j, k) + s# * rv1(k)
                Next k
            Next j
        End If
    End If
End If

```



```

End If
For k = 1 To n
  U(i, k) = scal# * U(i, k)
Next k
End If
End If
If (ANORM# >= (Abs(w(i)) + Abs(rv1(i)))) Then
  ANORM# = ANORM#
Else
  ANORM# = (Abs(w(i)) + Abs(rv1(i)))
End If
Next i
For i = n To 1 Step -1
  If (i < n) Then
    If (g# <> 0) Then
      For j = 1 To n
        v(j, i) = (U(i, j) / U(i, i)) / g#
      Next j
      For j = 1 To n
        s# = 0
        For k = 1 To n
          s# = s# + U(i, k) * v(k, j)
        Next k
        For k = 1 To n
          v(k, j) = v(k, j) + s# * v(k, i)
        Next k
      Next j
    End If
    For j = 1 To n
      v(i, j) = 0
      v(j, i) = 0
    Next j
  End If
  v(i, i) = 1
  g# = rv1(i)
  i = i
Next i
For i = n To 1 Step -1
  i = i + 1
  g# = w(i)
  If (i < n) Then
    For j = 1 To n
      U(i, j) = 0
    Next j
  End If

```

```

If (g# <> 0!) Then
  g# = 1! / g#
  If (l <> n) Then
    For j = 1 To n
      s# = 0!
      For k = 1 To m
        s# = s# + U(k, l) * U(k, j)
      Next k
      f# = (s# / U(l, l)) * g#
      For k = 1 To m
        U(k, j) = U(k, j) + f# * U(k, l)
      Next k
    Next j
  End If
  For j = 1 To m
    U(j, l) = U(j, l) * g#
  Next j
Else
  For j = 1 To m
    U(j, l) = 0!
  Next j
End If
U(l, l) = U(l, l) + 1!
Next
For k = n To 1 Step -1
  For ITS = 1 To 30
    For l = k To 1 Step -1
      NM = 1 - 1
      If ((Abs(rv1(l)) + ANORM#) = ANORM#) Then GoTo 2
      If ((Abs(w(NM)) + ANORM#) = ANORM#) Then GoTo 1
    Next l
  1 c1# = 0!
  s# = 1!
  For l = 1 To k
    f# = s# * rv1(l)
    If ((Abs(f#) + ANORM#) <> ANORM#) Then
      g# = w(l)
      h# = Sqr(f# ^ 2 + g# ^ 2)
      w(l) = h#
      h# = 1! / h#
      c1# = (g# * h#)
      s# = -(f# * h#)
    End If
    For j = 1 To m
      y# = U(j, NM)
      z# = U(j, l)
    Next j
  Next l
Next ITS
Next k

```

```

    U(j, NM) = (y# * c1#) + (Z# * s#)
    U(j, 1) = -(y# * s#) + (Z# * c1#)
  Next j
End If
Next i
2 Z# = w(k)
If (l = k) Then
  If (Z# < 0) Then
    w(k) = -Z#
    For j = 1 To n
      v(j, k) = -v(j, k)
    Next j
  End If
  GoTo 3
End If
If (ITS = 30) Then form5.Print "NO CONVERG IN 30 ITERATION"
x1# = w(1)
NM = k - 1
y# = w(NM)
g# = rv1(NM)
h# = rv1(k)
f# = ((y# - Z#) * (y# + Z#) + (g# - h#) * (g# + h#)) / (2 * h# * y#)
g# = Sqr(f# ^ 2 + 1)
f# = ((x1# - Z#) * (x1# + Z#) + h# * ((y# / (f# + Abs(g#) * Sgn(f#))) - h#)) / x1#
c1# = 1
s# = 1
For j = 1 To NM
  l = j + 1
  g# = rv1(l)
  y# = w(l)
  h# = s# * g#
  g# = c1# * g#
  Z# = Sqr(f# ^ 2 + h# ^ 2)
  rv1(j) = Z#
  c1# = f# / Z#
  s# = h# / Z#
  f# = (x1# * c1#) + (g# * s#)
  g# = -(x1# * s#) + (g# * c1#)
  h# = y# * s#
  y# = y# * c1#
  For jj = 1 To n
    x1# = v(jj, j)
    Z# = v(jj, l)
    v(jj, j) = (x1# * c1#) + (Z# * s#)
    v(jj, l) = -(x1# * s#) + (Z# * c1#)
  Next jj
Next j

```

```

Next jj
Z# = Sqr(f# ^ 2 + h# ^ 2)
w(j) = Z#
If (Z# <> 0) Then
  Z# = 1 / Z#
  c1# = f# * Z#
  s# = h# * Z#
End If
f# = (c1# * g#) + (s# * y#)
x1# = -(s# * g#) + (c1# * y#)
For jj = 1 To m
  y# = U(jj, j)
  Z# = U(jj, l)
  U(jj, j) = (y# * c1#) + (Z# * s#)
  U(jj, l) = -(y# * s#) + (Z# * c1#)
Next jj
Next j
rv1(l) = 0
rv1(k) = f#
w(k) = x1#
Next

```

3

```

Next

```

```

wmax = 0
For j = 1 To n
  If w(j) > wmax Then wmax = w(j)
Next j
wmin = wmax * .000001
For j = 1 To n
  If w(j) < wmin Then w(j) = 0
Next j

```

```

For j = 1 To n
  s# = 0
  If (w(j) <> 0) Then
    For l = 1 To n
      s# = s# + U(l, j) * B(l)
    Next l
    s# = s# / w(j)
  End If
  tmp(j) = s#
Next j
For j = 1 To n
  s# = 0

```

```

For j = 1 To n
    s# = s# + v(j, j) * tmp(j)
Next j
x(j) = s#
Next j

```

```

form6.Hide
For i = 1 To n1
    For j = 1 To n1
        If j Mod (n1) = 0 Then
            'form5.print D(i, j): 'form5.print ;
        Else
            'form5.print D(i, j);
        End If
    Next j
Next i

```

```

For i = 1 To n1
    For j = 1 To n1
        hal# = hal# + C(i, j) * x(j)
    Next j
    'form5.Print "x"; i; "="; x(i); hal# - b(i); w(i)
    'form5.print #1, x(i); w(i); hal# - b(i)
    'Lform5.print x(i); hal# - b(i), w(i)
    If i Mod 22 = 0 Then
        'form5.Print "press any key to continue"
        'msgbox ("Click OK Key to Continuu,Pleas")
    End If
    If Abs(hal# - B(i)) > .00001 Then
        'On PLAY(10) GoSub replay
        FElise$ = "o3 L8 E D+ E D+ E o2 B o3 D C L2 o2 A"
        'PLAY "MB X" + VARPTR$(FElise$)
        'GoSub background
        'replay:
        'background:
        'msgbox ("Click OK Key to Continuu,Pleas")
    End If
    hal# = 0
Next i
'msgbox ("Click OK Key to Continuu,Pleas")

```

```

form5.Cls: a# = Val(text9): x0# = k1# * a#
'SCREEN 12:
xmin = 0: xmax = a#: ymin = -1: ymax = 1
elpx = xmax / 2.5: elpy = ymax / 2.5: ex = xmax / 3: ey = ymax / 8

```

```

xscale = (xmax - xmin) / 4: yscale = (ymax - ymin) / 4
'VIEW (1, 1)-(638, 460), 9, 2:
form5.Scale (xmin - elpx, ymax + elpy)-(xmax + elpx, ymin - elpy)
form5.DrawWidth = 1: form5.DrawStyle = 3
For xs = xmin To xmax Step xscale
    form5.Line (xs, ymin)-(xs, ymax), RGB(10, 10, 50)
Next xs
For ys = ymin To ymax Step yscale
    form5.Line (xmin, ys)-(xmax, ys), RGB(10, 50, 10)
Next ys
form5.DrawWidth = 2: form5.DrawStyle = 0
form5.Line (xmin, ymax)-(xmax, ymin), , B
Yml = ymin
For ei = 1 To 5
    form5.CurrentX = xmin - ex / 2
    form5.CurrentY = ymin + ey / 2 + yscal: form5.Print Yml
    Yml = Yml + yscale
    yscal = yscal + yscale
Next ei

Xml = xmin
For ei = 1 To 5
    form5.CurrentY = ymin - ey / 2
    form5.CurrentX = xmin - ex / 6 + Xscal: form5.Print Xml
    Xml = Xml + xscale * Int(k1# * 100) / 100
    Xscal = Xscal + xscale
Next ei

nmax = 100!: D1# = pi# / nmax: m = 0
form5.DrawWidth = 2

For i = 2 To 2
    For r# = 0 To a# Step .002 * a#
        sal# = 0
        For j = 1 To n1
            nokh1# = Cos(k1# * r# * Cos(rn1(i) - rn2(i, j))) * Sin(Abs(rn1(i) - rn2(j, j)))
            sal# = sal# + nokh1# * x(j)
        Next j
        form5.PSet (r#, sal#), QBColor(9)
        'Lform5.print sal#
    Next r#
Next i

For x1# = .01 To a# Step .002 * a#
    s1# = 0

```



```

For n = 1 To nmax
y# = Cos(x0# / a# * x1# * Cos(n * pi# / nmax)) * Sin(n * pi# / nmax) * pi# / (2 * nmax)
s1# = s1# + y#
Next n
form5.PSet (x1#, s1#), QBColor(13)
j0# = Sin(k1# * x1#) / (k1# * x1#)
'Lform5.print j0#; s1#
Next x1#
For x1# = .01 To a# Step .002 * a#
j0# = Sin(k1# * x1#) / (k1# * x1#)
form5.PSet (x1#, j0#), QBColor(10)
Next x1#

'Lform5.print j0#; a#

```

```

Erase U, w, v, B, x, rv1, tmp, D, C, rn1, rn2
10
'End
End If
End Sub

```

برنامه های (۴) و (۵) انرژی دستگاه را با حدس و خطا تعیین می کنند، این عمل برای دستگاه استادیوم دوار که از انرژیهای دقیق آن اطلاع نداریم بسیار مشکل است، به همین دلیل سعی و خطاهای انجام شده در برنامه های قبلی را باید با توجه به فیزیک مساله به الگوریتمی قابل اجرا در آوریم. علی رغم قابلیت های فراوان زبان برنامه نویسی **VISUAL BASIC FOR WINDOWS** اجرای برنامه زیر با الگوریتم اخیر توسط آن با کندی فراوان صورت می پذیرد، و چون زبان برنامه نویسی **C++** نیز در سرعت بخشیدن به اجرای برنامه کار ساز نشد، ناچاراً آن را به زبان **FORTRAN** تبدیل نمودیم. برنامه زیر ترازهای انرژی دستگاه استادیوم دوار را با تعیین محدوده مناسب بدست خواهد داد.

برنامه (۶)

```

Implicit real*8(a-h,o-z)
Dimension swb(21),tkm(21),u(110,110),w(110)
dimension B(110),x(110),rv1(110),tmp(110)
Dimension rn1(110),rn2(110),rs(110)
Dimension v(110,110)
pi=4.d0*datan(1.d0)
eta0=.1
do 1234 eta=eta0,.23,.01
n=110
m=n
a=(2.d0/(3.d0*eta+2.d0))**(1.d0/3.d0)
tla=a*eta

```

```

mnp=1
mnp=2*mnp-1
tks=dsqrt((2.4048285301 /a)**2+(mnp*pi/(2.d0*(tls+a)))**2)
tke=dsqrt((2.4048285301 /a)**2+(mnp*pi/(2.d0*tls))**2)
write(6,*)'tks=',tks,'tke=',tke,'eta=',eta
tks=3d0
tke=5d0
stpp=.1d0
te0=datan(a/tls)
do 500 j=1,n
  rn2(j)=pi*j/n
  rn1(j)=pi*j/n
  if((rn1(j).ge.te0).and.(rn1(j).le.(pi-te0)))then
    rs(j)=a/sin(rn1(j))
  else
    rs(j)=tls*dabs(cos(rn1(j)))+dsqrt(a**2-(tls*dabsin(rn1(j)))**2)
  endif
500 continue
  b(1)=1.d0
  do 800 j=2,n
    b(j)=0.D0
800 continue

  lll=0
  do 100 jjj = 1 ,6
    do 200 tk1 = tks,tke,stpp
      lll = lll + 1
      do 400 j =1,n
        U(1,j)=dcos(rn2(j))
400 continue
        do 600 l= 2,n
          do 700 j= 1,n
            x1=tk1*rs(l)*dsin(rn1(l))*dcos(rn2(j))
            if(dabs(x1).le.3)then
              x2=x1/3.d0
              tj01=1.d0-2.2499997d0*x2**2+1.2656208d0*x2**4
              tj02=-.3163866d0*x2**6+.0444479d0*x2**8
              tj03=-.0039444d0*x2**10+.00021d0*x2**12
              tj0=tj01+tj02+tj03
            else
              x3=3.d0/dabs(x1)
              f01=0.79788456d0-0.00000077d0*x3-.00552740d0*x3**2
              f02=-0.00009512d0*x3**3+.00137237d0*x3**4
              f03=-.00072805d0*x3**5+.00014476d0*x3**6
              f0=f01+f02+f03
            endif
          endif
        endif
      endif
    endif
  endif

```

```

teta01=x1-.78539816d0-.04166397d0*x3-.00003954d0*x3**2
teta02=.00262573d0*x3**3-.00054125d0*x3**4
teta03=-.00029333d0*x3**5+.00013558d0*x3**6
teta0=teta01+teta02+teta03
tj0=dsqrt(1.d0/dabs(x1))*f0*dcos(teta0)
endif
flj=dcos(rn2(j))
U(i,j)=dCos(tk1*rs(i)*dCos(rn1(i))*dsin(rn2(j)))*flj*tj0
700 continue
600 continue

```

```

G=0.0
SCALE=0.0
ANORM=0.0
DO 25 I=1,N
L=I+1
RV1(I)=SCALE*G
G=0.0
S=0.0
SCALE=0.0
IF(I.LE.M)THEN
DO 11 K=I,M
SCALE=SCALE+DABS(U(K,I))
11 CONTINUE
IF(SCALE.NE.0.0)THEN
DO 12 K=I,M
U(K,I)=U(K,I)/SCALE
S=S+U(K,I)*U(K,I)
12 CONTINUE
F=U(I,I)
G=-DSIGN(DSQRT(S),F)
H=F*G-S
U(I,I)=F-G
IF(I.NE.N)THEN
DO 15 J=L,N
S=0.0
DO 13 K=I,M
S=S+U(K,I)*U(K,J)
13 CONTINUE
F=S/H
DO 14 K=I,M
U(K,J)=U(K,J)+F*U(K,I)
14 CONTINUE
15 CONTINUE
ENDIF

```

```

DO 16 K=1,M
U(K,I)=SCALE*U(K,I)
16 CONTINUE
ENDIF
ENDIF
W(I)=SCALE*G
G=0.0
S=0.0
SCALE=0.0
IF((I.LE.M).AND.(I.NE.N))THEN
DO 17 K=L,N
SCALE=SCALE+DABS(U(I,K))
17 CONTINUE
IF(SCALE.NE.0.0)THEN
DO 18 K=L,N
U(I,K)=U(I,K)/SCALE
S=S+U(I,K)*U(I,K)
18 CONTINUE
F=U(I,L)
G=-DSIGN(DSQRT(S),F)
H=F*G-S
U(I,L)=F-G
DO 19 K=L,N
RV1(K)=U(I,K)/H
19 CONTINUE
IF(I.NE.M)THEN
DO 23 J=L,M
S=0.0
DO 21 K=L,N
S=S+U(J,K)*U(I,K)
21 CONTINUE
DO 22 K=L,N
U(J,K)=U(J,K)+S*RV1(K)
22 CONTINUE
23 CONTINUE
ENDIF
DO 24 K=L,N
U(I,K)=SCALE*U(I,K)
24 CONTINUE
ENDIF
ENDIF
ANORM=MAX(ANORM,(DABS(W(I))+DABS(RV1(I))))
25 CONTINUE
DO 32 I=N,1,-1
IF(I.LT.N)THEN

```

```

      IF(G.NE.0.0)THEN
      DO 26 J=L,N
      V(J,I)=(U(I,J)/U(I,L))/G
26  CONTINUE
      DO 29 J=L,N
      S=0.0
      DO 27 K=L,N
      S=S+U(I,K)*V(K,J)
27  CONTINUE
      DO 28 K=L,N
      V(K,J)=V(K,J)+S*V(K,I)
28  CONTINUE
29  CONTINUE
      ENDIF
      DO 31 J=L,N
      V(I,J)=0.0
      V(J,I)=0.0
31  CONTINUE
      ENDIF
      V(I,I)=1.0D0
      G=RV1(I)
      L=I
32  CONTINUE
      DO 39 I=N,1,-1
      L=I+1
      G=W(I)
      IF(I.LT.N)THEN
      DO 33 J=L,N
      U(I,J)=0.0
33  CONTINUE
      ENDIF
      IF(G.NE.0.0)THEN
      G=1.0D0/G
      IF(L.NE.N)THEN
      DO 36 J=L,N
      S=0.0
      DO 34 K=L,M
      S=S+U(K,I)*U(K,J)
34  CONTINUE
      F=(S/U(I,I))*G
      DO 35 K=I,M
      U(K,J)=U(K,J)+F*U(K,I)
35  CONTINUE
36  CONTINUE
      ENDIF

```

```

      DO 37 J=1,M
      U(J,I)=U(J,I)*G
37  CONTINUE
      ELSE
      DO 38 J=1,M
      U(J,I)=0.0
38  CONTINUE
      ENDIF
      U(I,I)=U(I,I)+1.0D0
39  CONTINUE
      DO 49 K=N,1,-1
      DO 48 ITS=1,30
      DO 41 L=K,1,-1
      NM=L-1
      IF((DABS(RV1(L))+ANORM).EQ.ANORM)GO TO 2
      IF((DABS(W(NM))+ANORM).EQ.ANORM)GO TO 1
41  CONTINUE
1   C=0.0
      S=1.0D0
      DO 43 I=L,K
      F=S*RV1(I)
      IF((DABS(F)+ANORM).NE.ANORM)THEN
      G=W(I)
      H=DSQRT(F*F+G*G)
      W(I)=H
      H=1.0D0/H
      C=(G*H)
      S=-(F*H)
      DO 42 J=1,M
      Y=U(J,NM)
      Z=U(J,I)
      U(J,NM)=(Y*C)+(Z*S)
      U(J,I)=-(Y*S)+(Z*C)
42  CONTINUE
      ENDIF
43  CONTINUE
2   Z=W(K)
      IF(L.EQ.K)THEN
      IF(Z.LT.0.0)THEN
      W(K)=-Z
      DO 44 J=1,N
      V(J,K)=-V(J,K)
44  CONTINUE
      ENDIF
      GO TO 3

```



```

ENDIF
IF(ITS.EQ.30)PRINT*, 'NO CONVERG IN 30 ITERATION'
X1=W(L)
NM=K-1
Y=W(NM)
G=RV1(NM)
H=RV1(K)
F=((Y-Z)*(Y+Z)+(G-H)*(G+H))/(2.0D0*H*Y)
G=DSQRT(F*F+1.0)
F=((X1-Z)*(X1+Z)+H*((Y/(F+DSIGN(G,F)))-H))/X1
C=1.0D0
S=1.0D0
DO 47 J=L,NM
  I=J+1
  G=RV1(I)
  Y=W(I)
  H=S*G
  G=C*G
  Z=DSQRT(F*F+H*H)
  RV1(J)=Z
  C=F/Z
  S=H/Z
  F=(X1*C)+(G*S)
  G=-(X1*S)+(G*C)
  H=Y*S
  Y=Y*C
DO 45 JJ=1,N
  X1=V(JJ,J)
  Z=V(JJ,I)
  V(JJ,J)=(X1*C)+(Z*S)
  V(JJ,I)=-(X1*S)+(Z*C)
45 CONTINUE
  Z=DSQRT(F*F+H*H)
  W(J)=Z
  IF(Z.NE.0.0)THEN
    Z=1.0D0/Z
    C=F*Z
    S=H*Z
  ENDIF
  F=(C*G)+(S*Y)
  X1=-(S*G)+(C*Y)
DO 46 JJ=1,M
  Y=U(JJ,J)
  Z=U(JJ,I)
  U(JJ,J)=(Y*C)+(Z*S)

```

```

      U(JJ,I)=-{Y*S}+(Z*C)
46  CONTINUE
47  CONTINUE
      RV1(L)=0.0
      RV1(K)=F
      W(K)=X1
48  CONTINUE
3   CONTINUE
49  CONTINUE
      wmax=0.d0
      do 1000 j=1,n
        if(w(j).gt.wmax)wmax=w(j)
1000 continue
      wmin=wmax*.000001d0
      do 1001 j=1,n
        if(w(j).lt.wmin)w(j)=0.d0
1001 continue
      DO 120 J=1,N
        S=0.0
        IF(W(J).NE.0.0)THEN
          DO 110 I=1,M
            S=S+U(I,J)*B(I)
110  CONTINUE
          S=S/W(J)
          ENDIF
          TMP(J)=S
120  CONTINUE
          DO 140 J=1,N
            S=0.0
            DO 130 JJ=1,N
              S=S+V(J,JJ)*TMP(JJ)
130  CONTINUE
            X(J)=S
140  CONTINUE

```

```

      sal1= 0.d0
      do 802 j = 1,n
        sal1=sal1+x(j)*dcos(rn2(j))
802  continue
      swb(lil)=dAbs(sal1-1.d0)
      tkm(lil)=tk1
      Open(1,'c:\hall\stu\for\dat\s3n4e1.txt'
        ,access='append',status='unknown')
      write(1,*)tkm(lil),swb(lil)
      close(1)

```

```

200 continue
    smin=swb(1)
    do 803 i = 1,lli
        If(swb(i).le.smin)Then
            smin=swb(i)
            tkmin=tkm(i)
        Endif
803 continue
    Print*,tkmin,smin
    Open(1,'c:\hall\stu\for\dat\s3n4e1.txt'
    * ,access='append',status='unknown')
    write(1,*)'*****'
    write(1,*)tkmin, smin
    write(1,*)'*****'
    close(1)
    ili = 0
    tks=tkmin-stpp
    tke=tkmin+stpp
    stpp=stpp/10.d0
100 continue
    Open(2,'c:\hall\stu\for\dat\s3n4e1.dat'
    * ,access='append',status='unknown')
    write(2,*)eta,tkmin
    close(2)
1234 continue
    end

```

پس از تعیین انرژی یک حالت از دستگاه استادیوم دوار توسط برنامه (۶) با اجرای برنامه زیر می توان
صفرهای توابع موج این دستگاه آشوبی را بدست آورد.

برنامه (۷)

```

Implicit real*8(a-h,o-z)
Dimension u(510,510),w(510)
dimension B(510),x(510),rv1(510),tmp(510)
Dimension rn1(510),rn2(510),ra(510)
Dimension v(510,510),sal1(101),rsas(101)
pi=4.d0*datan(1.d0)
eta=1d0
n=510
m=n
a=(2.d0/(3.d0*eta+2.d0))**(1.d0/3.d0)
tis=a*eta
tk1=101.925599d0
te0=datan(a/tis)
do 500 j=1,n

```

```

rn2(j)=pi*j/n
rn1(j)=pi*j/n
if((rn1(j).ge.te0).and.(rn1(j).le.(pi-te0)))then
  rs(j)=a/sin(rn1(j))
else
  rs(j)=tis*dabs(cos(rn1(j)))+dsqrt(a**2-(tis*dabs(rn1(j)))**2)
endif
500 continue
b(1)=1.d0
do 800 j=2,n
  b(j)=0.D0
800 continue

do 400 j = 1,n
  U(1,j)=dcos(rn2(j))
400 continue
do 600 l= 2,n
  do 700 j= 1,n
    x1=tk1*rs(l)*dsin(rn1(l))*dcos(rn2(j))
    if(dabs(x1).le.3)then
      x2=x1/3.d0
      tj01=1.d0-2.2499997d0*x2**2+1.2656208d0*x2**4
      tj02=-.3163866d0*x2**6+.0444479d0*x2**8
      tj03=-.0039444d0*x2**10+.00021d0*x2**12
      tj0=tj01+tj02+tj03
    else
      x3=3.d0/dabs(x1)
      f01=0.79788456d0-0.00000077d0*x3-.00552740d0*x3**2
      f02=-0.00009512d0*x3**3+.00137237d0*x3**4
      f03=-.00072805d0*x3**5+.00014476d0*x3**6
      f0=f01+f02+f03
      teta01=x1-.78539816d0-.04166397d0*x3-.00003954d0*x3**2
      teta02=.00262573d0*x3**3-.00054125d0*x3**4
      teta03=-.00029333d0*x3**5+.00013558d0*x3**6
      teta0=teta01+teta02+teta03
      tj0=dsqrt(1.d0/dabs(x1))*f0*dcos(teta0)
    endif
    flj=dcos(rn2(j))
    U(l,j)=dCos(tk1*rs(l)*dCos(rn1(l))*dsin(rn2(j)))*flj*tj0
  700 continue
600 continue

G=0.0
SCALE=0.0
ANORM=0.0

```

```

DO 25 I=1,N
L=I+1
RV1(I)=SCALE*G
G=0.0
S=0.0
SCALE=0.0
IF(I.LE.M)THEN
DO 11 K=I,M
SCALE=SCALE+DABS(U(K,I))
11 CONTINUE
IF(SCALE.NE.0.0)THEN
DO 12 K=I,M
U(K,I)=U(K,I)/SCALE
S=S+U(K,I)*U(K,I)
12 CONTINUE
F=U(I,I)
G=-DSIGN(DSQRT(S),F)
H=F*G-S
U(I,I)=F-G
IF(I.NE.N)THEN
DO 15 J=L,N
S=0.0
DO 13 K=I,M
S=S+U(K,I)*U(K,J)
13 CONTINUE
F=S/H
DO 14 K=I,M
U(K,J)=U(K,J)+F*U(K,I)
14 CONTINUE
15 CONTINUE
ENDIF
DO 16 K=I,M
U(K,I)=SCALE*U(K,I)
16 CONTINUE
ENDIF
ENDIF
W(I)=SCALE*G
G=0.0
S=0.0
SCALE=0.0
IF((I.LE.M).AND.(I.NE.N))THEN
DO 17 K=L,N
SCALE=SCALE+DABS(U(I,K))
17 CONTINUE
IF(SCALE.NE.0.0)THEN

```

```

DO 25 I=1,N
L=I+1
RV1(I)=SCALE*G
G=0.0
S=0.0
SCALE=0.0
IF(I.LE.M)THEN
DO 11 K=1,M
SCALE=SCALE+DABS(U(K,I))
11 CONTINUE
IF(SCALE.NE.0.0)THEN
DO 12 K=1,M
U(K,I)=U(K,I)/SCALE
S=S+U(K,I)*U(K,I)
12 CONTINUE
F=U(I,I)
G=-DSIGN(DSQRT(S),F)
H=F*G-S
U(I,I)=F-G
IF(I.NE.N)THEN
DO 15 J=L,N
S=0.0
DO 13 K=1,M
S=S+U(K,I)*U(K,J)
13 CONTINUE
F=S/H
DO 14 K=1,M
U(K,J)=U(K,J)+F*U(K,I)
14 CONTINUE
15 CONTINUE
ENDIF
DO 16 K=1,M
U(K,I)=SCALE*U(K,I)
16 CONTINUE
ENDIF
ENDIF
W(I)=SCALE*G
G=0.0
S=0.0
SCALE=0.0
IF((I.LE.M).AND.(I.NE.N))THEN
DO 17 K=L,N
SCALE=SCALE+DABS(U(I,K))
17 CONTINUE
IF(SCALE.NE.0.0)THEN

```

```

DO 31 J=L,N
V(I,J)=0.0
V(J,I)=0.0
31 CONTINUE
ENDIF
V(I,I)=1.0D0
G=RV1(I)
L=I
32 CONTINUE
DO 39 I=N,1,-1
L=I+1
G=W(I)
IF(I.LT.N)THEN
DO 33 J=L,N
U(I,J)=0.0
33 CONTINUE
ENDIF
IF(G.NE.0.0)THEN
G=1.0D0/G
IF(I.NE.N)THEN
DO 36 J=L,N
S=0.0
DO 34 K=L,M
S=S+U(K,I)*U(K,J)
34 CONTINUE
F=(S/U(I,I))*G
DO 35 K=I,M
U(K,J)=U(K,J)+F*U(K,I)
35 CONTINUE
36 CONTINUE
ENDIF
DO 37 J=I,M
U(J,I)=U(J,I)*G
37 CONTINUE
ELSE
DO 38 J=I,M
U(J,I)=0.0
38 CONTINUE
ENDIF
U(I,I)=U(I,I)+1.0D0
39 CONTINUE
DO 49 K=N,1,-1
DO 48 ITS=1,30
DO 41 L=K,1,-1
NM=L-1

```



```

      IF((DABS(RV1(L))+ANORM).EQ.ANORM)GO TO 2
      IF((DABS(W(NM))+ANORM).EQ.ANORM)GO TO 1
41  CONTINUE
1   C=0.0
      S=1.0D0
      DO 43 I=L,K
      F=S*RV1(I)
      IF((DABS(F)+ANORM).NE.ANORM)THEN
      G=W(I)
      H=DSQRT(F*F+G*G)
      W(I)=H
      H=1.0D0/H
      C=(G*H)
      S=(F*H)
      DO 42 J=1,M
      Y=U(J,NM)
      Z=U(J,I)
      U(J,NM)=(Y*C)+(Z*S)
      U(J,I)=-(Y*S)+(Z*C)
42  CONTINUE
      ENDIF
43  CONTINUE
2   Z=W(K)
      IF(L.EQ.K)THEN
      IF(Z.LT.0.0)THEN
      W(K)=-Z
      DO 44 J=1,N
      V(J,K)=-V(J,K)
44  CONTINUE
      ENDIF
      GO TO 3
      ENDIF
      IF(ITS.EQ.30)PRINT*, 'NO CONVERG IN 30 ITERATION'
      X1=W(L)
      NM=K-1
      Y=W(NM)
      G=RV1(NM)
      H=RV1(K)
      F=((Y-Z)*(Y+Z)+(G-H)*(G+H))/(2.0D0*H*Y)
      G=DSQRT(F*F+1.0)
      F=((X1-Z)*(X1+Z)+H*((Y/(F+DSIGN(G,F))-H))/X1
      C=1.0D0
      S=1.0D0
      DO 47 J=L,NM
      I=J+1

```

```

G=RV1(I)
Y=W(I)
H=S*G
G=C*G
Z=DSQRT(F*F+H*H)
RV1(J)=Z
C=F/Z
S=H/Z
F=(X1*C)+(G*S)
G=-(X1*S)+(G*C)
H=Y*S
Y=Y*C
DO 45 JJ=1,N
X1=V(JJ,J)
Z=V(JJ,I)
V(JJ,J)=(X1*C)+(Z*S)
V(JJ,I)=-(X1*S)+(Z*C)
45 CONTINUE
Z=DSQRT(F*F+H*H)
W(J)=Z
IF(Z.NE.0.0)THEN
Z=1.0D0/Z
C=F*Z
S=H*Z
ENDIF
F=(C*G)+(S*Y)
X1=-(S*G)+(C*Y)
DO 46 JJ=1,M
Y=U(JJ,J)
Z=U(JJ,I)
U(JJ,J)=(Y*C)+(Z*S)
U(JJ,I)=-(Y*S)+(Z*C)
46 CONTINUE
47 CONTINUE
RV1(L)=0.0
RV1(K)=F
W(K)=X1
48 CONTINUE
3 continue
49 CONTINUE
wmax=0.d0
do 1000 j=1,n
if(w(j).gt.wmax)wmax=w(j)
1000 continue
wmin=wmax*.000001d0

```

```

teta03=-.00029333d0*x3**5+.00013558d0*x3**6
teta0=teta01+teta02+teta03
tj0=dsqrt(1.d0/dabs(x1))*f0*dcos(teta0)
endif
fj=dcos(rn2(j))
snokh=dCos(tk1*rss*dCos(rn1(i))*dsin(rn2(j)))*fj*tj0
sal1(ncnt)=sal1(ncnt)+x(j)*snokh
803 continue
802 continue
do 901 ii=1,101
if(sal1(ii+1)>0.and.sal1(ii)<0)then
if(dabs(sal1(ii+1))<dabs(sal1(ii)))then
write(1,*)rss(ii+1)*dcos(rn1(i)),rss(ii+1)*dsin(rn1(i))
else
write(1,*)rss(ii)*dcos(rn1(i)),rss(ii)*dsin(rn1(i))
endif
endif
if(sal1(ii+1)<0.and.sal1(ii)>0)then
if(dabs(sal1(ii+1))<dabs(sal1(ii)))then
write(1,*)rss(ii+1)*dcos(rn1(i)),rss(ii+1)*dsin(rn1(i))
else
write(1,*)rss(ii)*dcos(rn1(i)),rss(ii)*dsin(rn1(i))
endif
endif
endif
901 continue
801 continue
do 902 jj=1,n/2
write(1,*)rs(jj)*dcos(rn1(jj)),rs(jj)*dsin(rn1(jj))
902 continue
end

```

برنامه زیر به دلیل عدم نیاز به سرعت بالا با زبان VISUAL BASIC FOR WINDOWS نوشته شده و در صورت داشتن بانک اطلاعاتی ترازهای انرژی هر دستگاه فراوانی جدائی بین ترازهای انرژی نزدیکترین همسایه‌های آن دستگاه را بدست خواهد داد.

برنامه (۸)

```

Sub Form_Load ()
Show : Cls: n = 100
Dim e(), a(), s()
ReDim e(n), a(n), s(n - 1)
Open "c:\hali\stu\for\dat\1.txt" For Input As #1
For i = 1 To n
Input #1, b
a(i) = b: e(i) = a(i) ^ 2

```

```

Next
Close
Open "c:\hall\stu\for\dat\tzk0.dat" For Output As #2
For i = 1 To n - 1
    s(i) = e(i + 1) - e(i)
Next i

smin = s(1)
smax = s(1)
For i = 1 To n - 1
    If s(i) < smin Then smin = s(i)
    If s(i) > smax Then smax = s(i)
Next i
Print smin, smax:smin = smax / 1000
For il = smin To smax Step smin
    m = 0
    For i = 1 To n - 1
        If s(i) >= il Then
            m = m + 1
        End If
    Next i
    write #2, il, m
    Print il, m
Next il
Close
End Sub

```

برنامه زیر نیز همانند برنامه (۸) بوده باین تفاوت که تمامی همسایگی‌ها را در نظر می‌گیرد.

برنامه (۹)

```

Sub Form_Load ()
Show : Cls: n = 100
Dim e(), s(), s()
ReDim e(n), s(n), s(n, n)
Open "c:\hall\stu\for\dat\1.txt" For Input As #1
For i = 1 To n
    Input #1, b
    s(i) = b: e(i) = s(i) ^ 2
Next
Close
Open "c:\hall\stu\for\dat\tzk.dat" For Output As #2
For k = 0 To n
    For i = 1 To n - k - 1
        s(i, k) = e(i + 1 + k) - e(i)
    Next i

```

```

Next k
smin = s(1, 0)
smax = s(1, 0)
For k = 0 To n
    For i = 1 To n - k - 1
        If s(i, k) < smin Then smin = s(i, k)
        If s(i, k) > smax Then smax = s(i, k)
    Next i
Next k
Print smin, smax
smin = smax / 100
For il = smin To smax Step smin
    m = 0
    For k = 0 To n
        For i = 1 To n - 1 - k
            If s(i, k) >= il Then
                m = m + 1
            End If
        Next i
    Next k
    Print #2, il, m
    Print il, m
Next il
Close
End Sub

```

برنامه زیر توزیع یکنواخت نقاط اعمال شرایط مرزی روی دستگاه استادیوم دوار را بدست خواهد داد.

برنامه (۱۰)

```

Sub Form_Load ()
    Show : a = 1: l = 1: ex = (1 + a) / 10: ey = (1 + a) / 2: pi = 4 * Atn(1)
    Scale (-a - 1 - ex, a + ey) - (a + 1 + ex, 0 - ey): n = 20
    drawwidth = 2
    Dim v(), t()
    ReDim v(n), t(n)
    rc = Int(n * (pi * a / 2) / (2 * l + pi * a))
    r1 = n - 2 * rc
    For i = 2 To rc
        t(i) = i * pi / (2 * rc)
        If t(i) <= pi / 2 Then
            v(i) = Atn(a * Sin(t(i)) / (1 + a * Cos(t(i))))
            r2 = 1 * Cos(v(i)) + Sqr(a ^ 2 - 1 ^ 2 * Sin(v(i)) ^ 2)
            v(n + 2 - i) = pi - v(i)
            r3 = -1 * Cos(v(n + 2 - i)) + Sqr(a ^ 2 - 1 ^ 2 * Sin(v(n + 2 - i)) ^ 2)
            x2 = r2 * Cos(v(i)): y2 = r2 * Sin(v(i))

```

```

    x3 = r3 * Cos(v(n + 2 - 1)); y3 = r3 * Sin(v(n + 2 - 1))
    PSet (x2, y2), QBColor(13)
    PSet (x3, y3), QBColor(0)
End If
Next
t(n - 2) = 1
s1 = 2 * (l) / r1
s = 2 * (1 - s1) / r1
For xx = 1 - s To -1 + s Step -s
    If xx = 0 Then xx = .0000000001
    v(l) = Atn(a / xx)
    If v(l) < 0 Then v(l) = pi + v(l)
    r = a / Sin(v(l))
    x = r * Cos(v(l)); y = r * Sin(v(l))
    l = l + 1
    PSet (x, y), QBColor(9)
Next
t(n - 1) = 1
currenty = 2 * a
form1.FontName = "small fonts"
form1.FontSize = 5.25
For l = 2 To n
    form1.Print l; v(l) * 180 / pi; t(l) * 180 / pi
    ' Print
Next
For l = 2 To n
    Beep
    If v(l) = 0 Then form1.Print l; v(l) * 180 / pi; t(l) * 180 / pi
Next
Print r1; r2; t(n - 2); t(n - 1)
End Sub

```

مراجع

- [١] Poincare, H., *Memorie sur les courbes defines par les equations differentiels I-VI, Oeuvre I. Gauthier-Villar: Paris 1880-1890.*
- [٢] Poincare, H., *Sur les equations de la dynamique et le probleme de trois corps. Acta Math, 13, 1-270, 1890.*
- [٣] Poincare, H., *Les methodes nourelles de la mecanique celeste, 3 Vols. Gauthier-Villar: Paris 1880-1899.*
- [٤] Birkhoff, G.D. *Dynamical systemes, A.M.S. Publications: Providence 1927*
- [٥] Liapunov, A.M., *Probleme General de la Stabilite du mouvement. Annals of mathematical studies. Vol.17. Princetion university press princetion, 1949.*
- [٦] Andronov, A.A, Leontovich, E.A., Gordon, I.I., and Maier, A.G., *Theory of bifurcations of Dynamic Systems on a plane. Isreal programof scientific translation, Jerusalem, 1971.*
- [٧] Andronov, A.A., Pontryagin, L., *Systemes Grossiers. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 14, 247-251, 1937.*
- [٨] Andronov, A.A, Leontovich, E.A., Gordon, I.I., and Maier, *Theory of Dynamic systems on a plane. Israel program of scientific Translations, Jerusalem, 1973.*
- [٩] Andronov, A.A., Vitt, E.A., and Khaikem, S.E. *Theory of oscillators pergamon press: Oxford, 1966.*
- [١٠] Goldstein, H., *Classical Mechanics, 2th edition, Addison-Wesly, 1980.*
- [١١] Kolmogoroff, A.N., *Dokl Akad Nauk SSSr 98: 527, 1954, cf. also Proc Int Cogr Math 1954: 315, Which is reprinted in Abraham and Marsden, 1978.*

- [۱۲] Moser, J., *Nachr Akad Wiss Gottingen* 1, 1962.
- [۱۳] Arnold, V.I., *Usp Mat Nauk SSSR* 18: 13, *Russian Math Surveys* 18: 9, 1963.
- [۱۴] Benettin, G.C., Galgani, L., Giorgilli, A., Strelcyn, J.M., *Nuovo Cimento B* 79: 201, 1984.
- [۱۵] Anosov, D.V., *Geodesic flows on closed riemann manifolds with negative curvature*.
In: *Proc Steklov Inst Math* 90. Providence: Am Math Soc, 1969.
- [۱۶] Kosztin, I., Malasov, D.L. and Golbart, P.M., *Chaos in andreev billiards*, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, No. 9, 1735, 1995.
- [۱۷] Sinai, Ya.G., *Dynamical systems with elastic reflections*, *Russ. Math. Surv.*, Vol. 25, 137, 1970.
- [۱۸] Bunimovich, L.A., *On the ergodic properties of certain billiards*, *Funct. Anal. Appl.*, Vol. 8, 254, 1974.
- [۱۹] نصیری، ن.، آشوب در استادیوم مسطح و استادیوم دوار، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۵.
- [۲۰] Gutzwiller, M.C., *Chais in classical and Quantum mechanics*, Springer-Verlag New York Inc., 1990.
- [۲۱] Eckhardt, B., *Phys. Rep.*, 163: 205-297, 1988.
- [۲۲] Pechukas, P., *J. Chem. Phys.*, 57: 5577, 1972.
- [۲۳] Miller, W.H., Good, R.H., *Phys. Rev.*, 91: 38, 1953.
- [۲۴] Birkhoff, G.D., *Tran Am Math Soc*, 14: 14, 1913.
- [۲۵] Thomas, L.H., *J. Chem. Phys.*, 10: 532 and 538, 1942.
- [۲۶] Eckhardt, B., *J. Phys. A*, 19: 2961, 1986.
- [۲۷] McDonald, S.W., Kaufman, A.N., *Spectrum and eigenfunctions for a hamiltonian with stochastic trajectories*, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 42, No. 18, 1189, 1979.

[۲۸] McDonald, S.W., Kaufman, A.N., *Wave chaos in the stadium: Statistical properties of short-wave solutions of the Helmholtz equation*, *Phys. Rev. A*, Vol. 37, No. 8, 3067, 1988.

[۲۹] قنبری، ر.، مطالعه کوانتومی دستگاه استادیوم، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۶.

[۳۰] Heller, E.J., O'Connor, P.W., Gehlen, J., *The eigenfunctions of classically chaotic systems*, *Physica Scr.*, Vol. 40, 345-359, 1989.

[۳۱] Wigner, E.P., *Gatlinberg con. on neutron Physics*, Oak Ridge Natl. Lab. Rept. No. ORNL-2309, P. 59, 1959.

[۳۲] Landau, L.D., Smorodinski, Ya., *Lectures on the Theory of the Atomic Nucleus* (English Transl.), Consultants Bureau, New York, P. 55, 1958.

[۳۳] فلدر، ه. ف.، هنلی، ا. م.، بارزی، م. (مترجم)، فلاحی مروست، م. ت. (مترجم)، فیزیک زیر اتمی، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۷۴.

[۳۴] کرین، ک.، ابوکاظمی، ا. (مترجم)، رهبر، م. (مترجم)، آشنایی با فیزیک هسته‌ای، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، جلد اول، چاپ اول، ۱۳۷۱.

[۳۵] Abramowitz, M., Stegun, I.A., *Hand book of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, INC., NEW YORK, p. 335, Ninth Dover Printing, 1972.

[۳۶] جلالی اسدآبادی، س.، ویژه مقدارهای نوسانی، مجله فیزیک، سال ۱۴، شماره ۲، ۱۳۷۵.

[۳۷] کینز، ل.، فرای، آ. آ.، اسماعیل بیگی، ض.، برکشی، م.، آکوستیک، مؤسسه انتشارات امیرکبیر، چاپ سوم، ۱۳۶۴.

[۳۸] Vetterling, W. T., Teukolsky, S. A., Flannery, B. P., Press, W. H., *Numerical recipes example book (Fortran)*, Cambridge University Press, Second edition, 1992, Reprinted 1995.

[۳۹] Press, W. H., Vetterling, W. T., Teukolsky, S. A., Flannery, B. P., *Numerical recipes in fortran: The art of scientific computing*, Cambridge University Press, Second edition, 1992.

[۴۰] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, p. 353,

1962.

[۴۱] Fields, D. J., Walling, R. S., Shimkaveg, G. M., Da Silva, L. B., Scofield, J. H.,

Osterheld A. L., Phillips T. W., Rosen, M. D., Goldestein, W. H., Stewart, R. E.,

Observation of high gain in Ne-like Ag Lasers, *Phys. Rev. A*, Vol. 46, No. 3, 1606-

1609, 1992.

[۴۲] پروین، پ.، جلالی اسدآبادی، س.، میرعباسزاده، ک.، بررسی برهمکنش گرمایی پرتو لیزر He:Ne با

بافت درم پوست در لیزر درمانی با توان کم (LLLT)، چکیده مقالات کنفرانس فیزیک ایران، دانشگاه فردوسی

مشهد، صفحات ۳۲۴ تا ۳۲۶، ۱۳۷۵.

[۴۳] گری، ک.، تری، ا.، غنیزاده، ف. (مترجم)، سرهنگی، س. (مترجم)، ویزوال بیسیک ۴ برنامه نویسی در

محیط ویندوز، مؤسسه انتشارات آبتین، چاپ اول، ۱۳۷۵.



Isfahan University of Technology

Department of Physics

M.S. Thesis

Quantum Chaos in a Capsule

S.J. Asadabadi

Supervisor

M. Barezi

Summer, 1998